

# Viite arvutamine ja optimeerimine – ülesanded ja näidislahendused

Viite arvutamise ja kriitilise tee leidmise aluseks olevaid valemeid on hea illustreerida ühe pisikese näitefunktsiooni abil. Funktsioonil on kolm sisendit ja koosneb viiest loogikaelemendist.

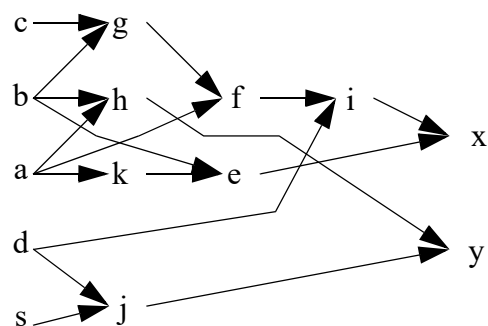
## Esimene näide

Antud on järgmine funktsioonide süsteem:  $k = \bar{a}$ ;  $e = k + b$ ;  $g = \overline{(b + c)}$ ;  $f = a g$ ;  $h = a b$ ;  $i = f \oplus d$ ;  $j = d + s$ ;  $x = e \oplus i$ ;  $y = j + h$ . Sisendid:  $a, b, c, d, s$ . Väljundid:  $x, y$ . Viited: “invertor”, “ja” ja “või” – 1 ajaühik, ülejäänud – 2 ajaühikut. Teada on veel ka andmete valmisolekute ajad sisendites –  $t_a = t_b = t_c = t_d = 0$  ja  $t_s = 4$ , ning nõutavad andmete valmisolekuajad väljundites –  $\bar{t}_x = \bar{t}_y = 7$ . Leida tuleb:

- 1) andmete valmisolekuajad väljundites,
- 2) ajaline sobivus sisendites (slack) ja
- 3) topoloogiline kriitiline tee.

### 1) Andmete valmisolekuajad väljundites

Andmete valmisolekuage sõlmes leitakse kui  $t_i = d_i + \max_{j|(j,i) \in E} t_j$  (suurim valmisolekuageadest allikate välundites). Teada on valmisolekuajad sisendites –  $t_a=0, t_b=0, t_c=0, t_d=0, t_s=4$ ; sõlmede viited –  $d_a=0, d_b=0, d_c=0, d_d=0, d_s=0, d_k=1, d_e=1, d_g=2, d_f=1, d_h=1, d_i=2, d_j=1, d_x=2, d_y=1$  ja ühendused –  $E=\{(a,k),(k,e),(b,e),(b,g),(c,g),(a,f),(g,f),(a,h),(b,h),(f,i),(d,i),(d,j),(s,j),(e,x),(i,x),(j,y),(h,y)\}$ .



$$\begin{aligned}
 t_a=0, t_b=0, t_c=0, t_d=0, t_s=4 & \text{ – antud;} & t_g = d_g + \max(t_b, t_c) = 2 + \max(0, 0) = 2; \\
 t_h = d_h + \max(t_a, t_b) = 1 + \max(0, 0) = 1; & t_k = d_k + \max(t_a) = 1 + \max(0) = 1; \\
 t_j = d_j + \max(t_d, t_s) = 1 + \max(0, 4) = 5; & t_f = d_f + \max(t_a, t_g) = 1 + \max(0, 2) = 3; \\
 t_e = d_e + \max(t_b, t_k) = 1 + \max(0, 1) = 2; & t_i = d_i + \max(t_d, t_f) = 2 + \max(0, 3) = 5; \\
 t_x = d_x + \max(t_e, t_i) = 2 + \max(2, 5) = 7; & t_y = d_y + \max(t_h, t_j) = 1 + \max(1, 5) = 6;
 \end{aligned}$$

