Mitmetasemeline loogikafunktsioonide minimeerimine – ülesanded ja näidislahendused

Antud on järgmine funktsioonide süsteem:
$x = a\,\overline{d} + \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{d} + b\,c + b\,\overline{d} + a\,c$;
$y = a + b$;
$z = \overline{a}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{d} + \overline{b}\,\overline{c} + \overline{b}\,\overline{d} + e$;
$u = \overline{a}\,c + \overline{a}\,d + \overline{b}\,d + \overline{e}$.
Teostada tuleks järgmised minimeerimis-alam-ülesanded:
1) Asendada osa **x**-st **y**-ga, teostada tuleks seega x algebraline jagamine y-ga.
2) Leida ühine (mitmikkuup) alamavaldis **z**-le ja **u**-le ning teostada asendus. Leida tuleks seega z ja u tuumad ja kaastuumad ning asendamiseks teostada algebraline jagamine.

Jagamine: $Q = A / B$ ja $A = Q \cdot B + R$, kus A on jagatav, B jagaja, Q jagatis ja R jääk.
Algebralisel jagamisel vaadeldakse muutujat ja selle eitust kui erinevaid muutujaid (nt. $\overline{a}$ on a_1).
Jagamisalgoritm lühidalt:
1) esialgne jagatis Q on universaalhulk (1);
2) iga jagaja (B) kuubi $C^B{}_i$ jaoks leitakse jagatava (A) need kuubid $C^A{}_j$, mis sisaldavad kõiki $C^B{}_i$ muutujaid ($C^A{}_j \supseteq C^B{}_i$); vastavad muutujad eemaldatakse (st. ei sõltu vastavatest muutujatest) ning leitakse saadud kuupide hulga (D_i) ja eelmise iteratsiooni jagatise ühisosa $Q=Q \cap D_i$ (kuupi vaadeltakse kui elementi, nt. “ab” ja “abc” on erinevad elemendid);
3) jääk R arvutatakse kui $R=A \setminus (Q \times B)$.

1) x / y = ?
$x = a\,\overline{d} + \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{d} + b\,c + b\,\overline{d} + a\,c$; $y = a + b$;
$A = \{ ad_1, a_1b_1, a_1d_1, bc, bd_1, ac \}$; $B = \{ a, b \}$.
1. iteratsioon: $C^B{}_1=a$, $D=\{ ad_1, ac \}$ ($\subseteq A$), $D_1=\{ d_1, c \}$, $Q=1 \cap \{d_1,c\}=\{c,d_1\}$;
2. iteratsioon: $C^B{}_2=b$, $D=\{ bc, bd_1 \}$ ($\subseteq A$), $D_2=\{ c, d_1 \}$, $Q=\{c,d_1\} \cap \{c,d_1\}=\{c,d_1\}$;
$R=A \setminus (Q \times B) = \{ad_1,a_1b_1,a_1d_1,bc,bd_1,ac\} \setminus (\{d_1,c\} \times \{a,b\}) =$
  $\{ad_1,a_1b_1,a_1d_1,bc,bd_1,ac\} \setminus \{ad_1,bd_1,ac,cb\} = \{a_1b_1,a_1d_1\}$.
Tulemus: $w = c + \overline{d}$; $x = w\,y + \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{d}$ (ehk $x = (c + \overline{d}) (a + b) + \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{d}$).

x / y = ? pärast x-i minimeerimist
$x = \overline{a}\,\overline{b} + c + \overline{d}$ ja $\overline{x} = a\,\overline{c}\,d + b\,\overline{c}\,d$.
x pole jagatav y-ga, sest puuduvad muutujad a ja b (eitused on eri muutujad ja D oleks iteratsioonides $\emptyset$). $\overline{x}$ see-eest on jagatav y-ga ja x on jagatav $\overline{y}$-ga ($\overline{y} = \overline{a}\,\overline{b}$).

a) $x / \overline{y} = ?$
$x = \overline{a}\,\overline{b} + c + \overline{d}$; $\overline{y} = \overline{a}\,\overline{b}$;
$A = \{ a_1b_1, c, d_1 \}$; $B = \{ a_1b_1 \}$.
1. iteratsioon: $C^B{}_1=a_1b_1$, $D=\{ a_1d_1 \}$ ($\subseteq A$), $D_1=1$, $Q=1 \cap 1=1$;
$R=A \setminus (Q \times B) = \{a_1b_1,c,d_1\} \setminus (1 \times \{a_1b_1\}) = \{a_1b_1,c,d_1\} \setminus \{a_1b_1\} = \{c,d_1\}$.
Tulemus: $w = 1$; $x = y + c + \overline{d}$ (ehk $x = (1) (\overline{a}\,\overline{b}) + c + \overline{d}$).

