

III PEATÜKK

LINEAARSETE ELEKTRIAHELATE ARVUTUSMEETODID SIINUSELISTE PINGE- JA VOOLUALLIKATE PUHUL

3.1 Põhimõisted

Perioodilised vahelduvsuurused: $F(t) = F(t + kT)$.

Siinuseline on selline **vahelduvvool** või -pinge, mis ajas muutub siinuselise seaduspärasuse järgi:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \psi\right) = I_m \sin(2\pi f \cdot t + \psi). \quad (3.1)$$

Selle funktsiooni maksimaalväärtust nimetatakse **amplituudiks**. Siin I_m on voolu amplituudväärtus; T on periood, s.o **ajavahemik**, mille vältel funktsioon läbib täisvõnke ja jõuab lähteseisu [s].

Vahelduvsuuruse jaoks muutuse **sagedus**, s.o võngete arv ühe sekundi vältel:

$$f = \frac{1}{T} [\text{Hz}]. \quad (3.2)$$

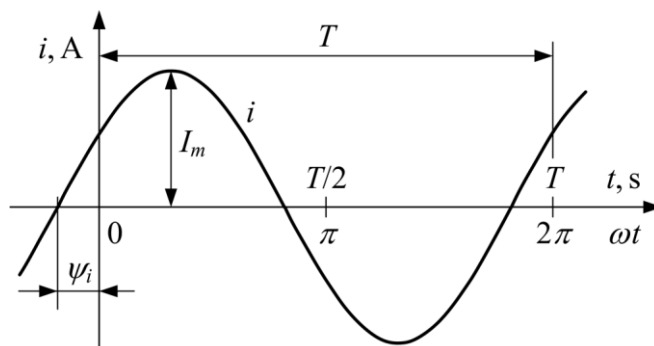
Kasutame ka **nurksageduse** mõistet:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.3)$$

s.o radiaanide arv, mille funktsioon läbib sekundis [rad/s].

Voolu hetkväärtuse i avaldises $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$ kannab siinusfunktsiooni argument $(\omega t + \psi)$ faasi nimetust (funktsiooni faas). Argumendi väärtust ψ , mis määrab siinussuuruse algväärtuse hetkel $t = 0$, nimetatakse voolu, pinge või emj **algfaasiks**.

$$\begin{aligned} i &= I_m \sin(\omega t + \psi_i); \\ u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u); \\ e &= E_m \sin(\omega t + \psi_e). \end{aligned} \quad (3.4)$$



Joonis 3.1. Siinuselise kujuga vahelduvvool.

Seega on iga siinuseline suurus iseloomustatud kolme suurusega – amplituudi, nurksageduse ja algfaasiga.

Tööstuslikus elektroenergeetikas on Euroopas ja Aasias ning suures osas ülejäänud maades siinuselise vahelduvpinge ja -voolu sageduseks 50 Hz, USA-s ja osaliselt Lõuna-Ameerika riikides aga on standardseks valitud sagedus 60 Hz.

Praktilistes elektrotehnilistes seadmetes kasutatav sagedusdiapason on aga väga lai – kümnendikest hertsidest (näiteks geoluures) kuni miljardite hertsideni (GHz, raadiotehnikas).

Erijuhtumil, kui $f = 0$, periood $T \rightarrow \infty$ – see on **alalisvool**.

3.2 Siinuselise voolu efektiiv- ja keskväärtus

Elektrivoolu **soojuslik toime**, aga samuti ka kahe sama voolu poolt läbitava mähispooli **vastastikune elektrodünaamiline toime** on võrdeline selle voolu ruuduga. Selle tõttu tehnikas otsustatakse siinuselise (ja ka teistsuguse üldjuhul perioodilise) voolu suuruste üle harilikult nende **keskmiste ruutväärtuste** järgi perioodi kohta:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt},$$

mida nimetame **voolu efektiivväärtuseks**.

Analoogselt kirjeldame pinget ja emi efektiivväärtusi:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} \quad \text{ja} \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}.$$

Vaatleme resistiivset takistust r omavas ahelas voolu i soojuslikku toimet. Joule-Lenzi seaduse järgi on voolu tõttu ajalememendi dt kestel eralduv soojushulk $dq = i^2 r dt$, täisperioodi kestel on see aga $\int_0^T i^2 r dt$.

Seega perioodi kestel ahelas eralduvat soojushulka iseloomustab **keskmise** võimsus

$$\frac{1}{T} \int_0^T i^2 r dt = r \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = r I^2. \quad (3.5)$$

Seega siinuselise voolu i efektiivväärtus I on soojuslikult toimelt samasugune nagu alalisvool I , mis ahelat läbides tekitab samasuguse soojusliku efekti nagu siinusvool i . Siinuselise kujuga voolu korral $i = I_m \sin \omega t$ erijuhul, kui algfaasinihkenurk on $\psi_i = 0$, avaldub voolu efektiivväärtuse ruut

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (I_m^2 \sin^2 \omega t) dt = \frac{I_m^2}{2} \frac{1}{T} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{I_m^2}{2}, \quad (3.6)$$

millest

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 \cdot I_m, \quad (3.7)$$

Nii avaldub siinuselise vahelduvvoolu efektiiv- ja amplituudväärtuste omavaheline seos.

Analoogselt pinget ja elektromotoorjõu korral

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{ja} \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

ehk $E_m = E\sqrt{2} = E \cdot K_a$, kus $K_a = \sqrt{2} \approx 1,41 = E_m/E$ on **amplituuditegur**.

Tehnikas ja elektrimõõtmistes siinuseliste vahelduvsuuruste mõõtmiseks kasutatavad **mõõteriistad** näitavad peaaegu eranditult **siinussuuruse efektiivväärtusi**.