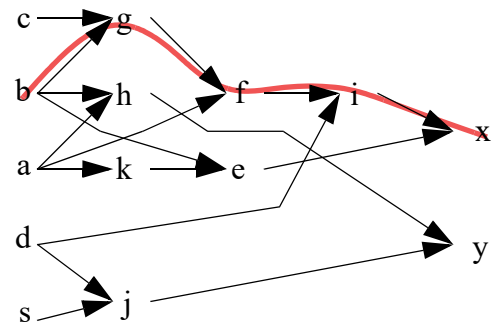
2) Ajaline sobivus (slack) sisendites leitakse kui  $s_i = \bar{t}_i - t_i$ . Selleks on vaja teada nii andmete valmisolekuagea kui ka nõutavat andmete valmisolekuagea sisendites. Valmisolekuajad on juba olemas ja nõutavad ajad arvutatakse iga sõlme jaoks kui  $\bar{t}_i = \min_{j|(i,j) \in E} (\bar{t}_j - d_j)$  (vähim nõutavatest valmisolekuageadest tarbijate sisendites). Teada on valmisolekuajad sisendites –  $t_a=0, t_b=0, t_c=0, t_d=0, t_s=4$ ; nõutavad andmete valmisolekuajad väljundites –  $\bar{t}_x=7; \bar{t}_y=7$ ; sõlmede viited –  $d_a=0, d_b=0, d_c=0, d_d=0, d_s=0, d_k=1, d_e=1, d_g=2, d_f=1, d_h=1, d_i=2, d_j=1, d_x=2, d_y=1$  ja ühendused –  $E=\{(a,k),(k,e),(b,e),(b,g),(c,g),(a,f),(g,f),(a,h),(b,h),(f,i),(d,i),(d,j),(s,j),(e,x),(i,x),(j,y),(h,y)\}$ .

$$\begin{aligned}
\bar{t}_x &= \bar{t}_y = 7 - \text{antud}; & \bar{t}_j &= \min(\bar{t}_y - d_y) = \min(7 - 1) = 6; \\
\bar{t}_i &= \min(\bar{t}_x - d_x) = \min(7 - 2) = 5; & \bar{t}_h &= \min(\bar{t}_y - d_y) = \min(7 - 1) = 6; \\
\bar{t}_f &= \min(\bar{t}_i - d_i) = \min(5 - 2) = 3; & \bar{t}_g &= \min(\bar{t}_f - d_f) = \min(3 - 1) = 2; \\
\bar{t}_e &= \min(\bar{t}_x - d_x) = \min(7 - 2) = 5; & \bar{t}_k &= \min(\bar{t}_e - d_e) = \min(5 - 1) = 4; \\
\bar{t}_a &= \min(\bar{t}_k - d_k, \bar{t}_f - d_f, \bar{t}_h - d_h) = \min(4 - 1, 3 - 1, 6 - 1) = 2; & s_a &= \bar{t}_a - t_a = 2 - 0 = 2; \\
\bar{t}_b &= \min(\bar{t}_e - d_e, \bar{t}_g - d_g, \bar{t}_h - d_h) = \min(5 - 1, \underline{2 - 2}, 6 - 1) = 0; & s_b &= \bar{t}_b - t_b = 0 - 0 = 0; \\
\bar{t}_c &= \min(\bar{t}_g - d_g) = \min(\underline{2 - 2}) = 0; & s_c &= \bar{t}_c - t_c = 0 - 0 = 0; \\
\bar{t}_d &= \min(\bar{t}_i - d_i, \bar{t}_j - d_j) = \min(5 - 2, 6 - 1) = 3; & s_d &= \bar{t}_d - t_d = 3 - 0 = 3; \\
\bar{t}_s &= \min(\bar{t}_j - d_j) = \min(6 - 1) = 5; & s_s &= \bar{t}_s - t_s = 5 - 4 = 1.
\end{aligned}$$

Sobivus sisendites on kõikjal positiivne - viited ja ajastus on korras.

**3)** Topoloogilise kriitilise tee leidmiseks on vaja teada kõikide ajalast sobivust (slack'i), mille arvutamiseks on omakorda vaja teada sõlmede andmete valmisolekuaega ja nõutavat valmisolekuaega (leitud eelmistes alamülesannetes). Sisendite sobivused on juba teada, vaja on arvutada ülejäänud sõlmede sobivused.

$$\begin{aligned}
s_a &= \bar{t}_a - t_a = 2 - 0 = 2; & s_b &= \bar{t}_b - t_b = 0 - 0 = \underline{0}; \\
s_c &= \bar{t}_c - t_c = 0 - 0 = \underline{0}; & s_d &= \bar{t}_d - t_d = 3 - 0 = 3; \\
s_s &= \bar{t}_s - t_s = 5 - 4 = 1; & s_e &= \bar{t}_e - t_e = 5 - 2 = 3; \\
s_f &= \bar{t}_f - t_f = 3 - 3 = \underline{0}; & s_g &= \bar{t}_g - t_g = 2 - 2 = \underline{0}; \\
s_h &= \bar{t}_h - t_h = 6 - 1 = 5; & s_i &= \bar{t}_i - t_i = 5 - 5 = 0; \\
s_j &= \bar{t}_j - t_j = 6 - 5 = 1; & s_k &= \bar{t}_k - t_k = 4 - 1 = 3; \\
s_x &= \bar{t}_x - t_x = 7 - 7 = \underline{0}; & s_y &= \bar{t}_y - t_y = 7 - 6 = 1.
\end{aligned}$$



Kriitilise tee moodustavad sõlmed, mille sobivus on kõige väiksem (ja see sobivus on kogu tee ulatuses sama). Antud juhul on kriitiliseks teeks “b-g-f-i-x” ja/või “c-g-f-i-x”.

