



TTÜ 1918



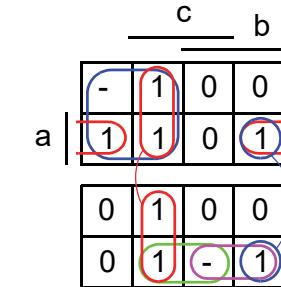
# Kahetasemeline minimeerimine ja mitmetasemeline realisatsioon

abc	xy
000	-0
001	11
010	00
011	00
100	10
101	11
110	11
111	0-

mintermid		
gr.	abc	e
0 o	000	10
1	001	10
	001	01
	100	10
2	101	10
	101	01
	110	10
	110	01
3 o	111	01

1. etapp		
gr.	abc	e
0	00-	10*
	-00	10*
1	001	11*
	-01	10*
	-01	01*
	10-	10*
	1-0	10
2	101	11*
	110	11
	1-1	01
	11-	01

2. etapp		
gr.	abc	e
0	-0-	10
1	-01	11



lihtimplikantide  
tabel

abc	e	A	B	C	D	E	F
001	10					+	+
* 001	01					*	
100	10	+				+	
101	10					+	+
101	01		+			+	+
110	10	+	+				
110	01	+		+			

abc	e	A	B	C	D	E
100	10	+				+
110	10	+	+			
110	01	+		+		

- 3 varianti
- 1: F, A, B
  - 2: F, A, D
  - 3: F, B, E



TTÜ 1918



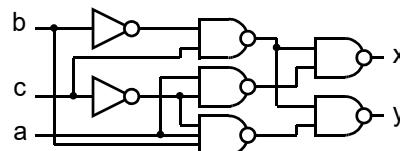
# Kahetasemeline minimeerimine ja mitmetasemeline realisatsioon

3 varianti

- 1: F, A, B
- 2: F, A, D
- 3: F, B, E

Lisaks  
üksikult  
minimeeritud  
4: A, E, D, F

$$\begin{aligned} bi &= b'; ci = c'; t1 = bi \cdot c; \\ t2 &= a \cdot ci; t3 = a \cdot b \cdot ci; \\ x &= t1 + t2; y = t1 + t3; \end{aligned}$$



abc	xy
-01	11
1-0	10
110	<u>01</u>

abc	xy
-01	11
1-0	10
11-	01

abc	xy
-01	<u>01</u>
110	11
-0-	10

abc	xy
1-0	10
-0-	10
11-	01
-01	<u>01</u>

		c	b
a		-	0 0
-	1	0	0
1	1	0	1
0	1	0	0
0	1	-	1

		c	b
a		-	0 0
-	1	0	0
1	1	0	1
0	1	0	0
0	1	-	1

		c	b
a		-	0 0
-	1	0	0
1	1	0	1
0	1	0	0
0	1	-	1

		c	b
a		-	0 0
-	1	0	0
1	1	0	1
0	1	0	0
0	1	-	1

NOT - 2  
2-NAND - 4  
3-NAND - 1  
26 transistori  
[13 literaali]

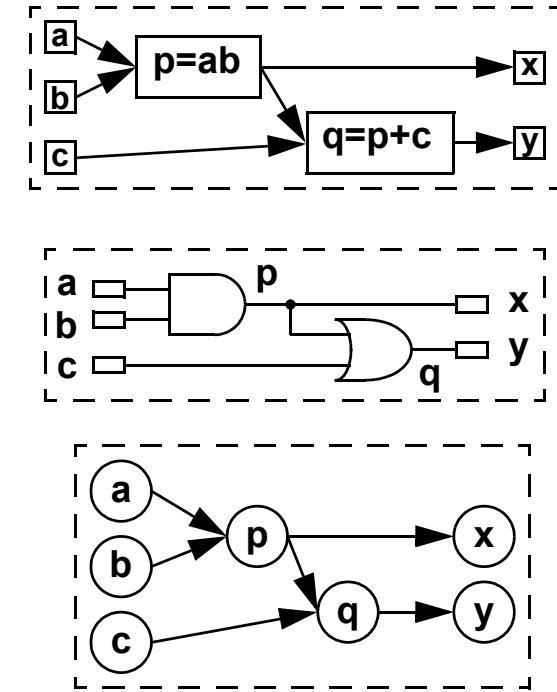
NOT - 2  
2-NAND - 5  
3-NAND - 0  
24 transistori  
[12 literaali]

NOT - 2  
2-NAND - 3  
3-NAND - 1  
22 transistori  
[11 literaali]

NOT - 2  
2-NAND - 5  
3-NAND - 0  
24 transistori  
[12 literaali]

# Mitmetasemeline loogikafunktsoonide minimeerimine

- Loogikaelementide teegid – loogikalülid / makrod
- Esitusviis – loogikavõrkgraaf (logic network)
  - omavahel ühendatud loogikafunktsoonid
- Seotud võrkgraaf (bound/mapped network)
  - omavahel ühendatud loogikalülid (struktuurne mudel)
- Pindala (võimsustarbe) ennustuse minimeerimine
  - arvestada tuleb viite piiranguid
- Suurima viite minimeerimine
  - arvestada tuleb pindala (võimsustarbe) piiranguid
- Testitavuse parendamine / võimsustarbe vähendamine
- Ennustus (estimation)
  - literaalide arv, loogikalülide mudelid, olulised signaaliteed, ...
- **Mitmetasemeline minimeerimine on raske !**
- Heuristilised optimeerimis-strateegiad
  - samm-sammuline parendamine – teisendused (transformations) võrkgraafil
  - erinevad meetodid – teisenduste variandid & teisenduste rakendamise järjekorrad





TTÜ 1918



# Näitevõrkgraaf

$$p = ce + de$$

$$q = a + b$$

$$r = p + a'$$

$$s = r + b'$$

$$t = ac + ad + bc + bd + e$$

$$u = q' c + qc' + qc$$

$$v = a' d + bd + c' d + ae'$$

$$w = v$$

$$x = s$$

$$y = t$$

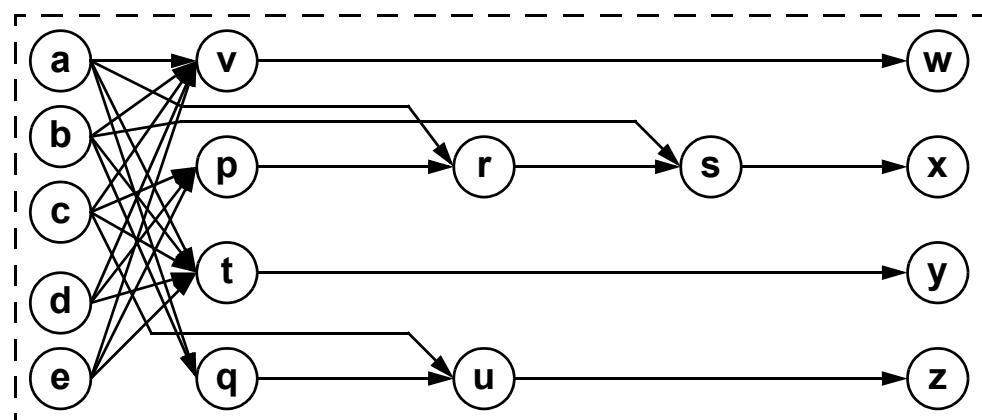
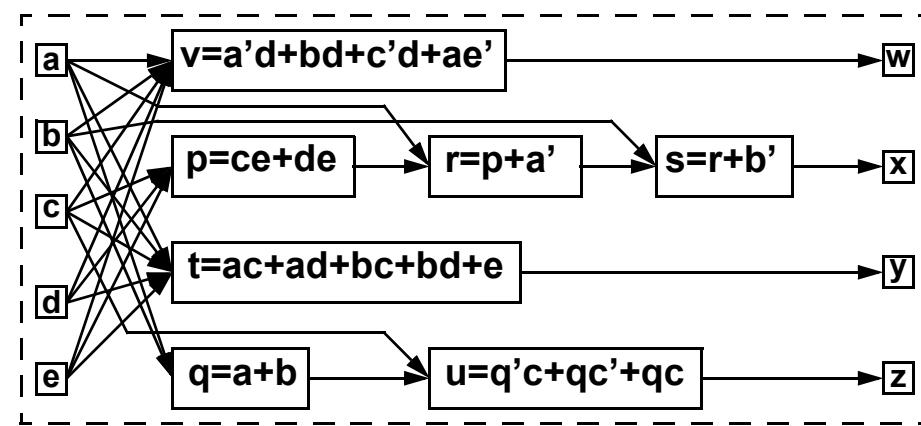
$$z = u$$