Siinusvoolu, -pinge ja -emi iseloomustamiseks kasutame mõnikord veel **aritmeetilisi keskmisi** või lihtsalt **keskväärtusi**. **Keskväärtuste** all ajavahemikul t_1 kuni t_2 mõistame suurus

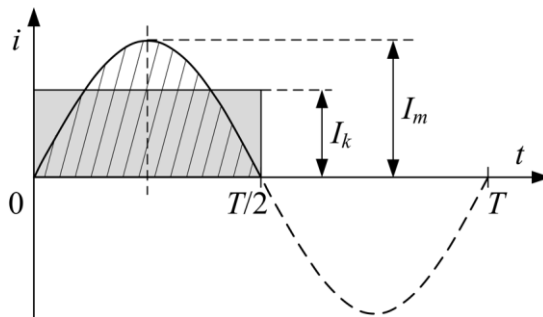
$$I_k = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i dt; \quad U_k = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u dt; \quad E_k = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} e dt. \quad (3.8)$$

Kuna siinuseliste suuruste **keskväärtus**, s.o siinuskõvera alune pindala **kogu perioodi vältel on 0** (positiivne ja negatiivne poolperiood kompenseeruvad), siis kasutame tavaliselt mõistet **positiivse poolperioodi keskväärtus** (joon. 3.2). Selle järgi voolu, pinget ja emf keskväärtus avaldub:

$$I_k = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = \frac{2I_m}{\omega T} [-\cos \omega t]_0^{T/2} = \frac{4I_m}{\omega T} = \frac{2}{\pi} I_m; \quad (3.9)$$

kus $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{1}{T}$;

$$U_k = \frac{2}{\pi} U_m; \quad E_k = \frac{2}{\pi} E_m.$$



Joonis 3.2. Siinuselise voolu positiivse poolperioodi keskväärtuse kujutamine.

Seos keskväärtuse ja efektiivväärtuse vahel:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_k \cdot \pi}{2\sqrt{2}} = I_k k_f, \quad (3.10)$$

kus k_f on siinusfunktsiooni kujutegur, $k_f = \pi/2\sqrt{2} \approx 1,11$.

Kujutegurid k_a ja k_f on väärtustelt seda suuremad, mida teravam on vastav kõver.

3.3 Siinuseliselt muutuvate suuruste kujutamine kompleksstasandi vektoritena

Siinuselise voolu arvutus lihtsustub tunduvalt, kui ajas siinuseliselt muutuvaid suurusid kujutada kompleksstasandi vektoritena ehk **kompleksarvudena**.

Vaatleme kompleksstasandit, millel võib kujutada kompleksarve (näiteks kompleksstasandi punkt A, mida iseloomustab vektor $\underline{A}$ (joon. 3.3):

$$\underline{A} = a_1 + ja_2 = a \cos \alpha + ja \sin \alpha, \quad (3.11)$$

s.o kompleksarvu algebraline kuju. Siin

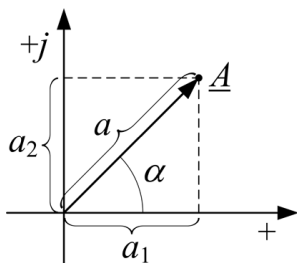
a_1 – kompleksarvu reaalarosa;

a_2 – kompleksarvu imaginaarosa;

$j = \sqrt{-1}$ – imaginaarühik;

a – kompleksarvu **moodul** ehk absoluutväärtus ehk vektori pikkus;

α – argument, kompleksarvu faasinurk



Joonis 3.3. Kompleksstasandi punkti A iseloomustav faasor ehk tasapinnavektor $\underline{A}$.

Ilmselt

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{ja} \quad \tan \alpha = \frac{a_2}{a_1}. \quad (3.12)$$

Kompleksarvu eksponentsiaalkuju:

$$\underline{A} = ae^{j\alpha} = a\angle\alpha. \quad (3.13a)$$

Kompleksarvu algebraline kuju:

$$\underline{A} = a_1 + ja_2. \quad (3.13b)$$

Kompleksarvu trigonomeetriline kuju:

$$\underline{A} = a \cos \alpha + ja \sin \alpha. \quad (3.13c)$$

Kompleksarvu eksponentsiaalkuju tuleneb matemaatika kursusest tuntud Euleri valemist

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha. \quad (3.14)$$

Sealjuures funktsiooni $e^{j\alpha}$ moodul on 1. Tõepoolest,

$$|e^{j\alpha}| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1.$$

Kui korrutada kompleksarv $\underline{A}$ suurusega $e^{j\beta}$, tähendab see täiendavat faasinihet nurga β võrra:

$$\underline{A}e^{j\beta} = a \cdot e^{j\alpha} \cdot e^{j\beta} = a \cdot e^{j(\alpha+\beta)}.$$

Erijuhul, kui $\beta = \pm \pi/2$, annab Euleri valem tulemuseks

$$e^{\pm j\beta} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = 0 \pm j1 = \pm j. \quad (3.15)$$

Seega kompleksarvu korrutamine suurusega $\pm j$ on ekvivalentne vastava komplekstasandi vektori pööramisega nurga $\pm 90^\circ$ võrra.