## Teine näide

Antud on järgmine funktsioonide süsteem:  $k = a \cdot b$ ;  $l = a \oplus c$ ;  $m = c \cdot d$ ;  $n = \overline{k + l}$ ;  $o = l \oplus m$ ;  $x = n + o$ ;  $y = \overline{k \cdot o}$ . Sisendid: a, b, c, d. Väljundid: x, y. Elementide viited: sisendid –  $d_a = d_b = d_c = d_d = 0$ ; lihtsamad elemendid –  $d_k = d_m = d_n = d_x = d_y = 1$ ; xor/xnor –  $d_l = d_o = 2$ . Teada on veel ka andmete valmisolekute ajad sisendites –  $t_a = t_c = 1$  ja  $t_b = t_d = 0$ , ning nõutavad andmete valmisolekuajad väljundites –  $\bar{t}_x = \bar{t}_y = 7$ . Leida tuleb:

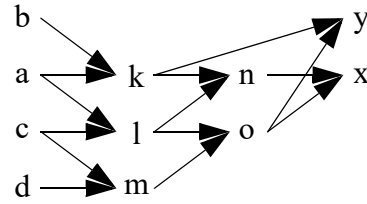
- 1) andmete valmisolekuajad väljundites,
- 2) ajaline sobivus sisendites (slack) ja
- 3) topoloogiline kriitiline tee.

### 1) Andmete valmisolekuajad väljundites

Arvutamise aluseks endisel  $t_i = d_j + \max_{j|(j,i) \in E} t_j$  (suurim valmisolekuaegadest allikate väljundites).

Teada on valmisolekuajad sisendites –  $t_a=1, t_b=0, t_c=1, t_d=0$ ; sõlmede viited –  $d_a=0, d_b=0, d_c=0, d_d=0, d_k=1, d_l=2, d_m=1, d_n=1, d_o=2, d_x=1, d_y=1$  ja

ühendused –  $E = \{(a,k), (b,k), (a,l), (c,l), (c,m), (d,m), (k,n), (l,n), (l,o), (m,o), (n,x), (o,x), (k,y), (o,y)\}$ .



$$\begin{aligned}
 t_a=1, t_b=0, t_c=1, t_d=0 & \text{ – antud;} & t_k &= d_k + \max(t_a, t_b) = 1 + \max(1, 0) = 2; \\
 t_l &= d_l + \max(t_a, t_c) = 2 + \max(1, 1) = 3; & t_m &= d_m + \max(t_c, t_d) = 1 + \max(1, 0) = 2; \\
 t_n &= d_n + \max(t_k, t_l) = 1 + \max(2, 3) = 4; & t_o &= d_o + \max(t_l, t_m) = 2 + \max(3, 2) = 5; \\
 t_x &= d_x + \max(t_n, t_o) = 1 + \max(4, 5) = 6; & t_y &= d_y + \max(t_k, t_o) = 1 + \max(2, 5) = 6;
 \end{aligned}$$

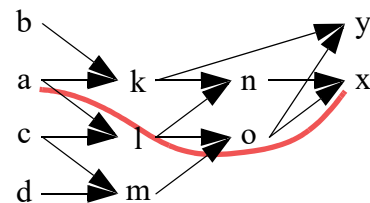
2) Ajaline sobivus (slack) sisendites leitakse kui  $s_i = \bar{t}_i - t_i$ . Selleks on vaja teada nii andmete valmisolekuaega kui ka nõutavat andmete valmisolekuaeg sisendites. Viimase arvutamise aluseks endisel  $\bar{t}_i = \min_{j|(i,j) \in E} (\bar{t}_j - d_j)$  (vähim nõutavatest valmisolekuaegadest tarbijate sisendites). Teada on valmisolekuajad sisendites –  $t_a=1, t_b=0, t_c=1, t_d=0$ ; nõutavad andmete valmisolekuajad väljundites –  $\bar{t}_x=7; \bar{t}_y=7$ ; sõlmede viited –  $d_a=0, d_b=0, d_c=0, d_d=0, d_k=1, d_l=2, d_m=1, d_n=1, d_o=2, d_x=1, d_y=1$  ja ühendused –  $E = \{(a,k), (b,k), (a,l), (c,l), (c,m), (d,m), (k,n), (l,n), (l,o), (m,o), (n,x), (o,x), (k,y), (o,y)\}$ .