$$w = a' d + bd + c' d + ae'$$

$$f: x = a' + b' + ce + de$$

$$y = ac + ad + bc + bd + e$$

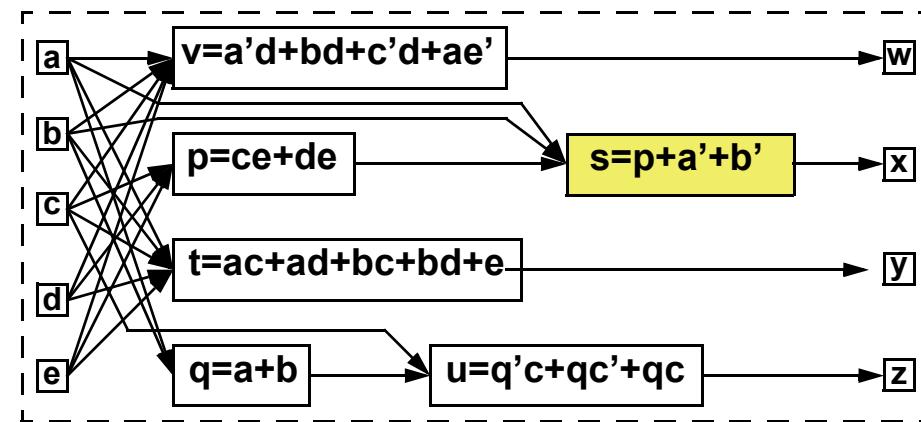
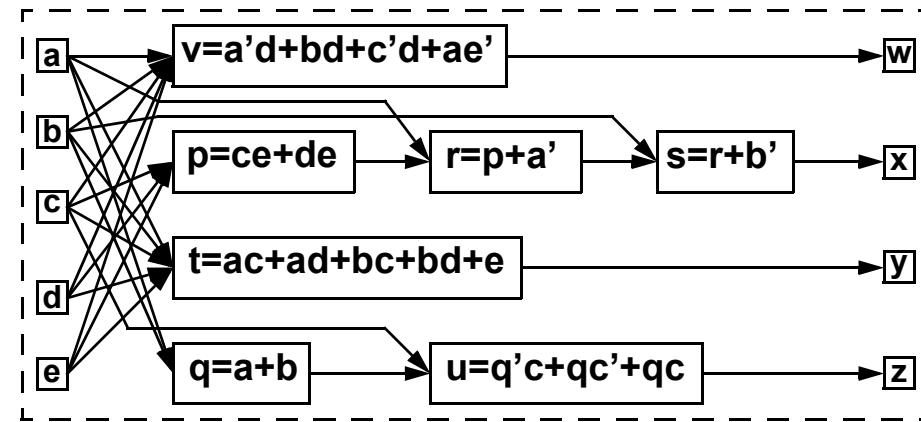
$$z = a + b + c$$





# Eemaldamine – Elimination

- **Eemaldatuse üks funktsioon**
- **Asendatuse vastavad muutujad**
- **Näide**
  - eemaldatuse  $r$   
 $s=r+b'$ ;     $r=p+a'$ ;
  - asendus  $s-s$   
 $s=p+a'+b'$ ;



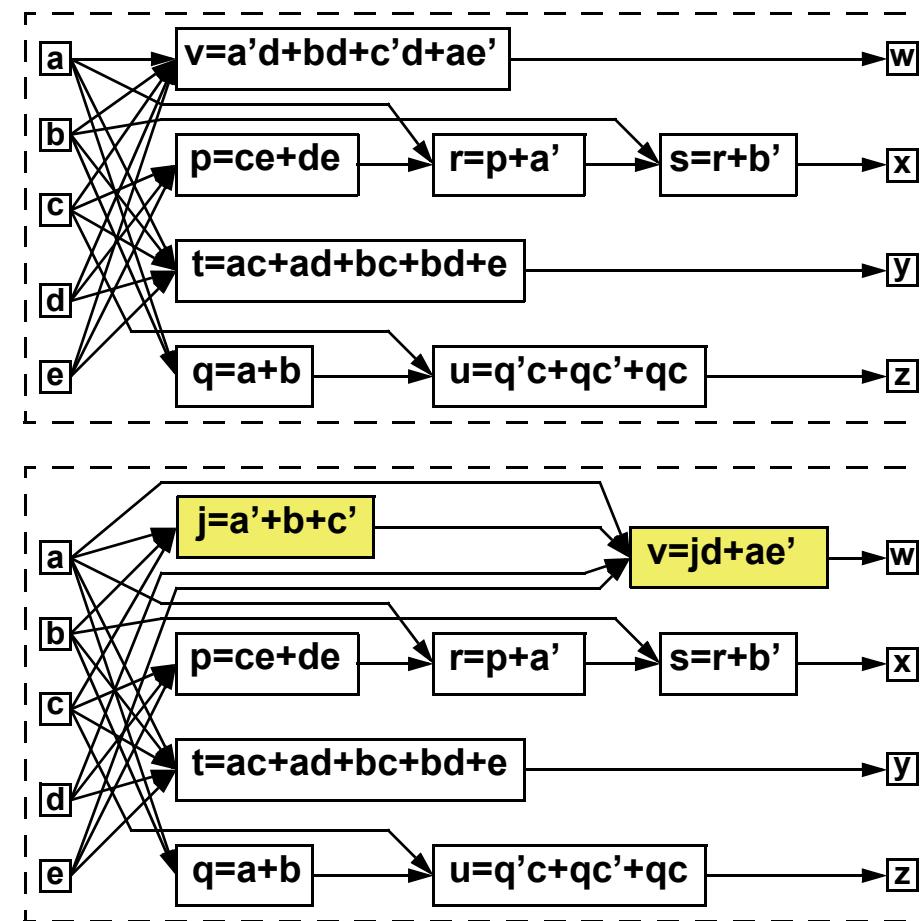


TTÜ1918



# Dekompositsoon – Decomposition

- Üks funktsioon jagatakse väiksemateks funktsioonideks
- Luuakse uus sõlm (uued sõlmed)
- Näide
  - $v$  jagatakse kaheks  
 $v = a' d + bd + c' d + ae'$  ;
  - luuakse  $j$   
 $j = a' + b + c'$  ;     $v = jd + ae'$  ;



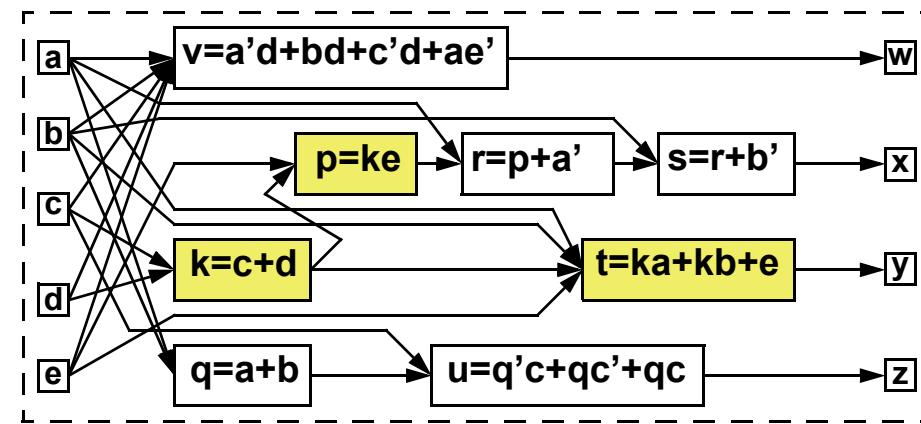
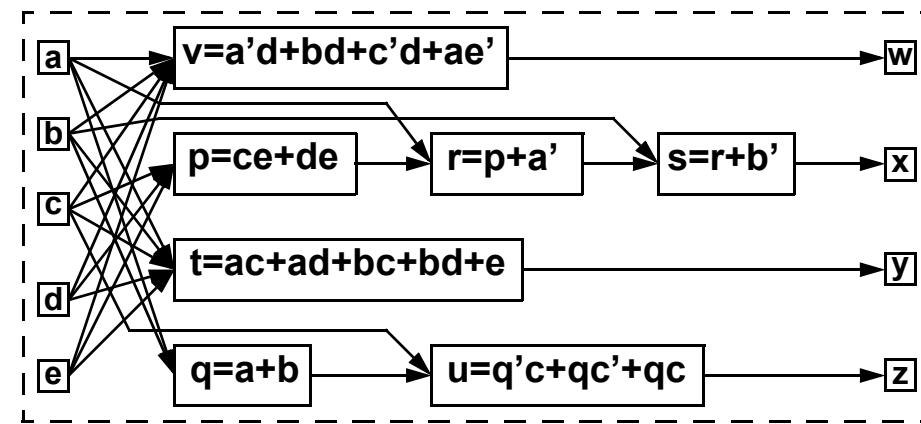


TTÜ 1918



## Eraldamine – Extraction

- Leitakse **ühine alam-avaldis** (common sub-expression) kahele (või enamale) funktsioonile
- Alam-avaldis eraldatakse kui uus funktsioon
- Luuakse uus sõlm
- Näide
  - **p ja t jagavad alam-avaldist**  
 $p=ce+de$ ;    $t=ac+ad+bc+bd+e$ ;  
 $p=(c+d)e$ ;    $t=(c+d)(a+b)+e$ ;
  - luuakse **k**  
 $k=c+d$ ;    $p=ke$ ;    $t=ka+kb+e$ ;



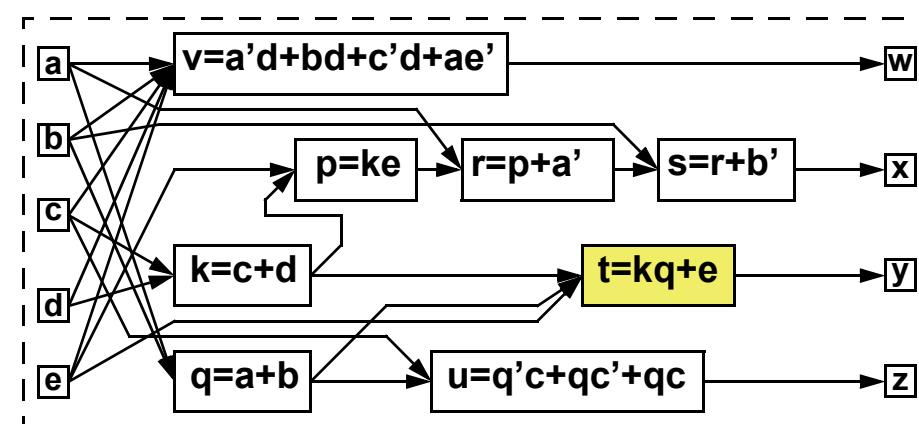
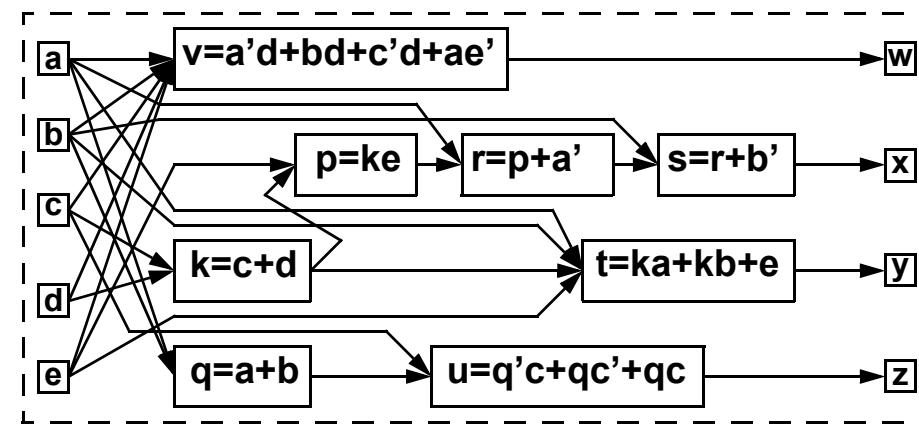