Kui võtame $a = I_m$ ja $\alpha = \omega t + \psi$, siis saame kompleksarvu

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} = I_m \cos(\omega t_1 + \psi) + j I_m \sin(\omega t_1 + \psi). \quad (3.16)$$

Selles kompleksvoolu avaldises on kaks osa, millest üks on **reaalosa**:

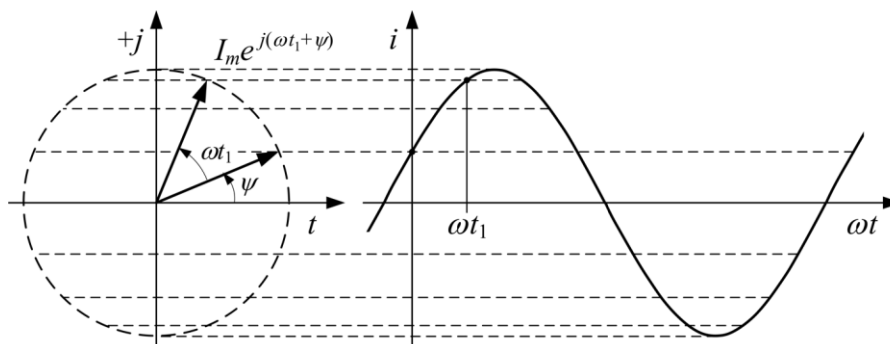
$$I_m \cos(\omega t + \psi) = \operatorname{Re} \left[I_m e^{j(\omega t + \psi)} \right], \quad (3.17)$$

teine aga **imaginaarosa**:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) = \operatorname{Im} \left[I_m e^{j(\omega t + \psi)} \right]. \quad (3.18)$$

Seega siinuselise voolu hetkväärtus i võrdub selle voolu kompleksavaldise imaginaarosaga.

Kompleksarv $I_m e^{j(\omega t + \psi)}$ aga kujutab endast komplekstasandi vektorit, mis pöörleb positiivses suunas, s.o kellaosuti liikumisele vastupidi (joon. 3.4).



Joonis 3.4. Komplekstasandi pöörlev vektor kirjeldab siinuskõvera hetkväärtusi.

Tavaliselt kujutatakse siinuselisi elektrisuurusi iseloomustades neid kompleksstasandil ajahetke $\omega t = 0$ (s.o $t = 0$) tingimustes. Sealjuures

$$I_m e^{j(\omega t + \psi)} \Big|_{\omega t = 0} = I_m e^{j\psi} = \underline{I}_m, \quad (3.19)$$

mida nimetame **voolu kompleksamplituudiks**. Voolu kompleksamplituud seega ei sõltu ajast, tema **moodul** I_m ja **algfaas** ψ_i on samased **siinusvoolu** vastavate väärtustega.

Seega siinusvoolu hetkväärtust saame avaldada voolu kompleksamplituudi kaudu:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = \text{Im}[\underline{I}_m e^{j\omega t}] = \text{Im}[I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t}] = \text{Im}[\underline{I}_m e^{j(\omega t + \psi_i)}] \quad (3.20)$$

kus $e^{j\omega t}$ on **pöörlemisoperaator**.

Kui jagada voolu **kompleksamplituud** suurusega $\sqrt{2}$, s.o **amplituuditeguriga**, saame voolu **kompleksefektiivväärtuse**, mida lühemalt nimetame **kompleksvooluks**:

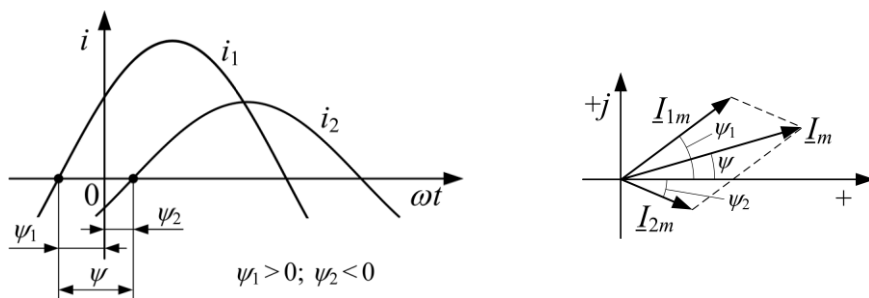
$$\underline{I} = \frac{\underline{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m e^{j\psi_i}}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i} = I e^{j\psi_i}. \quad (3.21)$$

Sellist lahendusmeetodit **siinuseliste vooludega** vahelduvvooluahelate korral, kus need asendatakse arvutamiskäigu lihtsustamiseks **kompleksarvudega**, nimetame **sümbolimeetodiks**.

3.4 Siinusfunktsioonide liitmine ja lahutamine. Vektordiagrammid

Olgu meil tarvis liita kaks siinuselist voolu, millel on **võrdne sagedus**, kuid erinev algfaas (joon. 3.5):

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1); \\ i_2 &= I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2). \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$



Joonis 3.5. Kahe siinusfunktsiooni kujutamine vastavate kompleksuuruste abil.

Siin vool i_1 on voolust i_2 faasis ees faasinihke võrra, mis võrdub algfaaside vahega

$$\varphi = \Delta\psi = \psi_1 - (+\psi_2) = \psi_1 - \psi_2.$$

Avaldugu sel juhul summaarne vool üldkujul

$$i = i_1 + i_2 = I_m \sin(\omega t + \psi). \quad (3.23)$$

Tuleb leida selle avaldise jaoks amplituud I_m ja algfaas ψ . Selleks kujutame voolusid i_1 ja i_2 kompleksstasandil vektoritena vastavalt

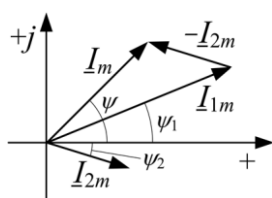
$$\underline{I}_{1m} = I_{1m} e^{j\psi_1} \quad \text{ja} \quad \underline{I}_{2m} = I_{2m} e^{j\psi_2}. \quad (3.24)$$

Vektorite $\underline{I}_{1m}$ ja $\underline{I}_{2m}$ geomeetrilisel liitmisel saadakse uus vektor $\underline{I}_m$, mis väljendabki summaarse voolu kompleksamplituudi väärtust:

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\psi} = \underline{I}_{1m} + \underline{I}_{2m}, \quad (3.25)$$

kus I_m – summaarse voolu amplituudväärtus ehk selle kompleksamplituudi **moodul**;

ψ – summaarse voolu algfaas.