$$\begin{aligned}
 \bar{t}_x &= \bar{t}_y = 7 \text{ – antud;} & \bar{t}_o &= \min(\bar{t}_x - d_x, \bar{t}_y - d_y) = \min(7 - 1, 7 - 1) = 6; \\
 \bar{t}_n &= \min(\bar{t}_x - d_x) = \min(7 - 1) = 6; & \bar{t}_m &= \min(\bar{t}_o - d_o) = \min(6 - 2) = 4; \\
 \bar{t}_l &= \min(\bar{t}_n - d_n, \bar{t}_o - d_o) = \min(6 - 1, 6 - 2) = 4; & \bar{t}_k &= \min(\bar{t}_y - d_y, \bar{t}_n - d_n) = \min(7 - 1, 6 - 1) = 5; \\
 \bar{t}_a &= \min(\bar{t}_k - d_k, \bar{t}_l - d_l) = \min(5 - 1, 4 - 2) = 2; & s_a &= \bar{t}_a - t_a = 2 - 1 = 1; \\
 \bar{t}_b &= \min(\bar{t}_k - d_k) = \min(5 - 1) = 4; & s_b &= \bar{t}_b - t_b = 4 - 0 = 4; \\
 \bar{t}_c &= \min(\bar{t}_l - d_l, \bar{t}_m - d_m) = \min(4 - 2, 4 - 1) = 2; & s_c &= \bar{t}_c - t_c = 2 - 1 = 1; \\
 \bar{t}_d &= \min(\bar{t}_m - d_m) = \min(4 - 1) = 3; & s_d &= \bar{t}_d - t_d = 3 - 0 = 3.
 \end{aligned}$$

Sobivus sisendites on kõikjal positiivne - viited ja ajastus on korras.

3) Topoloogilise kriitilise tee leidmiseks on vaja teada kõikide ajalist sobivust (slack'i), mille arvutamiseks on omakorda vaja teada sõlmede andmete valmisolekuaega ja nõutavat valmisolekuaega (leitud eelmistes alamülesannetes). Sisendite sobivused on juba teada, vaja on arvutada ülejäänud sõlmede sobivused.

$$\begin{aligned}
 s_a &= \bar{t}_a - t_a = 2 - 1 = 1; & s_b &= \bar{t}_b - t_b = 4 - 0 = 4; \\
 s_c &= \bar{t}_c - t_c = 2 - 1 = 1; & s_d &= \bar{t}_d - t_d = 3 - 0 = 3; \\
 s_k &= \bar{t}_k - t_k = 5 - 2 = 3; & s_l &= \bar{t}_l - t_l = 4 - 3 = 1; \\
 s_m &= \bar{t}_m - t_m = 4 - 2 = 2; & s_n &= \bar{t}_n - t_n = 6 - 4 = 2; \\
 s_o &= \bar{t}_o - t_o = 6 - 5 = 1; & & \\
 s_x &= \bar{t}_x - t_x = 7 - 6 = 1; & s_y &= \bar{t}_y - t_y = 7 - 6 = 1.
 \end{aligned}$$



Kriitilise tee moodustavad sõlmed, mille sobivus on kõige väiksem (ja see sobivus on kogu tee ulatuses sama). Antud juhul on kriitiliseks teeks “a-l-o-x”, “c-l-o-x”, “a-l-o-y” ja/või “c-l-o-y”.

## Kolmas näide – skeemi (viite) optimeerimine

Tegemist on näitega, mis on pärit ühe kodutöö variandi analüüsist (vt. 5. loengu materjale). Paremal on toodud lähteülesandele vastav tõeväärtustabel. Minimeerimise tulemusena (espresso) saadi järgmine süsteem:

$$k = \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}d + b\bar{d} + a\bar{b}c; \quad l = a\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}d + a\bar{b}c + b\bar{c};$$

$$m = \bar{a}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}d + a\bar{b}c + b\bar{c} \quad \text{ja} \quad n = \bar{a}c\bar{d} + a\bar{c}d + b\bar{d} + a\bar{b}c + b\bar{c}.$$