TTÜ 1918



## Asendamine – Substitution

- Lihtsustatakse osa-funktsiooni kasutades *lisa-sisendit*, mida varem selles funktsioonis ei esinenud
- Näide
  - $t$  sisaldb  $q$  kui alam-avaldist
$$t = ka + kb + e ;$$
$$q = a + b ;$$
  - uus  $t$ 
$$t = kq + e ;$$



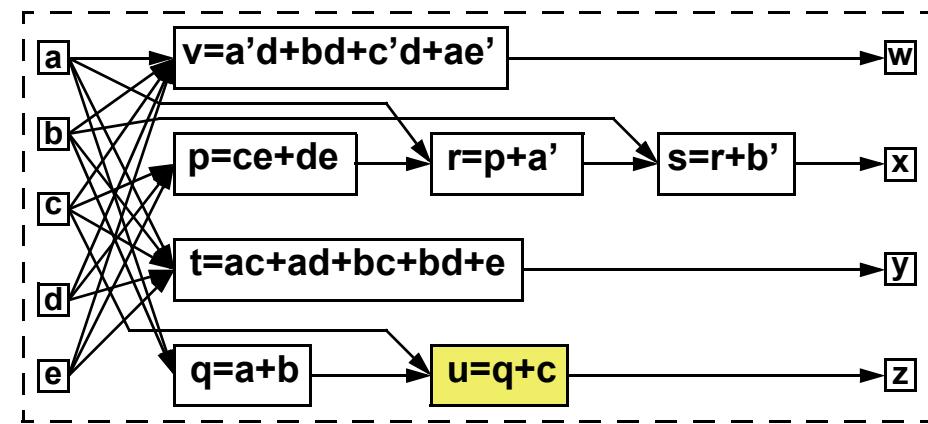
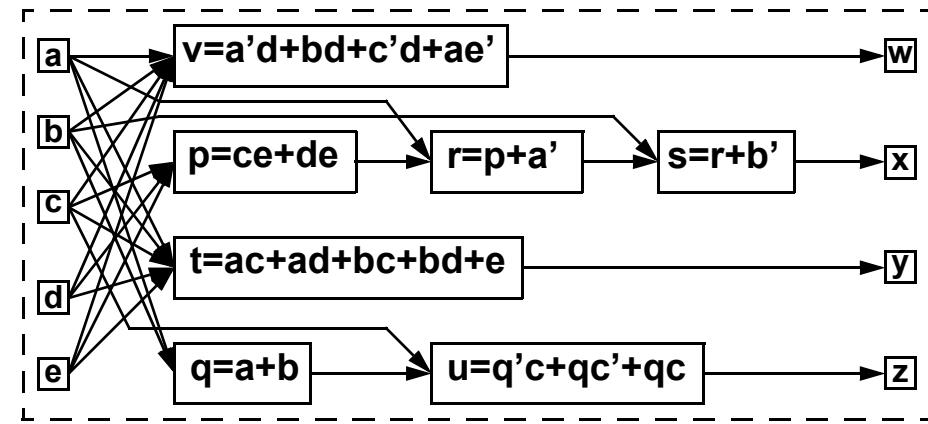


TTÜ1918



# Lihtsustamine – Simplification

- **Lihtsustatakse osa-funktsioon**
- **Näide**
  - lihtsustatakse  $u$   
 $u=q' c+qc' +qc$
  - uus  $u$   
 $u=q+c$





TTÜ1918



## Teisenduste jada – lõplik tulemus

- Lõplik funktsioon

$$j = a' + b + c'$$

$$k = c + d$$

$$q = a + b$$

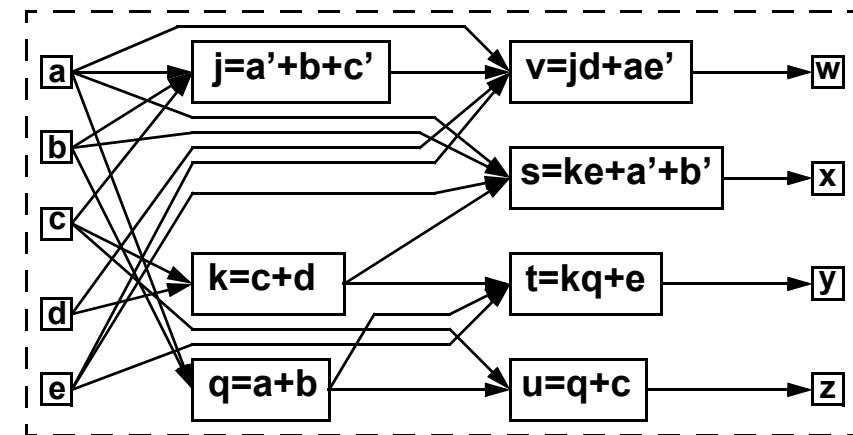
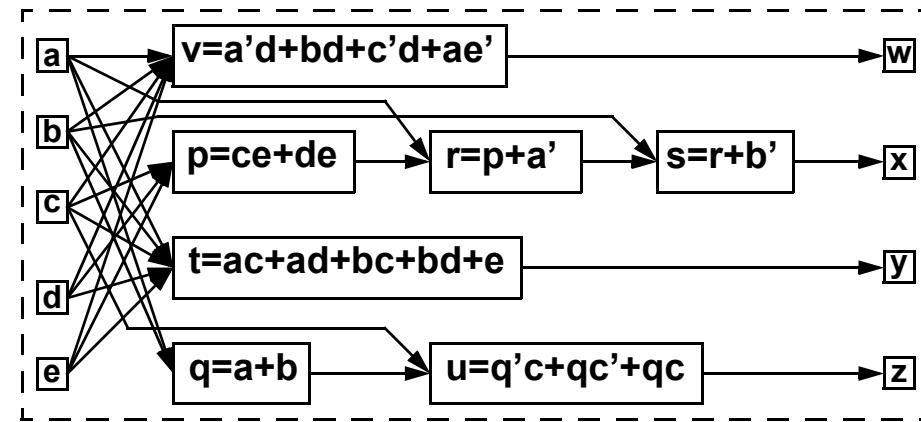
$$s = k \cdot e + a' + b'$$

$$t = q + c$$

$$u = q + c$$

$$v = j \cdot d + a \cdot e'$$

- Funktsioone/loogikalülsid – 7 ja 7
- Literaale – 33 ja 20
- Viide – 3 ja 2 (sõlmi)
- Viide – 9 ja 7 (sõlmi+literaale)





# Teisendused – kõik sammud

- **Lähteülesanne**

$p=ce+de; q=a+b; r=p+a'; s=r+b'; t=ac+ad+bc+bd+e;$   
 $u=q'c+qc'+qc; v=a'd+bd+c'd+ae'; w=v; x=s; y=t; z=u$

- **Eemaldamine – s, r → s**

$p=ce+de; q=a+b; \underline{s=p+a'+b'}; t=ac+ad+bc+bd+e;$   
 $u=q'c+qc'+qc; v=a'd+bd+c'd+ae'; w=v; x=s; y=t; z=u$

- **Dekompositsioon – v → j, v**

$p=ce+de; q=a+b; \underline{s=p+a'+b'}; t=ac+ad+bc+bd+e;$   
 $u=q'c+qc'+qc; \underline{j=a'+b+c'}; \underline{v=jd+ae'}; w=v; x=s; y=t; z=u$

- **Eraldamine – p, t → k, p, t**

$j=a'+b+c'; \underline{k=c+d}; \underline{p=ke}; q=a+b; \underline{s=p+a'+b'}; \underline{t=ka+kb+e};$   
 $u=q'c+qc'+qc; v=jd+ae'; w=v; x=s; y=t; z=u$

- **Asendamine – q, t → q, t**

$j=a'+b+c'; \underline{k=c+d}; \underline{p=ke}; \underline{q=a+b}; \underline{s=p+a'+b'}; \underline{t=kq+e};$   
 $u=q'c+qc'+qc; v=jd+ae'; w=v; x=s; y=t; z=u$

- **Lihtsustamine – u → u**

$j=a'+b+c'; \underline{k=c+d}; \underline{p=ke}; \underline{q=a+b}; \underline{s=p+a'+b'}; \underline{t=kq+e};$   
 $\underline{u=q+c}; v=jd+ae'; w=v; x=s; y=t; z=u$