Kahe komplekstasandi vektori erinevuse leidmiseks lahutatakse need üksteisest geomeetriliselt ja saadakse tulemus kui vektorite vahe:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = I e^{j\psi} = I \angle \psi;$$

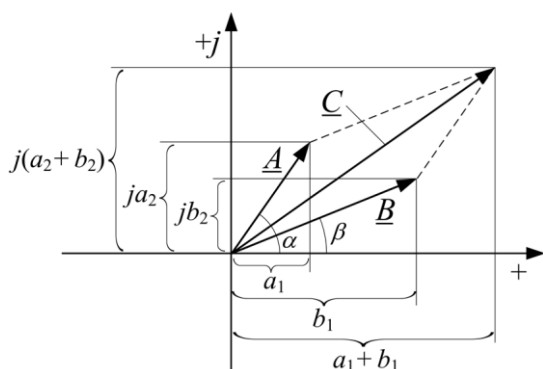
$$\underline{I}_m = \underline{I}_{1m} - \underline{I}_{2m} = I_m e^{j\psi}. \quad (3.26)$$

Kahe kompleksarvu **analüütiliselt liitmisel või lahutamisel** tuleb lähtuda nende kompleksarvude algebralisest kujust:

$$\underline{A} = A e^{j\alpha} = A \cos \alpha + j A \sin \alpha = a_1 + j a_2;$$

$$\underline{B} = B e^{j\beta} = B \cos \beta + j B \sin \beta = b_1 + j b_2;$$

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \underline{A} \pm \underline{B} = (a_1 + j a_2) \pm (b_1 + j b_2) \\ &= (a_1 \pm b_1) + j (a_2 \pm b_2) = c_1 + j c_2. \end{aligned}$$



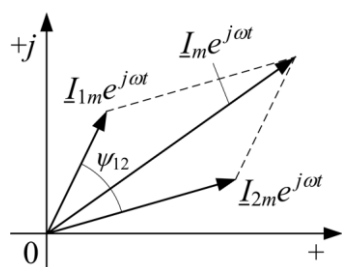
Kompleksarvude **korrumine ja jagamine**:

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A e^{j\alpha} \cdot B e^{j\beta} = A \cdot B \cdot e^{j(\alpha+\beta)};$$

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A e^{j\alpha}}{B e^{j\beta}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)};$$

$$\underline{A}^n = A^n e^{j\alpha \cdot n};$$

$$\sqrt[n]{\underline{A}} = \pm \sqrt[n]{A} \cdot e^{j\frac{\alpha}{n}}.$$



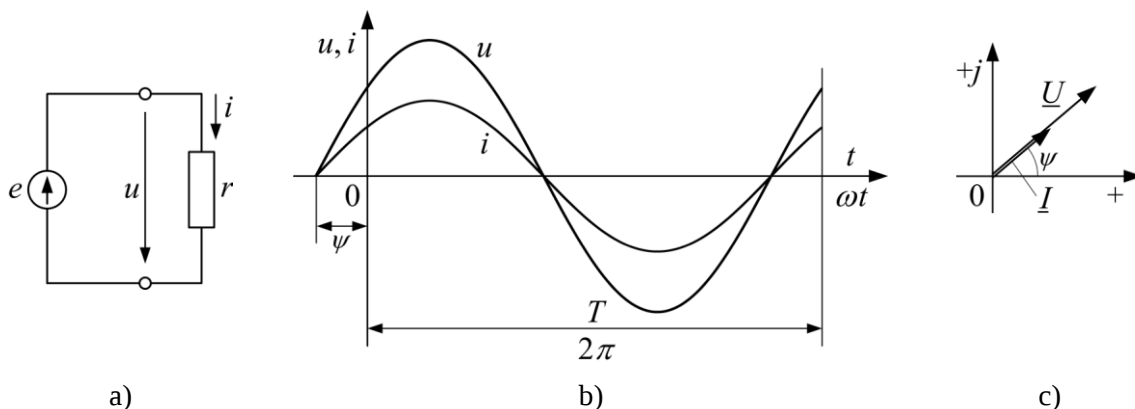
Vektordiagramm on selline diagramm, kuhu siinuselisi suurusi kirjeldavad **komplekssuurused** on kantud selliste **vektoritena**, mis on säilitanud üksteise suhtes **faasinihked**, s.o suhtelise orientatsiooni.

Komplekssuuruste vektordiagramm kehtib nii siinussuuruste aja hetkel $t=0$, kui ka hetkel $t \neq 0$, s.o vektorid $\underline{I}_{1m} e^{j\omega t}$, $\underline{I}_{2m} e^{j\omega t}$ ja $\underline{I}_m e^{j\omega t}$.

3.5 Siinusvool aktiivtakistil

Vaatleme lihtsaimat ahelat joonisel 3.6a, mis sisaldab vaid aktiivtakistit r ja siinuselektromotoorjõu allikat e , mis tekitab ahela klemmidel pinge

$$e = u = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (3.27)$$



Joonis 3.6. Voolu ja pinge siinuskõverad aktiivtakistil ja vastav vektordiagramm komplekstasandil.

Sel juhul tekib takistil vool (Ohmi seadus):

$$i = \frac{U_m}{r} \sin(\omega t + \psi_u) = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (3.28)$$

kus voolu amplituud ja algfaas on vastavalt

$$I_m = \frac{U_m}{r} \quad \text{ja} \quad \psi_i = \psi_u = \psi. \quad (3.29)$$

Osutub, et nii pinge u kui ka vool i on ühesuguse algfaasiga suurused, või, nagu öeldakse, **langevad faasis kokku**, sest faasinihe voolu ja pinge vahel on 0:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0.$$

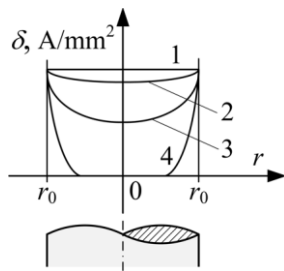
Seda kinnitab ka vektordiagramm, kus vektorid $\underline{U}$ ja $\underline{I}$ **langevad suunalt kokku**. Kasutades voolu ja pinge efektiivväärtusi $I = I_m / \sqrt{2}$ ja $U = U_m / \sqrt{2}$, avaldame voolu efektiivväärtuse

$$I = \frac{U}{r}. \quad (3.30)$$

Seega aktiivtakistil r on Ohmi seadusel analoogne kuju nii voolu hetk-, amplituud- kui ka efektiivväärtusele. Või teisiti $U_r = I \cdot r$.