Pärast ühiste alamavaldiste leidmist, nende eraldamist ja teisendamist sobiva suurustega teheteks (kasutada on ju kuni 3 sisendiga loogikaelemendid), saadi:

$$t_1 = a + \bar{c}; \quad k_1 = \bar{b}\bar{c} + b\bar{d}; \quad k = k_1 + \bar{a}\bar{b}d + a\bar{b}c; \quad l = t_1b + a\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}d;$$

$$m = t_1b + \bar{a}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}d; \quad n_1 = t_1b + b\bar{d} \quad \text{ja} \quad n = n_1 + \bar{a}c\bar{d} + a\bar{c}d.$$

| abcd | klmn |
|------|------|
| 0000 | -00- |
| 0001 | 1--0 |
| 0010 | -0-1 |
| 0011 | 111- |
| 0100 | 0-1- |
| 0101 | -1-- |
| 0110 | 0011 |
| 0111 | 1-01 |
| 1000 | 1000 |
| 1001 | 11-1 |
| 1010 | -000 |
| 1011 | 0000 |
| 1100 | 0111 |
| 1101 | -111 |
| 1110 | 11-1 |
| 1111 | 1-11 |

Viite (ja kriitilise tee) arvutamine on antud näites lihtsam, sest kõikide sisendite andmete valmisolekuajad on 0 ja väljundite nõutavat andmete valmisolekuaegu pole antud. Seega piisab ainult valmisolekuaegade ( $t_i$ ) arvutamisest. Loogikaelementide viited on järgmised – 2-NAND - 1.0; NOT, 2-NOR, 3-NAND - 1.5; 2-OR, 2-AND, 2-XOR, 3-NOR - 2.0 ja 3-OR, 3-AND, 3-XOR - 2.5.

Kirjutades välja üksikud loogikaelemendid koos viidete/hilistumiste (andmete valmisoleku aegade) arvutamisega, on tulemuseks:

|                        |                                           |
|------------------------|-------------------------------------------|
| $a_i = \bar{a};$       | $t_{a_i} = \max(0) + 1.5 = 1.5$           |
| $b_i = \bar{b};$       | $t_{b_i} = \max(0) + 1.5 = 1.5$           |
| $c_i = \bar{c};$       | $t_{c_i} = \max(0) + 1.5 = 1.5$           |
| $d_i = \bar{d};$       | $t_{d_i} = \max(0) + 1.5 = 1.5$           |
| $t_1 = a + c_i;$       | $t_{t_1} = \max(0, 1.5) + 2.0 = 3.5$      |
| $t_2 = b_i c_i;$       | $t_{t_2} = \max(1.5, 1.5) + 2.0 = 3.5$    |
| $t_3 = b\bar{d};$      | $t_{t_3} = \max(0, 0) + 2.0 = 2.0$        |
| $t_4 = a_i b_i d;$     | $t_{t_4} = \max(1.5, 1.5, 0) + 2.5 = 4.0$ |
| $t_5 = a\bar{b}c;$     | $t_{t_5} = \max(0, 0, 0) + 2.5 = 2.5$     |
| $t_6 = t_1 b;$         | $t_{t_6} = \max(3.5, 0) + 2.0 = 5.5$      |
| $t_7 = a c_i d;$       | $t_{t_7} = \max(0, 1.5, 0) + 2.5 = 4.0$   |
| $t_8 = a_i c d_i;$     | $t_{t_8} = \max(1.5, 0, 1.5) + 2.5 = 4.0$ |
| $k_1 = t_2 + t_3;$     | $t_{k_1} = \max(3.5, 2.0) + 2.0 = 5.5$    |
| $k = k_1 + t_4 + t_5;$ | $t_k = \max(5.5, 4.0, 2.5) + 2.5 = 8.0$   |
| $l = t_6 + t_7 + t_4;$ | $t_l = \max(5.5, 4.0, 4.0) + 2.5 = 8.0$   |
| $m = t_6 + t_8 + t_4;$ | $t_m = \max(5.5, 4.0, 4.0) + 2.5 = 8.0$   |
| $n_1 = t_6 + t_3;$     | $t_{n_1} = \max(5.5, 2.0) + 2.0 = 7.5$    |
| $n = n_1 + t_8 + t_7;$ | $t_n = \max(7.5, 4.0, 4.0) + 2.5 = 10.0$  |

Kriitiliseks teeks osutub antud juhul kõige pikema viitega tee, mis oleks siis “c-ci-t1-t6-n1-n” (sisendite suurimad viited/hilistumised alla joonitud).