b) $\overline{x} / y = ?$
$\overline{x} = a\,\overline{c}\,d + b\,\overline{c}\,d$; $y = a + b$;
$A = \{ ac_1d, bc_1d \}$; $B = \{ a, b \}$.
1. iteratsioon: $C^B{}_1=a$, $D=\{ ac_1d \}$ ($\subseteq A$), $D_1=\{ c_1d \}$, $Q=1\cap\{c_1d\}=\{c_1d\}$;
2. iteratsioon: $C^B{}_2=b$, $D=\{ bc_1d \}$ ($\subseteq A$), $D_2=\{ c_1d \}$, $Q=\{c_1d\}\cap\{c_1d\}=\{c_1d\}$;
$R=A\backslash(Q\times B) = \{ac_1d,bc_1d\} \setminus (\{c_1d\}\times\{a,b\}) = \{ac_1d,bc_1d\} \setminus \{ac_1d,bc_1d\} = \varnothing$.
Tulemus: $w = \overline{c}\,d$; $x = w\,y$ (ehk $x = (\overline{c}\,d) (a + b) + 0$).

1.2) Lihtsustatud (ja sisuliselt legaalne) kirjapilt jagamisest. Põhi-idee on selles, et pole vaja teostada teisendusi $a\overline{d}$ -> ad_1 jne. Kõik arvutused saab ka otse teostada.
$x / y = ?$; $x = a\,\overline{d} + \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{d} + b\,c + b\,\overline{d} + a\,c$; $y = a + b$;
1. iteratsioon: 'a': " $a\,\overline{d} + a\,c$ " ('a' saab sulgude ette tuua) -> "($\overline{d} + c$)"
2. iteratsioon: 'b': " $b\,c + b\,\overline{d}$ " -> "($c + \overline{d}$)" -> ja mõlemad koos -> "($c + \overline{d}$)"
Jääk: $R=A-(Q\times B) = (a\,\overline{d} + \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{d} + b\,c + b\,\overline{d} + a\,c)$ "-" $(a + b) (c + \overline{d}) =$
$= (a\,\overline{d} + \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{d} + b\,c + b\,\overline{d} + a\,c)$ "-" $(a\,c + a\,\overline{d} + b\,c + b\,\overline{d}) = (\overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{d})$
[Jutumärgid tehete ümber on meelega, et mitte tekitada muljet legaalsetest operatsioonidest.]
Ja tulemus ongi sama: $w = c + \overline{d}$; $x = w\,y + \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{d}$ (ehk $x = (c + \overline{d}) (a + b) + \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{d}$.

2) Ühine mitmikkuup *z* ja *u* alamavaldis?
$z = \overline{a}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{d} + \overline{b}\,\overline{c} + \overline{b}\,\overline{d} + e$; $u = \overline{a}\,c + \overline{a}\,d + \overline{b}\,d + \overline{e}$.
Algebraliselt: $z = a_1\,c_1 + a_1\,d_1 + b_1\,c_1 + b_1\,d_1 + e$; $u = a_1\,c + a_1\,d + b_1\,d + e_1$.
Tuumade leidmiseks jagatakse avaldisi kuupidega (kaastuumad), mis on moodustatud kõik-võimalikest avaldise muutujate kombinatsioonidest, ja valitakse välja mitmikkuup jagatised (tuumad), funktsioon ise on üheks tuumaks. Ühise alamavalise määrab suurim tuumade ühisosa. Kuubiga jagamine on sisuliselt vastava kuubi sulgude ette toomine.

a) z-i tuumad: $z = a_1\,c_1 + a_1\,d_1 + b_1\,c_1 + b_1\,d_1 + e$
$z / a_1 = c_1 + d_1$ - *tuum* $(z=a_1(c_1+d_1)+b_1c_1+ b_1d_1+e)$
$z / b_1 = c_1 + d_1$ - *tuum*
$z / c_1 = a_1 + b_1$ - *tuum*
$z / d_1 = a_1 + b_1$ - *tuum*
$z / e = 1$ - ei ole kuubivaba
$z / a_1c_1 = 1$ - ei ole kuubivaba (jne.)
$K(z) = \{ (a_1+b_1), (c_1+d_1), (a_1c_1+a_1d_1+b_1c_1+b_1d_1+e) \}$

b) u tuumad: $u = a_1\,c + a_1\,d + b_1\,d + e_1$.
$u / a_1 = c + d$ - *tuum*
$u / b_1 = d$ - ei ole kuubivaba
$u / c = a_1$ - ei ole kuubivaba
$u / d = a_1 + b_1$ - *tuum*
$u / e_1 = 1$ - ei ole kuubivaba
$u / a_1c = 1$ - ei ole kuubivaba (jne.)
$K(u) = \{ (a_1+b_1), (c+d), (a_1c+a_1d+b_1d+e_1) \}$

c) Tuumade suurim ühisosa (ühiste tuumade korrutis) - ühine on ainult tuum $v=a_1+b_1$.

d) $z / v = ?$

$z = a_1 c_1 + a_1 d_1 + b_1 c_1 + b_1 d_1 + e$; $v = a_1 + b_1$.