Toome sisse aktiivjuhtivuse mõiste $g = 1/r$, siis saame:

$$I_m = g \cdot U_m \quad \text{või} \quad I = g \cdot U. \quad (3.31)$$



Joonis 3.7. Voolutiheduse jaotumine juhtme ristlõikes olenevalt sagedusest.

Tuleb märkida, et juhtme takistus on vahelduvvoolu jaoks suurem kui alalisvoolu korral. See on tingitud vahelduvvoolu korral esinevast pinnaefektist ja juhtmes tekkivatest pöörisvooludest. Selle tõttu on vahelduvvoolu tihedus juhtme ristlõikes ebaühtlane, olles suurim juhtme välispinnal ja vähenedes juhtme sisemuses (joon. 3.7 kõverad 2, 3 ja 4; kõver 1 on voolutihedus alalisvoolule).

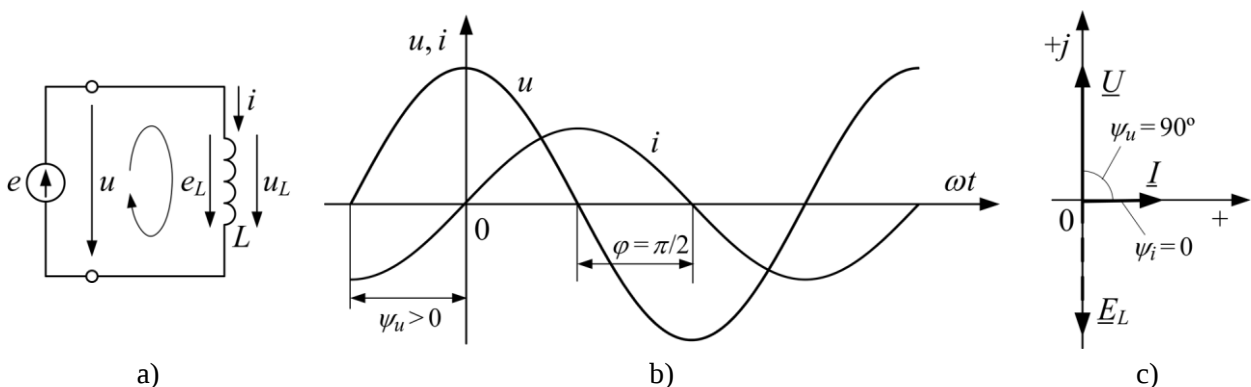
Pinnaefekt avaldub seda rohkem, mida suurem on sagedus f .

Et eristada vahelduvvoolu korral juhtme takistust r tema takistusest alalisvoolule R , nimetame vahelduvvoolu korral seda takistust aktiivtakistuseks. Sealjuures g – aktiivjuhtivus.

3.6 Siinusvool induktiivsusel

Praktiliselt igasugust mähispooli iseloomustab induktiivsus ja aktiivtakistus. Lahutame need mõjud eraldi elementidele L ja r , mis on ühendatud jadamisi. Jätame aktiivtakistuse mõju kõrvale, oletades, et $r_L \rightarrow 0$ (joon. 3.8). Järele jääb puhas induktiivsus L . Toidame seda siinuspingega:

$$e = u = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (3.32)$$



Joonis 3.8. Voolu ja pinge siinuskõverad induktiivsusel ja vastav vektordiagramm komplekstasandil.

Sealjuures tekib induktiivpoolis vool

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i). \quad (3.33)$$

Selle voolu poolt tekitatakse magnetväli, mis omakorda indutseerib induktiivsuses omainduktsiooni elektromotoorjõu

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) = -\omega L I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = -U_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.34)$$

Kirchhoffi II seaduse põhjal

$$u = -e_L = L \frac{di}{dt} = U_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (3.35)$$

kus

$$U_m = E_{Lm} = \omega L I_m \quad (3.36)$$

ja pinge algfaas

$$\psi_u = \psi_i + \frac{\pi}{2}. \quad (3.37)$$

Toodud avaldised näitavad, et pinge induktiivsuses on voolust ees nurga $\pi/2 = 90^\circ$ võrra (vt vektordiagrammi joon. 3.8):

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \frac{\pi}{2}.$$

Indutseeritud emj induktiivpoolis on komplekspingega vastasfaasis. Avaldisest (3.34) saame seose induktiivsuses voolu amplituudi määramiseks

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L} = \frac{U_m}{x_L}, \quad (3.38)$$

kus $x_L = \omega L = 2\pi fL$ on induktiivtakistus. Induktiivtakistuse pöördväärtus on induktiivjuhtivus