Kuna hilistumine on kriitlisel teel 20% teistest suurem, siis oleks kasulik uurida, kas seda ei saaks vähendada (ilma keerukate teisendusteta NAND/NOR elementideks, mis samuti annaksid parema tulemuse). Selleks tuleks analüüsida, kuidas viide antud teel kujuneb. Esimese osa muutmine nõuaks teisendusi, lisaks sõltuvad ka osa teisi väljundeid *ci*-st, *t1*-st ja *t6*-st. Jääb üle ainult uurida, kuidas *n* leitakse. Kuna *n* sõltub neljast implikandist, siis peab nende kokku võtmiseks kasutama kahte OR elementi – 2-OR ja 3-OR. Üldvariante on sisuliselt kaks –  $n1 = tx1 + tx2$  ;  $n = n1 + tx3 + tx4$  ; või  $n1 = tx1 + tx2 + tx3$  ;  $n = n1 + tx4$  ; ( $tx1$ - $tx4$  tähistaksid implikante  $t3$ ,  $t6$ ,  $t7$  ja  $t8$  suvalises järjekorras). Piisavalt hea (parima?) tulemuse leidmiseks peaks ka arvestama implikantide andmete valmisolekuaegadega – mida hilisem aeg (suurem viide), seda ligemal väljundile oleva OR-le peaks ta ühendama. Implikantide andmete valmisolekuajad on järgmised –  $t_{t3}=2.0$ ,  $t_{t6}=5.5$ ,  $t_{t7}=4.0$  ja  $t_{t8}=4.0$ . Ja selgubki, et  $t6$  on vales kohas –  $t6$  peaks olema mitte  $n1$  vaid hoopis  $n$  sisendiks. See, kas  $t7$  (või  $t8$ , mis on sama hilistumisega) panna  $n1$  või  $n$  sisendiks, annakski kaks varianti, mida võrrelda ( $t3$  peaks kindlasti olema  $n1$  sisendiks, sest hilistumine on väike).

Esimene variant – 2-OR->3-OR (ainult  $n1$  ja  $n$  on muudetud):

$$\begin{aligned} n1 &= t3 + t7 ; & t_{n1} &= \max(2.0, 4.0) + 2.0 = 6.0 \\ n &= n1 + t6 + t8 ; & t_n &= \max(6.0, 5.5, 4.0) + 2.5 = 8.5 \end{aligned}$$

Teine variant – 3-OR->2-OR:

$$\begin{aligned} n1 &= t3 + t7 + t8 ; & t_{n1} &= \max(2.0, 4.0, 4.0) + 2.5 = 6.5 \\ n &= n1 + t6 ; & t_n &= \max(6.5, 5.5) + 2.0 = 8.5 \end{aligned}$$

Mõlemal juhul on tulemus sisuliselt sama – väljudi  $n$  hilistumine paranes 10.0-lt 8.5-le (kõik väljundid on suhteliselt sarnase hilistumisega). Oluline muutus on see, et ahel “c-ci-t1-t6” ei asu enam kriitlisel teel. Selle asemel on seal kas “c-ci-t7”, “a-ai-t8” või “d-di-t8” ja edasine viite vähendamine eeldaks juba teisendusi, mis asendaksid AND ja OR elemendid NAND ja NOR (ja teiste) kombinatsioonidega.

Sarnane olukord on ka väljundis  $k$  ( $k1=t2+t3$ ;  $k=k1+t4+t5$ ), kus võib ära vahetada implikandid  $t2$  ja  $t5$ . Tulemuseks oleks viite vähenemine 1 ajaühiku võrra (oli 8.0, uus on 7.0):

$$\begin{aligned} k1 &= t5 + t3 ; & t_{k1} &= \max(2.5, 2.0) + 2.0 = 4.5 \\ k &= k1 + t4 + t2 ; & t_k &= \max(4.5, 4.0, 3.5) + 2.5 = 7.0 \end{aligned}$$

Erinevalt väljundist  $n$  pole  $k$  puhul 3-OR->2-OR paari kasutamine otstarbekas. Selle kontrollimine jääb iseseisvaks tööks.

## Näidiskodutööde viite arvutamine

Võib eeldada, et kõikides sisendites on andmete valmisolekuaeg 0 ja nõutavat andmete valmisoleku aega väljundites pole määratud. Seega saab arvutada ainult andmete valmisoleku aegu.