- **Eemaldamine – s, p → s**

$j=a'+b+c'; \underline{k=c+d}; \underline{q=a+b}; \underline{s=ke+a'+b'}; \underline{t=kq+e};$   
 $u=q+c; v=jd+ae'; w=v; x=s; y=t; z=u$



TTÜ1918



# Optimeerimisviisid

- **Algoritmiline**
  - iga teisenduse tüübi jaoks tuleb määrata algoritm (*operaator*)
    - heuristilised meetodid, nõrk lokaalne optimeerimine
    - ajutine (pinna/viite) ennustuse halvenemin võimalik
  - operaatorite järjekord – skriptipõhine / puhtkogemuslik
  - teisendused – algebraalised ja kahendmeetodid
- **Reeglitel põhinev**
  - andmebaas – mustripaaride hulk
  - mustrite asendused defineeritud reeglite hulgaga
- **Tehnoloogiast sõltuv optimeerimine (technology mapping)**
  - elementide teegid – elemente realiseerib lihtsamat mõne sisendiga funktsiooni
  - programmeeritav loogika – mõne sisendiga suvalised funktsioonid (CLB)

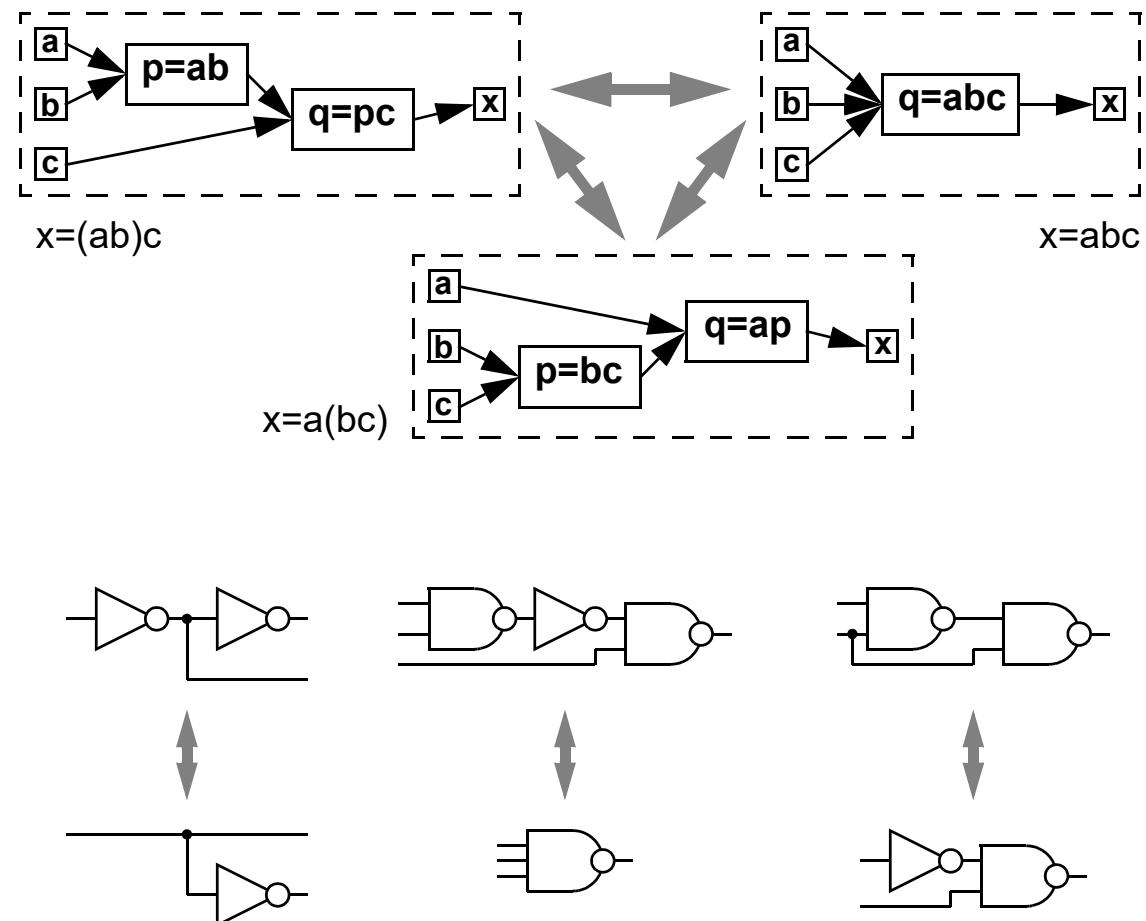


TTÜ1918



## Reeglitel põhinev optimeerimine

- Mustri (pattern) otsimine ja asendamine teisega
- vajadus kanoonilise esitusviisi järelle
- Primitiivsete operatsioonide võrkgraaf
  - mustrite keerukus pole piiratud
- Seotus kasutatava tehnoloogiaga
  - abstrakne tehnoloogia





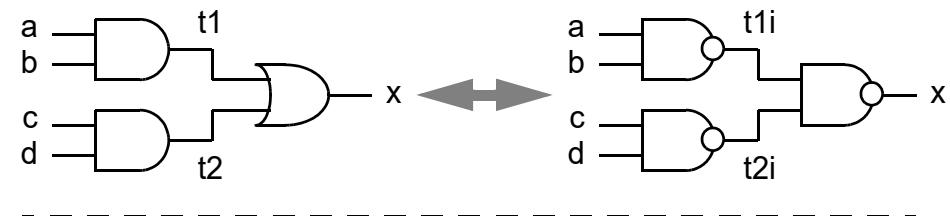
TTÜ1918



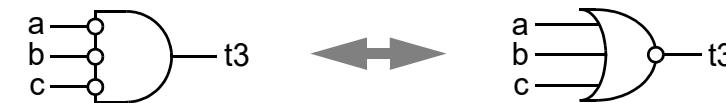
# Reeglitel põhinevad teisendused

## • De Morgan'i seadus

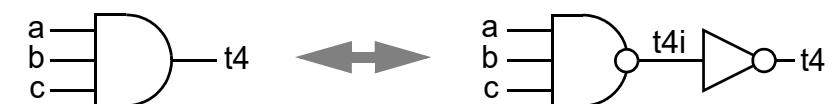
- $t1 = a b ; t2 = c d ; x = t1 + t2 ;$
- $t1' = ( a b )' ; t2' = ( c d )' ; x = ( t1' t2' )' ;$
- $t1i = ( a b )' ; t2i = ( c d )' ; x = ( t1i t2i )' ;$



- $t3 = a' b' c' ;$
- $t3 = ( a + b + c )' ;$



- $t4 = a b c ;$
- $t4i = ( a b c )' ; t4 = t4i' ;$



## • Topelteituse seadus

- $t5i = ( a b )' ; t5 = t5' ;$
- $t5 = a b ;$





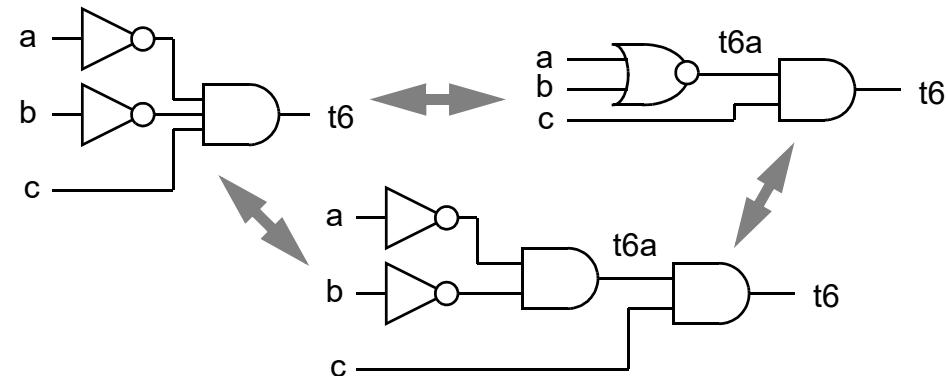
TTÜ 1918



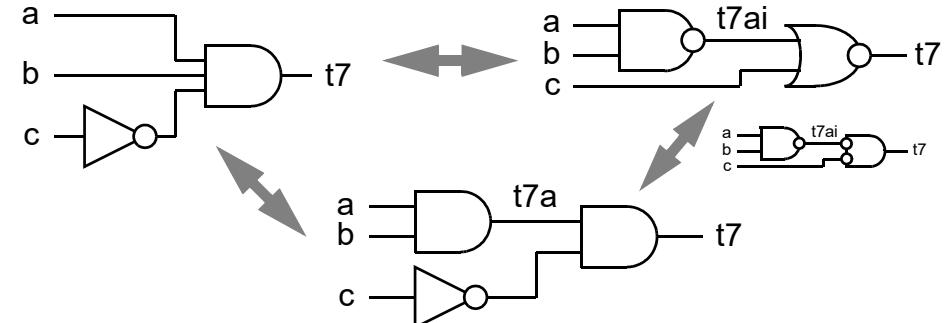
# Reeglitel põhinevad teisendused

- De Morgan'i & topelteituse seadused

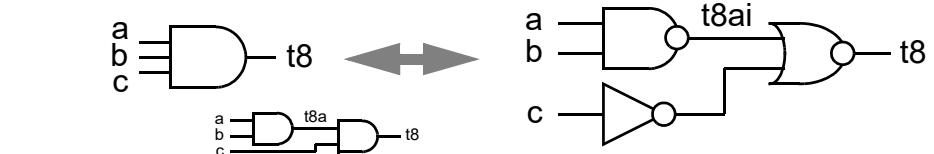
- $t6 = a' b' c'$  ;
- $t6a = a' b'$  ;  $t6 = t6a c$  ;
- $t6a = (a + b)'$  ;  $t6 = t6a c$  ;