$$b_L = \frac{1}{x_L} = \frac{1}{\omega L}. \quad (3.39)$$

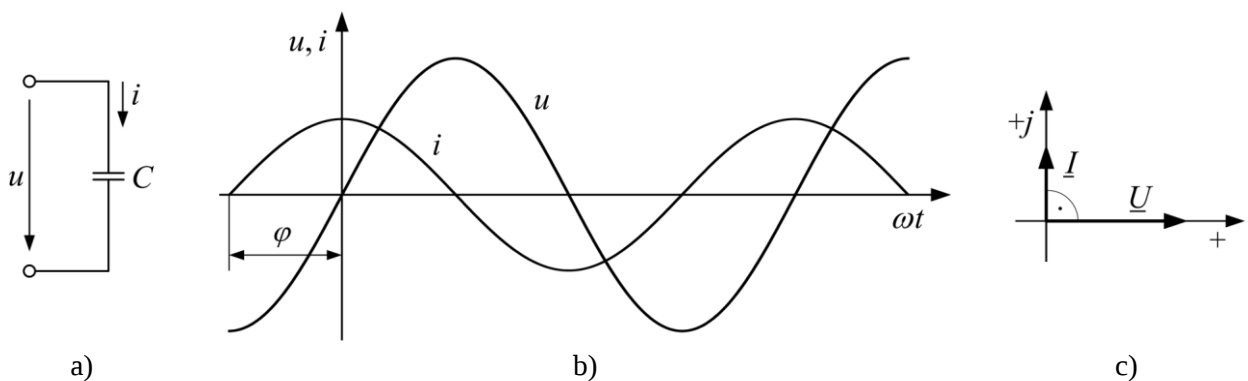
Seega voolu ja pinge efektiivväärtused on induktiivsuses omavahel seotud nii:

$$I = \frac{U}{x_L} \quad \text{või} \quad I = b_L \cdot U. \quad (3.40)$$

3.7 Siinusvool mahtuvusel

Rakendame kondensaatorile mahtuvusega C siinuspinge (joon. 3.9)

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (3.41)$$



Joonis 3.9. Voolu ja pinge siinuskõverad mahtuvusel ja vastav vektordiagramm kompleksstasandil.

Siis muutub ka laeng kondensaatori plaatidel siinusseaduse järgi:

$$q = C \cdot u = C \cdot U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (3.42)$$

st kondensaatorit laetakse perioodiliselt ümber. Kondensaatori plaatide perioodiline ümberlaadimine tekitab nende vahel laadimisvoolu

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \psi_u) = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.43)$$

või teisiti

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (3.44)$$

kus

$$I_m = \omega C U_m \quad (3.45)$$

ja

$$\psi_i = \psi_u + \frac{\pi}{2}. \quad (3.46)$$

Avaldisest (3.44) nähtub, et vool on faasis 90° pingest ees mahtuvusel ja faasinihe avaldub:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -90^\circ.$$

Voolu efektiivväärtus avaldub:

$$I = \omega C U = \frac{U}{x_C},$$

kus $x_C = 1/\omega C$ – mahtuvustakistus.

Pöördsuurus:

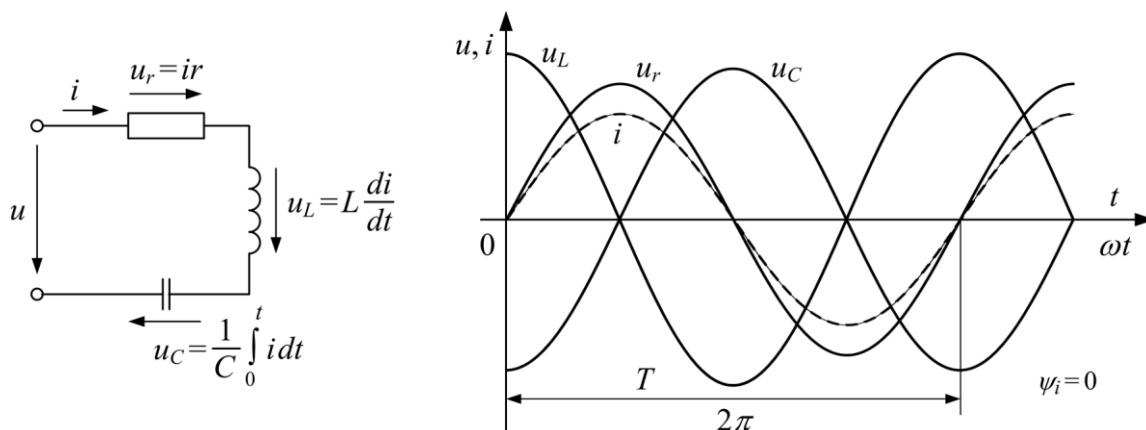
$$b_C = \frac{1}{x_C} = \omega C. \quad (3.47)$$

Järelikult

$$I = b_C \cdot U. \quad (3.48)$$

3.8 rLC -jadaahel siinusvooluga

Olgu meil jadaühenduses elemendid r , L ja C (joon. 3.10).



Joonis 3.10. rLC -jadaahel ning voolu ja pingete hetkväärtuste kõverad.

Olgu ahelas siinusvool

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Sealjuures on jadaahela klemmidel pinge

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

mis vastavalt Kirchhoffi II seadusele on võrdne üksikelementide pingete algebralise summaga:

$$u = u_r + u_L + u_C . \quad (3.49)$$

Sealjuures

$$\left. \begin{aligned} u_r &= ri = rI_m \sin(\omega t + \psi_i); \\ u_L &= L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t + \psi_i) = x_L I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right); \\ u_C &= \frac{1}{C} \int^t i dt = -\frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t + \psi_i) = x_C I_m \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

Seega pinge aktiivtakistil u_r on vooluga samas faasis, pinge induktiivsusel on 90° võrra voolust ees ja mahtuvusel 90° voolust taga.