$A = \{ a_1c_1, a_1d_1, b_1c_1, b_1d_1, e \}$; $B = \{ a_1, b_1 \}$.

1. iteratsioon: $C^B{}_1=a_1$, $D=\{ a_1c_1, a_1d_1 \}$ ($\subseteq A$), $D_1=\{ c_1, d_1 \}$, $Q=1\cap\{c_1,d_1\}=\{c_1,d_1\}$;

2. iteratsioon: $C^B{}_2=b_1$, $D=\{ b_1c_1, b_1d_1 \}$ ($\subseteq A$), $D_2=\{ c_1, d_1 \}$, $Q=\{c_1,d_1\}\cap\{c_1,d_1\}=\{c_1,d_1\}$;

$R=A\backslash(Q\times B) = \{a_1c_1,a_1d_1,b_1c_1,b_1d_1,e\} \backslash (\{c_1,d_1\}\times\{a_1,b_1\}) =$

$\{a_1c_1,a_1d_1,b_1c_1,b_1d_1,e\} \backslash \{a_1c_1,a_1d_1,b_1c_1,b_1d_1\} = \{e\}$.

Tulemus: $z = v (\overline{c} + \overline{d}) + e$ (ehk $x = (\overline{a} + \overline{b}) (\overline{c} + \overline{d}) + e$).

e) $u / v = ?$

$u = a_1 c + a_1 d + b_1 d + e_1$; $v = a_1 + b_1$.

$A = \{ a_1c, a_1d, b_1d, e_1 \}$; $B = \{ a_1, b_1 \}$.

1. iteratsioon: $C^B{}_1=a_1$, $D=\{ a_1c, a_1d \}$ ($\subseteq A$), $D_1=\{ c, d \}$, $Q=1\cap\{c,d\}=\{c,d\}$;

2. iteratsioon: $C^B{}_2=b_1$, $D=\{ b_1d \}$ ($\subseteq A$), $D_2=\{ d \}$, $Q=\{c,d\}\cap\{d\}=\{d\}$;

$R=A\backslash(Q\times B) = \{a_1c,a_1d,b_1d,e_1\} \backslash (\{d\}\times\{a_1,b_1\}) = \{a_1c,a_1d,b_1d,e_1\} \backslash \{a_1d,b_1d\} = \{a_1c,e_1\}$.

Tulemus: $u = v\, d + \overline{a}\, c + \overline{e}$ (ehk $x = (\overline{a} + \overline{b}) (d) + \overline{a}\, c + \overline{e}$).

3) Ühine mitmikkuup funktsioonidele x, y ja z?

$x = a\,b\,d + a\,b\,e + a\,c + c\,d + c\,e + d\,f$

$y = a\,b + a\,d + b\,c + c\,d + e$

$z = a\,b + a\,e + c\,e + d$

Tuumade leidmisel saab kasutada kahte lähenemist: 1) tuumad leitakse jagades muutujate kombinatsioonidega (nt. 'a', 'b', 'ab' jne.) või 2) jagamised ainult ühe muutujaga, kuid leitud tuumadele leitakse omakorda tuumad (rekursiivne leidmine – "tuuma tuum on samuti tuum"). Selline "mitmekihiline" otsimine on vajalik ainult siis, kui mõni kuup sisaldab rohkem kui kahte muutujat, st. omab mõtet jagamine kahe (või enama) muutuja korrutisega. Vt. ka muud reeglid põhinäitest. Kuubivaba on jagamise tulemus sisuliselt siis, kui tulemusest tervikuna ei saa sulgude ette tuua mitte ühtegi muutujat.

a) x-i tuumad: $x = a\,b\,d + a\,b\,e + a\,c + c\,d + c\,e + d\,f$

$x / a = b\,d + b\,e + c$ – *tuum* (ja sisaldab tuuma: $b\,d + b\,e + c / b = d + e$ – *tuum*)

$x / b = a\,d + a\,e$ – ei ole kuubivaba (kuid tal endal on tuum: $a\,d + a\,e / a = d + e$ – *tuum*)

$x / c = a + d + e$ – *tuum*

$x / d = a\,b + c + f$ – *tuum*

$x / e = a\,b + c$ – *tuum* (tuumade osaline kattumine on täiesti normaalne nähe)

$x / f = d$ – ei ole kuubivaba

$x / ab = d + e$ – *tuum* (mis on leitav ka rekursiivselt)

[ülejäänud midagi uut ei anna...]