- $t7 = a b c'$  ;
- $t7a = a b$  ;  $t7 = t7a c'$  ;
- $[t7ai = (a b)'; t7 = t7ai' c']$  ;
- $t7ai = (a b)'$  ;  $t7 = (t7ai + c)'$  ;



- $t8 = a b c$  ;
- $[t8a = a b$  ;  $t8 = t8a c$  ; ]
- $t8ai = (a b)'$  ;  $t8 = (t8ai + c')'$  ;





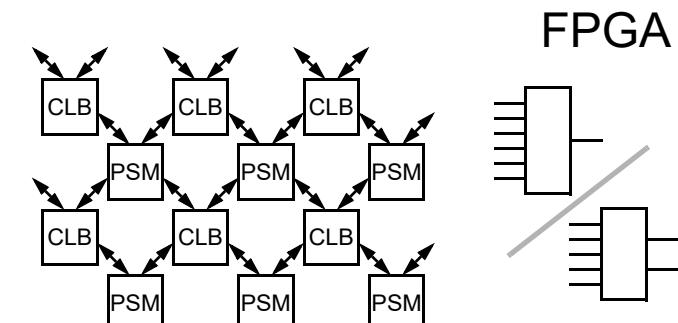
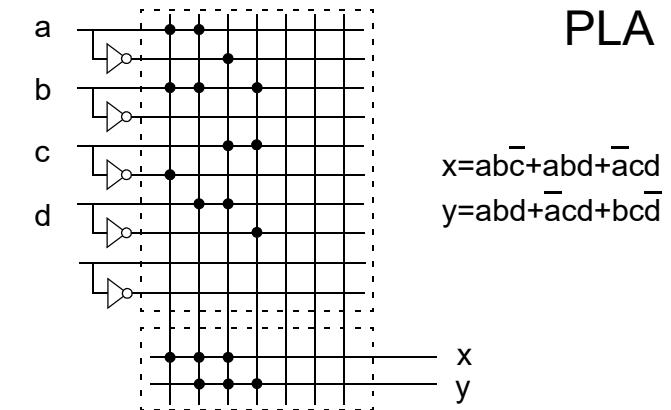
TTÜ 1918



# Erijuhud – programmeeritav loogika

## PLD – Programmable Logic Device

- **PLA – Programmable Logic Array**
  - Programmeeritavad loogikamaatriksid (ja ühendused)
  - Loogikamaatriks
    - mitme sisendiga ja mitme väljundiga loogika-funktsioonide süsteem, implikantide arv piiratud
  - Tükeldamine vastava suurusega funktsioonideks
- **FPGA – Field Programmable Gate Array**
  - väliprogrammeeritav loogika (ka korduvprogr. loogika)
  - Programmeeritavad loogikaplokid (CLB)
    - ... ja programmeeritavad ühendused (PSM)
  - **Xilinx – Spartan, Artix, Kintex & Virtex seeriad**
    - CLB – neli 6->1 / 5->2 funktsiooni
  - Tükeldamine 5- või 6-sisendiga funktsioonideks





TTÜ1918



# Funktsioonide teisendused – kahendmeetodid

- Loogikafunktsioonide omaduste kasutamine
- Võimalik kasutada osaliselt määratust (don't-care)
- Aegajalt (liigagi) keeruline
- Kahendasendus (boolean substitution)
  - lähtefunktsioonid  
 $h=a+bcd+e$ ;  $q=a+cd$
  - tulemus  
 $h=a+bq+e$
  - sest  
 $a+bq+e = a+b(a+cd) + e = a+bcd+e$        $[a+b(a+cd) + e = a+\underline{ab}+bcd+e = a+bcd+e]$
  - või hoopis?!  
 $h=a+bcd+e$ ;  $q=cd+e$        $\rightarrow$        $h=a+bq+e$   
 $a+bq+e = a+b(cd+e) + e = a+bcd+e$        $[a+b(cd+e) + e = a+\underline{bcd+be}+e = a+bcd+e]$



TTÜ1918



# Funktsioonide teisendused – algebralise meetodid

- Funktsioone vaadeldakse kui *polünoome*
- Kasutatakse polünoomide algebra omadusi
- Lihtsam, kiirem, kui nõrgem optimeerimisvõime
- **Algebrailine asendus (algebraic substitution)**
  - lähtefunktsioon  
 $t=ka+kb+e$
  - tulemus  
 $t=kq+e$
  - sest  
 $q=a+b$



TTÜ1918



## Algebraised meetodid

- **Polünoom (polynomial)** – korrutiste summa
- **Monoom (monomial), üksliige** – üksik korrutis e. kuup (e. implikant)
- **Ainult distributiivsuse seadus kasutusel**
  - $a(b+c)=ab+ac$ , kuid  $a+bc \neq (a+b)(a+c)$
- **Täiendid pole defineeritud**
  - muutuja täiendit vaadeldakse kui lisa muutujat
- **Määramatused pole defineeritud**
- **Operatsioonid ainult avaldistega, mille muutujate hulgad ei kattu**
- **Liiaste kuupide eemaldamine pole võimalik**
  - $(a+b)$  ja  $(c+d) \rightarrow (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$  OK!
  - $(a+b)$  ja  $(a+c) \rightarrow (a+b)(a+c)=aa+ac+ba+bc \neq a+bc$  ei
  - $(a+b)$  ja  $(\bar{a}+c) \rightarrow (a+b)(\bar{a}+c)=\bar{a}a+ac+\bar{b}a+bc \neq ac+\bar{b}a$  ei



TTÜ1918



## Algebraaline jagatis

- Kaks algebraalist avaldist
- *jagatav* (dividend), *jagaja* (divisor), *jagatis* (quotient), *jääk* (remainder)
- $f_{jagatis} = f_{jagatav} / f_{jagaja}$ , kui
- $f_{jagatav} = f_{jagaja} \cdot f_{jagatis} + f_{jääk}$
- $f_{jagaja} \cdot f_{jagatis} \neq \emptyset$
- ning  $f_{jagaja}$  ja  $f_{jagatis}$  muutujate hulgad ei kattu ( $\text{sup}(f_{jagaja}) \cap \text{sup}(f_{jagatis}) = \emptyset$ )
- $f_{jagatav} = ac + ad + bc + bd + e$  &  $f_{jagaja} = a + b$
- $f_{jagatis} = c + d$  &  $f_{jääk} = e$
- $(a+b)(c+d)+e=f_{jagatav}$  &  $\{a,b\} \cap \{c,d\} = \emptyset$
- **Mitte-algebraaline jagatis** –  $f_i = a + bc$  &  $f_j = a + b$ 
  - $(a+b)(a+c)=f_i$  kuid  $\{a,b\} \cap \{a,c\} \neq \emptyset$



## Jagamisalgoritm

- $A = \{ C_j^A, j=1,2,\dots,l\}$  – jagatava kuupide hulk
- $B = \{ C_i^B, i=1,2,\dots,n\}$  – jagaja kuupide hulk
- Jagatis Q ja jääl R on kuupide summad

```
ALGEBRAIC_DIVISION (A,B) {
    for (i=1 to n) {
        D={C_j^A such that C_j^A ⊇ C_i^B};
        if (D==∅) return (∅,A);
        D_i=D with var. in sup(C_i^B) dropped;
        if (i==1) Q=D_i; else Q=Q∩D_i;
    }
    R=A-QxB;
    return (Q,R);
}
```



TTÜ1918



## Jagamine – näide #1

- $f_{\text{jagatav}} = ac + ad + bc + bd + e \quad \& \quad f_{\text{jagaja}} = a + b$
- $A = \{ac, ad, bc, bd, e\} \quad \& \quad B = \{a, b\}$
- $i = 1$ 
  - $C_1^B = a, \quad D = \{ac, ad\} \quad \& \quad D_1 = \{c, d\}$
  - $Q = \{c, d\}$
- $i = 2$ 
  - $C_2^B = b, \quad D = \{bc, bd\} \quad \& \quad D_2 = \{c, d\}$
  - $Q = \{c, d\} \cap \{c, d\} = \{c, d\} \quad \text{-- kuup vastab elemendile!}$
- **Tulemus**
  - $Q = \{c, d\} \quad \& \quad R = \{e\}$
  - $f_{\text{jagatis}} = c + d \quad \& \quad f_{\text{jääk}} = e$



TTÜ1918



## Jagamine – näide #2

- $f_{\text{jagatav}} = axc + axd + bc + bxd + e \quad \& \quad f_{\text{jagaja}} = ax + b$
- $A = \{axc, axd, bc, bxd, e\} \quad \& \quad B = \{ax, b\}$
- $i = 1$ 
  - $C_1^B = ax, \quad D = \{axc, axd\} \quad \& \quad D_1 = \{c, d\}$
  - $Q = \{c, d\}$
- $i = 2$ 
  - $C_2^B = b, \quad D = \{bc, bxd\} \quad \& \quad D_2 = \{c, xd\}$
  - $Q = \{c, d\} \cap \{c, xd\} = \{c\} \quad \text{-- kuup vastab elemendile!}$
- **Tulemus**
  - $Q = \{c\} \quad \& \quad R = \{axd, bxd, e\}$
  - $f_{\text{jagatis}} = c \quad \& \quad f_{\text{jääk}} = axd + bxd + e$



TTÜ1918



## Jagamine – mis siis ikkagi toimub?

- $A = ac + ad + bc + bd + e \quad \& \quad B = a + b$ 
  - (1)  $\underline{a} (\underline{c+d}) + bc + bd + e$
  - (2)  $a (\underline{c+d}) + \underline{b} (\underline{c+d}) + e \rightarrow (\underline{c+d}) \cap (\underline{c+d}) = (\underline{c+d})$
  - (R)  $[ ac+ad+bc+bd+e ] - [ (a+b) (\underline{c+d}) ] =$   
 $= [ ac+ad+bc+bd+e ] - [ ac+ad+bc+bd ] = [ e ]$
  - $\textcolor{blue}{ac+ad+bc+bd+e} = \textcolor{blue}{a(\underline{c+d})+\underline{b(c+d)}}+e = (\underline{c+d})(a+b)+e$
  