Klemmipinge saab (3.50) põhjal avaldada:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = rI_m \sin(\omega t + \psi_i) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m \cos(\omega t + \psi_i). \quad (3.51)$$

Kuna aga $\psi_u = \psi_i + \varphi$, siis teisiti

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin(\omega t + \psi_u) = U_m \sin[(\omega t + \psi_i) + \varphi] \\ &= U_m \sin(\omega t + \psi_i) \cos \varphi + U_m \cos(\omega t + \psi_i) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Võrreldes omavahel avaldise (3.51) ja (3.52), saame

$$\begin{aligned} &U_m \cos \varphi \sin(\omega t + \psi_i) + U_m \sin \varphi \cos(\omega t + \psi_i) \\ &= rI_m \sin(\omega t + \psi_i) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m \cos(\omega t + \psi_i). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Avaldis (3.53) kirjeldab Kirchhoffi II seaduse põhjal pinge **hetkväärtust**. Selle avaldise mõlema poole võrdlemisel saame kordajate vahel seosed:

$$\left. \begin{aligned} U_m \cos \varphi &= rI_m; \\ U_m \sin \varphi &= \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m. \end{aligned} \right\} \quad (3.54)$$

Tõstes avaldise (3.54) mõlemad pooled ruutu ja liites need omavahel, saame

$$U_m^2 = \left[r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 \right] I_m^2, \quad (3.55)$$

millest avaldub seos voolu ja pinge amplituudväärtuste vahel:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Jagades mõlemad pooled $\sqrt{2}$ -ga saame voolu efektiivväärtuse jaoks avaldise

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (3.56)$$

või lühidalt kirja pandult

$$I = \frac{U}{Z}. \quad (3.57)$$

Avaldises (3.57) on

$$z = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (3.58)$$

kogutakistus (näivtakistus) ja

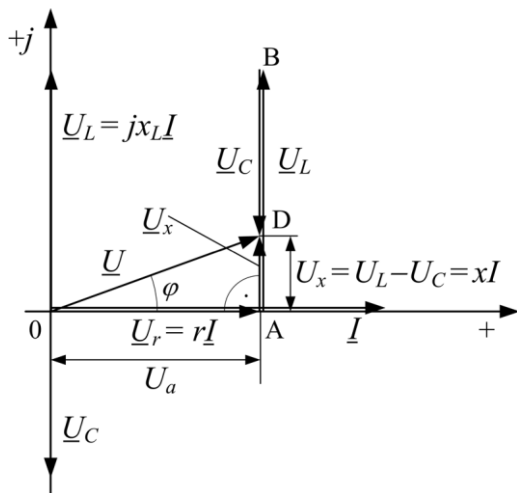
$$x = x_L - x_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (3.59)$$

reaktiivtakistus.

Kui avaldises (3.54) jagada üks võrrand teisega, saame

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r} = \frac{x}{r}; \quad \varphi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}. \quad (3.60)$$

Reaktiivtakistus $x = x_L - x_C$ ja faasinihkenurk φ pingel ja voolu vahel on "+" või "-", vastavalt sellele on ahela iseloom kas induktiivne ($x > 0$) või mahtuvuslik ($x < 0$), **r on alati > 0 .**



Analoogsed seosed saab ka ahela vektordiagrammi abil. Kanname baasvektori I horisontaalteljele. Pingelang aktiivtakistil $\underline{U}_r$ on faasis kokkulangev voolu I suunaga. Induktiivsuse pingel on 90° voolust ees, kondensaatori pingel on 90° voolust taga.

Kogu ahela pingevektor on geomeetriline summa:

$$\underline{U} = \underline{U}_r + \underline{U}_L + \underline{U}_C. \quad (3.61)$$

Tulemuseks on täisnurkne kolmnurk 0AD, mille kaatedid on:

$$\left. \begin{aligned} U_a = rI = U \cos \varphi; \\ U_x = xI = U \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

Joonis 3.11. rLC -jadaahela vektordiagramm.

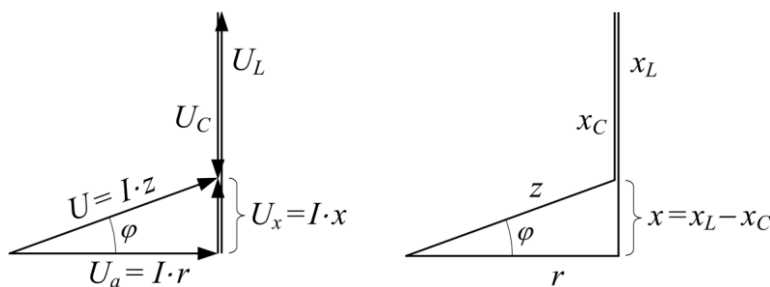
Pingekomponenti U_a , mis on **faasilt kokkulangev voolu suunaga**, nimetame **pinge aktiivkomponentiks**, aga vooluga risti olev pingekomponent on **pinge reaktiivkomponent** U_x . Üldpinge on siis

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_x^2} = \sqrt{r^2 I^2 + x^2 I^2} = I \sqrt{r^2 + x^2} = I \cdot z \quad (3.63)$$

ja faasinihe

$$\varphi = \arctan \frac{U_x}{U_a} = \arctan \frac{x}{r}. \quad (3.64)$$

Seega oli meil **pingekolmnurk**. Jagame pingekolmnurga kõik küljed vooluga I , siis saame pingekolmnurga sarnase **takistuskolmnurga** (joon. 3.12).



Joonis 3.12. rLC -jadaahela pingekolmnurk ja takistuskolmnurk.

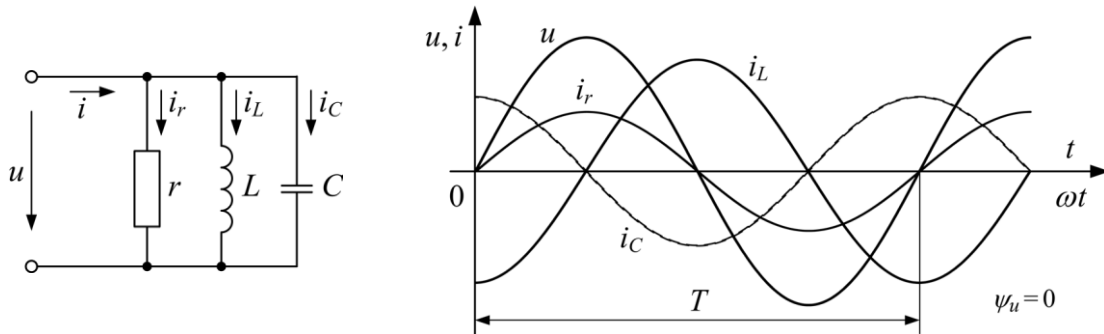
Siit ilmnevad ka seosed:

$$\left. \begin{aligned} r &= z \cos \varphi; \\ x &= z \sin \varphi; \\ z &= \sqrt{r^2 + x^2}; \\ \tan \varphi &= \frac{x}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (3.65)$$

3.9 rLC -rööpühendus

Rööpselt ühendatud elementidele r , L ja C (joon. 3.13) on rakendatud siinuseline vahelduvpinge

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$



Joonis 3.13. rLC -rööpühendus ning ping ja voolude hetkväärtuste kõverad.