#### Näide #4:

|                       |                                        |
|-----------------------|----------------------------------------|
| $a_i = a'$            | $t_{ai} = \max(0)+1.5 = 1.5$           |
| $b_i = b'$            | $t_{bi} = \max(0)+1.5 = 1.5$           |
| $c_i = c'$            | $t_{ci} = \max(0)+1.5 = 1.5$           |
| $d_i = d'$            | $t_{di} = \max(0)+1.5 = 1.5$           |
| $t_1 = a_i \ b_i \ d$ | $t_{t1} = \max(1.5,1.5,0)+2.5 = 4.0$   |
| $t_2 = a \ b \ c$     | $t_{t2} = \max(0,0,0)+2.5 = 2.5$       |
| $t_3 = b_i \ c_i$     | $t_{t3} = \max(1.5,1.5)+2.0 = 3.5$     |
| $t_4 = b \ d$         | $t_{t4} = \max(0,0)+2.0 = 2.0$         |
| $t_5 = a \ c_i \ d$   | $t_{t5} = \max(0,1.5,0)+2.5 = 4.0$     |
| $t_6 = b \ c_i$       | $t_{t6} = \max(0,1.5)+2.0 = 3.5$       |
| $t_7 = a_i \ c \ d_i$ | $t_{t7} = \max(1.5,0,1.5)+2.5 = 4.0$   |
| $k_1 = t_1+t_2$       | $t_{k1} = \max(4.0,2.5)+2.0 = 6.0$     |
| $k = k_1+t_3+t_4$     | $t_k = \max(6.0,3.5,2.0)+2.5 = 8.5$    |
| $l = k_1+t_5+t_6$     | $t_l = \max(6.0,4.0,3.5)+2.5 = 8.5$    |
| $m_1 = t_7+t_6$       | $t_{m1} = \max(4.0,3.5)+2.0 = 6.0$     |
| $m = k_1+m_1$         | $t_m = \max(6.0,6.0)+2.0 = 8.0$        |
| $n_1 = t_5+t_4+t_2$   | $t_{n1} = \max(4.0,2.0,2.5)+2.5 = 6.5$ |
| $n = m_1+n_1$         | $t_n = \max(6.0,6.5)+2.0 = 8.5$        |

Loogikaelemendid: 4 NOT, 3\*2-AND, 4\*3-AND, 4\*2-OR, 3\*3-OR; literaale: 4+18+17=39;  
ekvivalentseid loogikaelemente (suurus): 4\*1.5+3\*2.0+4\*2.5+4\*2.0+3\*2.5=37.5;  
suurim viide: 8.5, kriitiline tee nt. *a-ai-t1-k1-k* või *c-ci-t5-n1-n*.

#### Näide #5:

|                       |                                      |
|-----------------------|--------------------------------------|
| $a_i = a'$            | $t_{ai} = \max(0)+1.5 = 1.5$         |
| $b_i = b'$            | $t_{bi} = \max(0)+1.5 = 1.5$         |
| $c_i = c'$            | $t_{ci} = \max(0)+1.5 = 1.5$         |
| $d_i = d'$            | $t_{di} = \max(0)+1.5 = 1.5$         |
| $t_1 = a+c_i$         | $t_{t1} = \max(0,1.5)+2.0 = 3.5$     |
| $t_2 = b_i \ c_i$     | $t_{t2} = \max(1.5,1.5)+2.0 = 3.5$   |
| $t_3 = b \ d$         | $t_{t3} = \max(0,0)+2.0 = 2.0$       |
| $t_4 = a_i \ b_i \ d$ | $t_{t4} = \max(1.5,1.5,0)+2.5 = 4.0$ |
| $t_5 = a \ b \ c$     | $t_{t5} = \max(0,0,0)+2.5 = 2.5$     |
| $t_6 = t_1 \ b$       | $t_{t6} = \max(3.5,0)+2.0 = 5.5$     |
| $t_7 = a \ c_i \ d$   | $t_{t7} = \max(0,1.5,0)+2.5 = 4.0$   |
| $t_8 = a_i \ c \ d_i$ | $t_{t8} = \max(1.5,0,1.5)+2.5 = 4.0$ |
| $k_1 = t_2+t_3$       | $t_{k1} = \max(3.5,2.0)+2.0 = 5.5$   |
| $k = k_1+t_4+t_5$     | $t_k = \max(5.5,4.0,2.5)+2.5 = 8.0$  |
| $l = t_6+t_7+t_4$     | $t_l = \max(5.5,4.0,4.0)+2.5 = 8.0$  |
| $m = t_6+t_8+t_4$     | $t_m = \max(5.5,4.0,4.0)+2.5 = 8.0$  |
| $n_1 = t_6+t_3$       | $t_{n1} = \max(5.5,2.0)+2.0 = 7.5$   |
| $n = n_1+t_8+t_7$     | $t_n = \max(7.5,4.0,4.0)+2.5 = 10.0$ |

Loogikaelemendid: 4\*NOT, 3\*2-AND, 4\*3-AND, 3\*2-OR, 4\*3-OR; literaale: 4+18+18=40;  
ekvivalentseid loogikaelemente (suurus): 4\*1.5+3\*2.0+4\*2.5+3\*2.0+4\*2.5=38.0;  
suurim viide: 10.0, kriitiline tee *c-ci-t1-t6-n1-n*.