- $A = axc + axd + bc + bxd + e \quad \& \quad B = ax + b$ 
  - (1)  $\underline{ax} (\underline{c+d}) + bc + bxd + e$
  - (2)  $ax (\underline{c+d}) + \underline{b} (\underline{c+xd}) + e \rightarrow (\underline{c+d}) \cap (\underline{c+xd}) = (\underline{c})$
  - (R)  $[ axc+axd+bc+bxd+e ] - [ (ax+b) (\underline{c}) ] =$   
 $= [ axc+axd+bc+bxd+e ] - [ axc+bc ] = [ axd+bxd+e ]$
  - $\textcolor{blue}{axc+axd+bc+bxd+e} = \textcolor{blue}{ax(\underline{c+d})+\underline{b(c+xd)}}+e = \textcolor{blue}{ax(\underline{c})+\underline{b(c)}}+axd+bxd+e = c(ax+b)+axd+bxd+e$



TTÜ1918



## Jagatise eksisteerimine?

- **Teoreem**
- **Antud kaks algebralist avaldist  $f_i$  ja  $f_j$**
- **$f_i / f_j$  on tühi, kui üks järgnevaist tingimustest on täidetud:**
  - **$f_j$  sisaldab muutujat, mida pole  $f_i$ -s;**
  - **$f_j$  sisaldab kuupi, mille tugimuutujad ei sisaldu üheski  $f_i$  kuubi tugimuutujate hulgas ( $\exists \sup(C^j) \not\subset \sup(C^i)$ ,  $\forall C^i \in f_i$ );**
  - **$f_j$  sisaldab rohkem liikemid kui  $f_i$ ;**
  - **suvalist muutujat on  $f_j$ -s rohkem kui  $f_i$ -s.**
- **Kasutusel kiireks kontrolliks**
- **jagatist ei pruugi ikkagi eksisteerida –  $ac + be / a + b$**



# Jagatise eksisteerimine?

- Antud kaks algebralist avaldist  $f_i$  ja  $f_j$
  - $f_i / f_j$  on tühi, kui üks järgnevaist tingimustest on täidetud:
    - $f_j$  sisaldab muutujat, mida pole  $f_i$ -s;
 
$$ab + cd \quad / \quad a + e \qquad \qquad \qquad a(b) + e(?) + cd$$
    - $f_j$  sisaldab kuupi, mille tugimuutujad ei sisaldu üheski  $f_i$  kuubi tugimuutujate hulgas ( $\exists \sup(C^j) \not\subset \sup(C^i), \forall C^i \in f_i$ );
 
$$abc + def \quad / \quad ab + ad \qquad \qquad \qquad ab(c) + ad(?) + def$$
    - $f_j$  sisaldab rohkem liikemid kui  $f_i$ ;
 
$$ab + cd \quad / \quad a + b + c \qquad \qquad \qquad a(b) + b(?) + c(d)$$
    - suvalist muutujat on  $f_j$ -s rohkem kui  $f_i$ -s.
 
$$abc + ade + bcd \quad / \quad ab + ad + ac \qquad \qquad \qquad ab(c) + ad(e) + ac(?)$$
  - Osaline kattumine?  $ab + ac + bc / a + b = ?$   $ab + ac + bc = ab + (a+b)c$

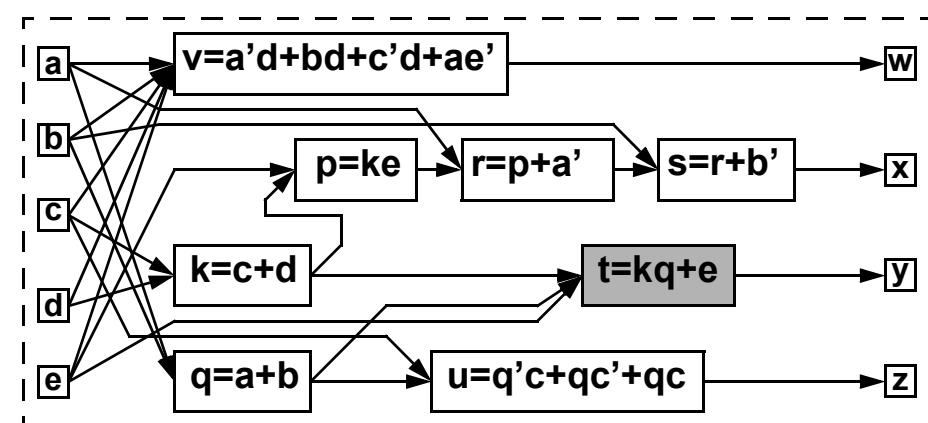
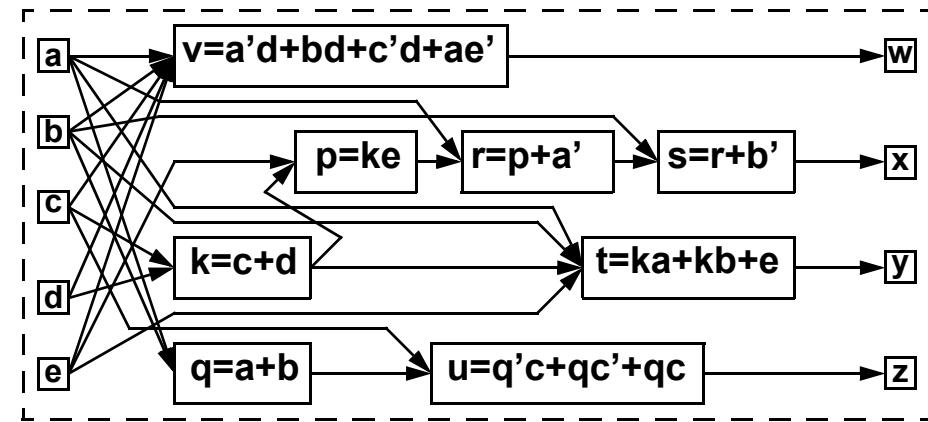


TTÜ 1918



# Asendamine

- Vaadeldakse avaldiste paare
- Jagamine suvalises järjekorras
- Kui jagatis pole tühi, siis:
  - ennustatakse pindala/viite muutust
  - $f_{\text{jagatav}}$  asemele tuleb  $f_{\text{jagaja}} \cdot f_{\text{jagatis}} + f_{\text{jääk}}$
  - $f_t = ka + kb + e$  ( $f_{\text{jagatav}}$ )
  - $f_q = a + b$  ( $f_{\text{jagaja}}$ )
  - $f_{\text{jagatis}} = k$  &  $f_{\text{jääk}} = e$
  - $f_t = kq + e$





TTÜ1918



## Eraldamine

- **Ühiste alam-avaldiste otsimine**
  - üksik kuup (monoom) / mitmik-kuup (*tuum* e. *kernel*)
- **Sobivate jagajate leidmine**
- **Kuubivaba (cube-free) avaldis**
  - pole võimalik faktoriseerida kuupi kasutades
    - ehk siis, mitte ühtegi muutujat ei saa sulgude ette tuua
- **Avaldise *tuum***
  - avaldise kuubivaba jagatis, kui jagaja on kuup (*kaas-tuum* e. *co-kernel*))
- **Avaldise *tuumade hulk K(f)***
  - kahe (või enama) avaldise ühine mitmik-kuup jagaja – tuumade hulkade ühisosa
- **Tuumade leidmine**
  - naiivne – üritatakse leida jagatised muutujate kombinatsioonidele
  - rekursioon – tuumade tuumad on samuti tuumad



TTÜ1918



## Tuumad – näide

- $f_x = ace + bce + de + g$ 
  - $f_x / a \rightarrow ce \rightarrow \text{ei ole kuubivaba}$
  - $f_x / b \rightarrow ce \rightarrow \text{ei ole kuubivaba}$
  - $f_x / c \rightarrow ae + be \rightarrow \text{ei ole kuubivaba}$
  - $f_x / ce \rightarrow a + b \rightarrow \text{kuubivaba} \rightarrow \text{tuum}$
  - $f_x / d \rightarrow e \rightarrow \text{ei ole kuubivaba}$
  - $f_x / e \rightarrow ac+bc+d \rightarrow \text{kuubivaba} \rightarrow \text{tuum}$
  - $f_x / g \rightarrow 1 \rightarrow \text{ei ole kuubivaba}$
  - $f_x / 1 \rightarrow ace+bce+de+g \rightarrow \text{kuubivaba} \rightarrow \text{tuum}$
- $K(f_x) = \{ (a+b), (ac+bc+d), (ace+bce+de+g) \}$



TTÜ1918



## Eraldamine – näide

- $f_x = ace + bce + de + g$
- $f_y = ad + bd + cde + ge$
- $f_z = abc$
- $K(f_x) = \{ (a+b), (ac+bc+d), (ace+bce+de+g) \}$
- $K(f_y) = \{ (a+b+ce), (cd+g), (ad+bd+cde+ge) \}$
- $K(f_z) = \{ \} \quad$
- $f_w = a+b$
- $f_x = wce + de + g$
- $f_y = wd + cde + ge$
- $f_z = abc$