"x/a" tulemuse tuumade leidmine vastab "x/ab":

$b\,d + b\,e + c / b = d + e$ – *tuum*

[sama ka "x/b" jaoks tuumade leidmisel == "x/ba"]

$K(x) = \{ (d+e), (ab+c), (ab+c+f), (a+d+e), (bd+be+c), (abd+abe+ac+cd+ce+df) \}$

b) y-i tuumad: y = a b + a d + b c + c d + e
y / a = b + d – *tuum*
y / b = a + c – *tuum*
y / c = b + d – *tuum* (juba olemas)
y / d = a + c – *tuum* (juba olemas)
y / e = 1 – ei ole kuubivaba
K(y) = { (a+c), (b+d), (ab+ad+bc+cd+e) }
[‘x’-l ja ‘y’-l pole ühiseid mitmik-kuup tuumi. Üksiku kuubiga jagamine õnnestuks küll, nt. “ab” on päris mitmes kohas ühine. Asi omab mõtet siis, kui vaja välja eraldada ühiseid korrutisi, mida tavaliselt tehakse eraldi, nt. optimeerimise lõpus.]

c) z-i tuumad: z = a b + a e + c e + d
z / a = b + e – *tuum*
z / b = a – ei ole kuubivaba
z / c = e – ei ole kuubivaba
z / d = 1 – ei ole kuubivaba
z / e = a + c – *tuum*
K(z) = { (b+e), (a+c), (ab+ae+ce+d) }

d) Ühised tuumad (ühisosad omavahel, nt. “a+b”&“a+b+c”=“a+b” ja “a+b”&“a+bc”=“a”, igal juhul peab arvestama sellega, et kuidas “sulgude ette oleks võimalik tuua”)
[‘x’-l pole ühiseid mitmik-kuup tuumi ei ‘y’- ega ‘z’-ga, ‘y’-l ja ‘z’-l see-eest on – “(a+c)”]
y / (a+c) => y = (a+c)(b+d)+e
z / (a+c) => z = (a+c)e+ab+d

e) Kuigi ‘x’-l puuduvad ühised tuumad teistega, saab leitud tuumi kasutada ‘x’-i tükeldamiseks. Arvestama peaks aga sellega, et leidub mitu erinevat lahendust. Jagades ‘x’-i kõikide tema tuumadega (v.a. ‘x’ endaga), saame järgnevad lahendused:
x / (d+e): => $x = d(\underline{ab+c}+f)+e(\underline{ab+c})+ac = (d+e)(ab+c)+ac+df$ (9 literaali);
x / (ab+c): => $x = ab(\underline{d+e})+c(a+\underline{d+e})+df = (ab+c)(d+e)+ac+df$ (vrdl. eelmisega);
x / (ab+c+f): => $x = ab(\underline{d}+e)+c(a+\underline{d}+e)+f(\underline{d}) = (ab+c+f)(d)+abe+ac+ce$ (12 literaali);
x / (a+d+e): => $x = a(bd+be+\underline{c})+d(ab+\underline{c}+f)+e(ab+\underline{c})$ = [NB! ‘abd’ sisaldab nii ‘a’-d kui ka ‘d’-d ja ‘abe’ nii ‘a’-d kui ka ‘e’-d] = (a+d+e)(c)+abd+abe+df (12 literaali);
x / (bd+be+c): => $x = bd(\underline{a})+be(\underline{a})+c(\underline{a}+d+e)+df = (bd+be+c)(a)+cd+ce+df$ (12 literaali).
Neist kaks esimest on ekvivalentsed.

Lõplik skeem:
w = a + c ; x = (d + e) (a b + c) + a c + d f ; y = w (b + d) + e ; z = w e + a b + d
Kokku 2+9+4+5=20 literaali 30 (14+9+7) asemel.
[Literaalide arv kui skeemi keerukuse mõõt (nii pindala kui ka viide)]

Siit edasi tükeldamisel peaks hakkama juba arvestama, millised loogikaelemendid on saadaval. Samuti tuleks arvesse võtta ka primitiivsed kordused, nt. ‘ab’ on nii ‘x’-s kui ka ‘z’-s.