Näide #6:

|                      |                                        |
|----------------------|----------------------------------------|
| <b>ai = a'</b>       | $t_{ai} = \max(0)+1.5 = 1.5$           |
| <b>bi = b'</b>       | $t_{bi} = \max(0)+1.5 = 1.5$           |
| <b>ci = c'</b>       | $t_{ci} = \max(0)+1.5 = 1.5$           |
| <b>di = d'</b>       | $t_{di} = \max(0)+1.5 = 1.5$           |
| <b>t1 = b ci</b>     | $t_{t1} = \max(0,1.5)+2.0 = 3.5$       |
| <b>t2 = ai di</b>    | $t_{t2} = \max(1.5,1.5)+2.0 = 3.5$     |
| <b>t3 = a bi c</b>   | $t_{t3} = \max(0,1.5,0)+2.5 = 4.0$     |
| <b>t4 = bi ci di</b> | $t_{t4} = \max(1.5,1.5,1.5)+2.5 = 4.0$ |
| <b>t5 = ai b d</b>   | $t_{t5} = \max(1.5,0,0)+2.5 = 4.0$     |
| <b>t6 = ai ci</b>    | $t_{t6} = \max(1.5,1.5)+2.0 = 3.5$     |
| <b>ki = t1+t2+t3</b> | $t_{ki} = \max(3.5,3.5,4.0)+2.5 = 6.5$ |
| <b>li = t2+t4+t3</b> | $t_{li} = \max(3.5,4.0,4.0)+2.5 = 6.5$ |
| <b>mi = t5+t4+t3</b> | $t_{mi} = \max(4.0,4.0,4.0)+2.5 = 6.5$ |
| <b>ni = t6+t4+t3</b> | $t_{ni} = \max(3.5,4.0,4.0)+2.5 = 6.5$ |
| <b>k = ki'</b>       | $t_k = \max(6.5)+1.5 = 8.0$            |
| <b>l = li'</b>       | $t_l = \max(6.5)+1.5 = 8.0$            |
| <b>m = mi'</b>       | $t_m = \max(6.5)+1.5 = 8.0$            |
| <b>n = ni'</b>       | $t_n = \max(6.5)+1.5 = 8.0$            |

Loogikaelemendid: 8 NOT, 3\*2-AND, 3\*3-AND, 4\*3-OR; literaale: 8+15+12=35;  
ekvivalentseid loogikaelemente (suurus): 8\*1.5+3\*2.0+3\*2.5+4\*2.5=35.5;  
suurim viide: 8.0, kriitiline tee nt. *a-ai-t6-ki-k* või *c-ci-t4-ni-n*.

Näide #7:

|                        |                                      |
|------------------------|--------------------------------------|
| <b>ai = a'</b>         | $t_{ai} = \max(0)+1.5 = 1.5$         |
| <b>bi = b'</b>         | $t_{bi} = \max(0)+1.5 = 1.5$         |
| <b>ci = c'</b>         | $t_{ci} = \max(0)+1.5 = 1.5$         |
| <b>di = d'</b>         | $t_{di} = \max(0)+1.5 = 1.5$         |
| <b>t1 = (bi+c)'</b>    | $t_{t1} = \max(1.5,0)+1.5 = 3.0$     |
| <b>t2 = (a+d)'</b>     | $t_{t2} = \max(0,0)+1.5 = 1.5$       |
| <b>t3 = (ai+b+ci)'</b> | $t_{t3} = \max(1.5,0,1.5)+2.0 = 3.5$ |
| <b>t4 = (b+c+d)'</b>   | $t_{t4} = \max(0,0,0)+2.0 = 2.0$     |
| <b>t5 = (a+bi+di)'</b> | $t_{t5} = \max(0,1.5,1.5)+2.0 = 3.5$ |
| <b>t6 = (a+c)'</b>     | $t_{t6} = \max(0,0)+1.5 = 1.5$       |
| <b>k = (t1+t2+t3)'</b> | $t_k = \max(3.0,1.5,3.5)+2.0 = 5.5$  |
| <b>l = (t2+t4+t3)'</b> | $t_l = \max(1.5,2.0,3.5)+2.0 = 5.5$  |
| <b>m = (t5+t4+t3)'</b> | $t_m = \max(3.5,2.0,3.5)+2.0 = 5.5$  |
| <b>n = (t6+t4+t3)'</b> | $t_n = \max(1.5,2.0,3.5)+2.0 = 5.5$  |

Loogikaelemendid: 4\*NOT, 3\*2-NOR 7\*3-NOR; literaale: 4+27=31;  
ekvivalentseid loogikaelemente (suurus): 4\*1.5+3\*1.5+7\*2.0=24.5;  
suurim viide: 5.5, kriitiline tee nt. *a-ai-t3-k* või *d-di-t5-m*.