TTÜ1918



## Dekompositsioon

- $f_x = ace + bce + de + g;$
- $f_t = ac + bc + d; \quad f_x = te + g;$
- $f_s = a + b; \quad f_t = sc + d; \quad f_x = te + g;$
- **Tuumadel põhinev dekompositsioon**
  - **avaldist jagatakse rekursiivselt**
    - $f_x = ace + bce + de + g$
    - $K(f_x) = \{ (a+b), (\underline{ac+bc+d}), (ace+bce+de+g) \}$
    - $f_t = ac + bc + d; \quad f_x = te + g;$
    - $K(f_t) = \{ (\underline{a+b}), (ac+bc+d) \}$
    - $f_s = a + b; \quad f_t = sc + d; \quad f_x = te + g;$



TTÜ1918



## Viite mudel & viite minimeerimine

- Sünteesi tulemuse kontroll
  - viide on nõutavast väiksem ja sisend/väljund signaalide ajastus on korrektne
- Viite mudel
  - sõltub loogikalülide (alamavaldiste) viite mudelitest
  - topoloogilised mudelid (funktionaalsuse arvestamisega või ilma)
- Minimeerimine
  - vähima pindala puhul peab viide jääma etteantud piiridesse
  - viite minimeerimisel peab pindala jääma etteantud piiridesse
  - teisendused elementidel, mis asuvad kriitilisel teel (kriitilistel teedel)
  - pea-aegu kriitilised teed – teed, mille viide on lähedane kriitilisega
- Topoloogiline kriitiline tee (topological critical path)
  - tee maksimaalse viitega / tee minimaalse sobivusega
  - väär kriitiline tee – signaali muutus ei levi mööda vastavat teed



TTÜ1918



## Viite arvutamine

- **Loogikaelemendi (alamavaldis) viite mudel**
  - virtuaalsed loogikalülid – loogika-avaldised
  - lihtsaim mudel – ühikviide sõlme kohta
  - täpsustatud mudelid – sõltuvad koormatusest (fanout) ja/või avaldise keerukusest
- **Andmete valmisoleku-ajad (data-ready time) -  $t_i$** 
  - sisenditest väljundite suunas arvutamine
    - millal andmed/signaalid kohale jõuavad, nt. hilistumine eelnevates moodulites
  - $t_i = d_i + \max_{j|(j,i) \in E} t_j$
- **Nõutud andmete valmisoleku-ajad (required data-ready time) -  $\bar{t}_i$** 
  - väljunditest sisendite suunas arvutamine
    - millal andmed/signaalid peavad valmis olema, nt. taktiperioodi piirang
  - $\bar{t}_i = \min_{j|(i,j) \in E} (\bar{t}_j - d_j)$
- **Sobivus (lõtvus, slack) –  $s_i = \bar{t}_i - t_i$**
- erinevus nõutud ja tegelike andmete valmisoleku-aegade vahel

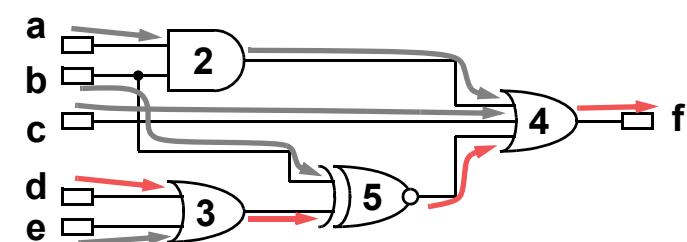


TTÜ1918



## Viite arvutamine – andmete valmisoleku-ajad

- $t_i = d_i + \max_{j|(j,i) \in E} t_j$
- sisendid → väljundid
  - $t_a=t_b=t_e=0; t_c=5; t_d=1;$
  - $t_2 = \max(t_a, t_b) + d_2 = \max(0,0) + 2 = 2$
  - $t_3 = \max(t_d, t_e) + d_3 = \max(1,0) + 3 = 4$
  - $t_5 = \max(t_b, t_3) + d_5 = \max(0,4) + 5 = 9$
  - $t_4 = \max(t_2, t_c, t_5) + d_4 = \max(2,5,9) + 4 = 13$
  - $t_f = \max(t_4) + d_f = \max(13) + 0 = 13$
- Suurim viide – 13



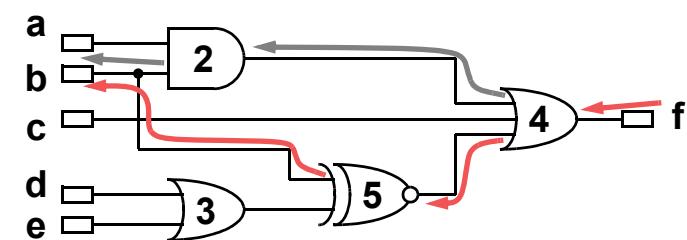


TTÜ 1918



## Viite arvutamine – andmete nõutavad valmisseoleku-ajad

- $\bar{t}_i = \min_{j|(i,j) \in E} (\bar{t}_j - d_j)$
- väljundid → sisendid
  - $t_a = t_b = t_e = 0; t_c = 5; t_d = 1; \bar{t}_f = 15;$
  - $\bar{t}_4 = \min(\bar{t}_f - d_f) = \min(15-0) = 15$
  - $\bar{t}_5, \bar{t}_2 = \min(\bar{t}_4 - d_4) = \min(15-4) = 11$
  - $\bar{t}_3 = \min(\bar{t}_5 - d_5) = \min(11-5) = 6$
  - $\bar{t}_a = \min(\bar{t}_2 - d_2) = \min(11-2) = 9$
  - $\bar{t}_b = \min(\bar{t}_2 - d_2, \bar{t}_5 - d_5) = \min(11-2, 11-5) = 6$
  - $\bar{t}_c = \min(\bar{t}_4 - d_4) = \min(15-4) = 11$
  - $\bar{t}_d, \bar{t}_e = \min(\bar{t}_3 - d_3) = \min(6-3) = 3$





TTÜ1918



## Viite arvutamine – sobivus ja kriitiline tee

- **Sobivus (slack) –  $s_i = \bar{t}_i - t_i$**

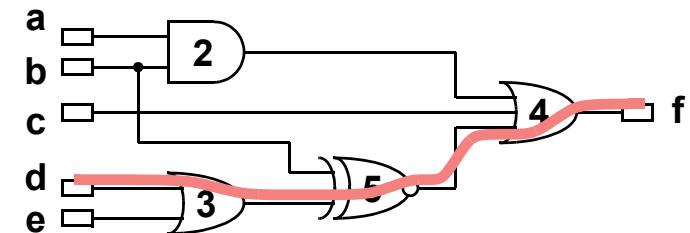
$$s_a = \bar{t}_a - t_a = 9 - 0 = 9$$

$$s_b = \bar{t}_b - t_b = 6 - 0 = 6$$

$$s_c = \bar{t}_c - t_c = 11 - 5 = 6$$

$$s_d = \bar{t}_d - t_d = 3 - 1 = 2$$

$$s_e = \bar{t}_e - t_e = 3 - 0 = 3$$



sõlm	a	b	c	d	e	2	3	5	4	f
$t_x$	0	0	5	1	0	2	4	9	13	13
$\bar{t}_x$	9	6	11	3	3	11	6	11	15	15
$s_x$	9	6	6	2	3	7	2	2	2	2

- **Kriitiline tee – tee väikseima sobivusega**



TTÜ1918



## Viite arvutamine & kodutöö #1

- Ainult andmete valmisseolekuajad
  - Sisendite valmisseolekuajad on 0, puuduvad nõutud valmisseolekuajad väljunditel

$x1i = x1'$  [1.5/1.5] 1.5

$x3i = x3'$  [1.5/1.5] 1.5

$t1 = t4 \& x1i \& x3i$  [2.5/2.5] 4.5

$t4 = x2 \& x4$  [2.0/2.0] 2.0

$y2 = (t1 + t8 + t9)'$  [2.0/2.0] 6.5

$$t_{x1}=t_{x2}=t_{x3}=t_{x4}=0$$

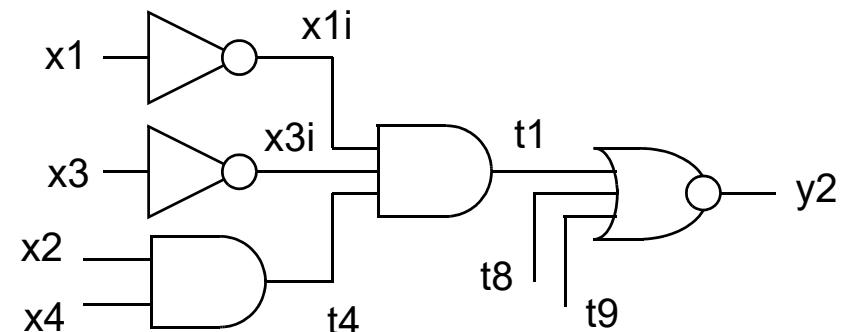
$$t_{x1i}=\max(t_{x1})+d_{inv}=0+1,5=1,5$$

$$t_{x3i}=\max(t_{x3})+d_{inv}=0+1,5=1,5$$

$$t_{t4}=\max(t_{x2};t_{x4})+d_{2and}=\max(0;0)+2,0=2,0$$

$$t_{t1}=\max(t_{x1i};t_{x3i};t_{t4})+d_{3and}=\max(1,5;1,5;2,0)+2,5=4,5$$

$$t_{y2}=\max(t_{t1};t_{t8};t_{t9})+d_{3nor}=\max(4,5;4,0;2,0)+2,0=6,5$$





TTÜ 1918



## Viite arvutamine – näited

**ai = a'**  
**bi = b'**  
**ci = c'**  
**di = d'**  
**t1 = ai bi d**  
**t2 = a b c**  
**t3 = bi ci**  
**t4 = b d**  
**t5 = a ci d**  
**t6 = b ci**  
**t7 = ai c di**  
**k1 = t1+t2**  
**k = k1+t3+t4**  
**l = k1+t5+t6**  
**m1 = t7+t6**  
**m = k1+m1**  
**n1 = t5+t4+t2**  
**n = m1+n1**

$t_{ai} = \max(0) + 1.5 = 1.5$   
 $t_{bi} = \max(0) + 1.5 = 1.5$   
 $t_{ci} = \max(0) + 1.5 = 1.5$   
 $t_{di} = \max(0) + 1.5 = 1.5$   
 $t_{t1} = \max(1.5, 1.5, 0) + 2.5 = 4.0$   
 $t_{t2} = \max(0, 0, 0) + 2.5 = 2.5$   
 $t_{t3} = \max(1.5, 1.5) + 2.0 = 3.5$   
 $t_{t4} = \max(0, 0) + 2.0 = 2.0$   
 $t_{t5} = \max(0, 1.5, 0) + 2.5 = 4.0$   
 $t_{t6} = \max(0, 1.5) + 2.0 = 3.5$   
 $t_{t7} = \max(1.5, 0, 1.5) + 2.5 = 4.0$   
 $t_{k1} = \max(4.0, 2.5) + 2.0 = 6.0$   
 $t_k = \max(6.0, 3.5, 2.0) + 2.5 = 8.5$   
 $t_l = \max(6.0, 4.0, 3.5) + 2.5 = 8.5$   
 $t_{m1} = \max(4.0, 3.5) + 2.0 = 6.0$   
 $t_m = \max(6.0, 6.0) + 2.0 = 8.0$   
 $t_{n1} = \max(4.0, 2.0, 2.5) + 2.5 = 6.5$   
 $t_n = \max(6.0, 6.5) + 2.0 = 8.5$

4 NOT, 3\*2-AND, 4\*3-AND, 4\*2-OR, 3\*3-OR  
literaale:  $4+18+17=39$   
eq.gates:  $4*1.5+3*2.0+4*2.5+4*2.0+3*2.5=37.5$   
maks.viide: 8.5, kr.tee nt.  $a-ai-t1-k1-k$  või  $c-ci-t5-n1-n$

**ai = a'**  
**bi = b'**  
**ci = c'**  
**di = d'**  
**t1 = a+ci**  
**t2 = bi ci**  
**t3 = b d**  
**t4 = ai bi d**  
**t5 = a b c**  
**t6 = t1 b**  
**t7 = a ci d**  
**t8 = ai c di**  
**k1 = t2+t3**  
**k = k1+t4+t5**  
**l = t6+t7+t4**  
**m = t6+t8+t4**  
**n1 = t6+t3**  
**n = n1+t8+t7**

$t_{ai} = \max(0) + 1.5 = 1.5$   
 $t_{bi} = \max(0) + 1.5 = 1.5$   
 $t_{ci} = \max(0) + 1.5 = 1.5$   
 $t_{di} = \max(0) + 1.5 = 1.5$   
 $t_{t1} = \max(0, 1.5) + 2.0 = 3.5$   
 $t_{t2} = \max(1.5, 1.5) + 2.0 = 3.5$   
 $t_{t3} = \max(0, 0) + 2.0 = 2.0$   
 $t_{t4} = \max(1.5, 1.5, 0) + 2.5 = 4.0$   
 $t_{t5} = \max(0, 0, 0) + 2.5 = 2.5$   
 $t_{t6} = \max(3.5, 0) + 2.0 = 5.5$   
 $t_{t7} = \max(0, 1.5, 0) + 2.5 = 4.0$   
 $t_{t8} = \max(1.5, 0, 1.5) + 2.5 = 4.0$   
 $t_{k1} = \max(3.5, 2.0) + 2.0 = 5.5$   
 $t_k = \max(5.5, 4.0, 2.5) + 2.5 = 8.0$   
 $t_l = \max(5.5, 4.0, 4.0) + 2.5 = 8.0$   
 $t_m = \max(5.5, 4.0, 4.0) + 2.5 = 8.0$   
 $t_{n1} = \max(5.5, 2.0) + 2.0 = 7.5$   
 $t_n = \max(7.5, 4.0, 4.0) + 2.5 = 10.0$

4\*NOT, 3\*2-AND, 4\*3-AND, 3\*2-OR, 4\*3-OR  
literaale:  $4+18+18=40$   
eq.gates:  $4*1.5+3*2.0+4*2.5+3*2.0+4*2.5=38.0$   
maks.viide: 10.0, kr.tee  $c-ci-t1-t6-n1-n$



TTÜ 1918



## Viite arvutamine – näited

$ai = a'$	$t_{ai} = \max(0) + 1.5 = 1.5$
$bi = b'$	$t_{bi} = \max(0) + 1.5 = 1.5$
$ci = c'$	$t_{ci} = \max(0) + 1.5 = 1.5$
$di = d'$	$t_{di} = \max(0) + 1.5 = 1.5$
$t1 = b \cdot ci$	$t_{t1} = \max(0, 1.5) + 2.0 = 3.5$
$t2 = ai \cdot di$	$t_{t2} = \max(1.5, 1.5) + 2.0 = 3.5$
$t3 = a \cdot bi \cdot c$	$t_{t3} = \max(0, 1.5, 0) + 2.5 = 4.0$
$t4 = bi \cdot ci \cdot di$	$t_{t4} = \max(1.5, 1.5, 1.5) + 2.5 = 4.0$
$t5 = ai \cdot b \cdot d$	$t_{t5} = \max(1.5, 0, 0) + 2.5 = 4.0$
$t6 = ai \cdot ci$	$t_{t6} = \max(1.5, 1.5) + 2.0 = 3.5$
$ki = t1+t2+t3$	$t_{ki} = \max(3.5, 3.5, 4.0) + 2.5 = 6.5$
$li = t2+t4+t3$	$t_{li} = \max(3.5, 4.0, 4.0) + 2.5 = 6.5$
$mi = t5+t4+t3$	$t_{mi} = \max(4.0, 4.0, 4.0) + 2.5 = 6.5$
$ni = t6+t4+t3$	$t_{ni} = \max(3.5, 4.0, 4.0) + 2.5 = 6.5$
$k = ki'$	$t_k = \max(6.5) + 1.5 = 8.0$
$l = li'$	$t_l = \max(6.5) + 1.5 = 8.0$
$m = mi'$	$t_m = \max(6.5) + 1.5 = 8.0$
$n = ni'$	$t_n = \max(6.5) + 1.5 = 8.0$

8 NOT, 3\*2-AND, 3\*3-AND, 4\*3-OR

literaale:  $8+15+12=35$ eq.gates:  $8*1.5+3*2.0+3*2.5+4*2.5=35.5$ maks.viide: 8.0, kr.tee nt.  $a \cdot ai \cdot t6 \cdot ki \cdot k$  või  $c \cdot ci \cdot t4 \cdot ni \cdot n$ 

$ai = a'$	$t_{ai} = \max(0) + 1.5 = 1.5$
$bi = b'$	$t_{bi} = \max(0) + 1.5 = 1.5$
$ci = c'$	$t_{ci} = \max(0) + 1.5 = 1.5$
$di = d'$	$t_{di} = \max(0) + 1.5 = 1.5$
$t1 = (bi+c)'$	$t_{t1} = \max(1.5, 0) + 1.5 = 3.0$
$t2 = (a+d)'$	$t_{t2} = \max(0, 0) + 1.5 = 1.5$
$t3 = (ai+b+ci)'$	$t_{t3} = \max(1.5, 0, 1.5) + 2.0 = 3.5$
$t4 = (b+c+d)'$	$t_{t4} = \max(0, 0, 0) + 2.0 = 2.0$
$t5 = (a+bi+di)'$	$t_{t5} = \max(0, 1.5, 1.5) + 2.0 = 3.5$
$t6 = (a+c)'$	$t_{t6} = \max(0, 0) + 1.5 = 1.5$
$k = (t1+t2+t3)'$	$t_k = \max(3.0, 1.5, 3.5) + 2.0 = 5.5$
$l = (t2+t4+t3)'$	$t_l = \max(1.5, 2.0, 3.5) + 2.0 = 5.5$
$m = (t5+t4+t3)'$	$t_m = \max(3.5, 2.0, 3.5) + 2.0 = 5.5$
$n = (t6+t4+t3)'$	$t_n = \max(1.5, 2.0, 3.5) + 2.0 = 5.5$

4\*NOT, 3\*2-NOR 7\*3-NOR

literaale:  $4+27=31$ eq.gates:  $4*1.5+3*1.5+7*2.0=24.5$ maks.viide: 5.5, kr.tee nt.  $a \cdot ai \cdot t3 \cdot k$  või  $d \cdot di \cdot t5 \cdot m$



TTÜ1918



# Kriitiline tee ja mäluelemendid (registrid)

- **Seade- & hoideajad mäluelemtides (trigerites)**
  - seadeaeg – sisendandmed peavad olema stabiilsed mingi aeg enne taktsignaali aktiivset fronti
  - hoideaeg – sisendandmed peavad olema stabiilsed mingi aeg pärast taktsignaali aktiivset fronti
  - Põhjuseks mäluelementide siseste signaalide erinevad levimisajad
  - Tagajärjeks võib olla metastabiilsus – väljund on ‘0’ ja ‘1’ vahel
  - seadeaeg – setup time
  - hoideaeg – hold time
- **Sobivuse arvutamisel peab arvestama ka mäluelementide ajalisi parameetreid:**
  - andmete valmsoleku aeg:  $t_x + d_{ff}$
  - nõutav andmete valmsoleku aeg:  $\bar{t}_x - t_{ff,setup}$
  - sobivus (slack):  $s_x - d_{ff} - t_{ff,setup}$