Siis ahela üldvool võrdub Kirchhoffi I seaduse põhjal üksikute haruvoolude algebralise summaga

$$i = i_r + i_L + i_C. \quad (3.66)$$

Sealjuures avalduvad üksikute harude voolud järgmiselt:

$$i_r = \frac{u}{r} = gu = gU_m \sin(\omega t + \psi_u) \quad - \text{ langeb faasis kokku pingega } u;$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int u dt = -\frac{U_m}{\omega L} \cos(\omega t + \psi_u) \quad - \text{ jääb faasis pingest } u \text{ maha } \pi/2 = 90^\circ \text{ võrra};$$

$$i_C = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \psi_u) \quad - \text{ on faasis pingest } u \text{ ees } \pi/2 = 90^\circ \text{ võrra}.$$

Summaarse voolu avaldis on järelikult

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = gU_m \sin(\omega t + \psi_u) + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) U_m \cos(\omega t + \psi_u). \quad (3.67)$$

Kuna $\psi_i = \psi_u - \varphi$, st $\varphi = \psi_u - \psi_i$, siis on voolu avaldis

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) = I_m \sin(\omega t + \psi_u) \cos \varphi - I_m \cos(\omega t + \psi_u) \sin \varphi. \quad (3.68)$$

Võrreldes omavahel avaldiste (3.67) ja (3.68) siinus- ja koosinusliikmete kordajad, saame võrdused

$$\left. \begin{aligned} I_m \cos \varphi &= gU_m; \\ I_m \sin \varphi &= \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) U_m; \end{aligned} \right\} \quad (3.69)$$

millest omakorda avaldub

$$I_m = \sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2} U_m; \quad \tan \varphi = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{g}. \quad (3.70 \text{ 9.5})$$

Kui jagada eelmine avaldis $\sqrt{2}$ -ga, saame avaldise voolu efektiivväärtuse jaoks:

$$I = \sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2} U = yU, \quad (3.71)$$

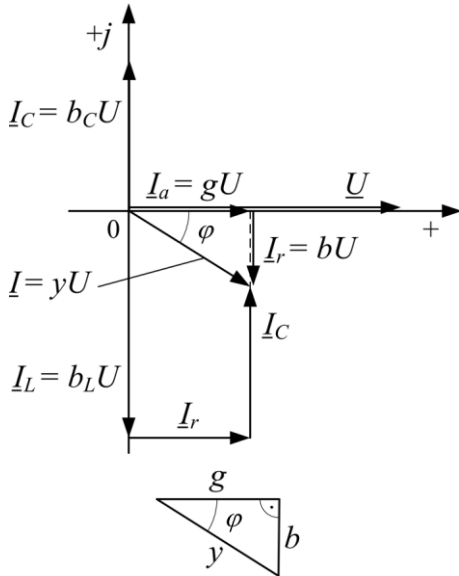
kus

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} \quad (3.72)$$

on ahela kogujuhtivus ehk **näivjuhtivus** ja

$$b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C \quad (3.73)$$

on ahela **reaktiivjuhtivus**.



Joonis 3.14. rLC -rööpühenduse vektordiagramm ja juhtivuste kolmnurk.

Joonisel 3.14 on vektordiagramm rLC -rööpahela korral, kui $1/\omega L > \omega C$ ja $\psi_u = 0$. Siinjuures kannab voolukomponent, mis suunalt langeb kokku pingega suunaga, nimetust voolu **aktiivkomponent** I_a :

$$I_a = g \cdot U = I \cos \varphi. \quad (3.74)$$

Pingega suunaga risti olev voolukomponent on voolu **reaktiivkomponent** I_r :

$$I_r = b \cdot U = I \sin \varphi. \quad (3.75)$$

Sealjuures

$$\left. \begin{aligned} I &= \sqrt{I_a^2 + I_r^2} = \sqrt{g^2 + b^2} U = yU; \\ \tan \varphi &= \frac{I_r}{I_a} = \frac{b}{g} = \frac{b_L - b_C}{g}. \end{aligned} \right\} \quad (3.76)$$

Kui jagame vektordiagrammi täisnurkse voolukolmnurga küljed $I_a = gU$, $I_r = bU$ ja $I = yU$ pingega U , saame voolukolmnurgaga sarnase juhtivuste kolmnurga. Siit saame seosed

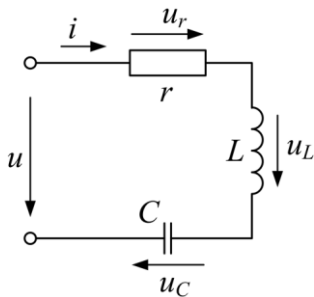
$$\left\{ \begin{aligned} g &= y \cdot \cos \varphi; \\ b &= y \cdot \sin \varphi; \\ y &= \sqrt{g^2 + b^2}; \\ \tan \varphi &= \frac{b}{g}. \end{aligned} \right. \quad (3.77)$$

3.10 Sümbolimeetodi kasutamine vahelduvvooluahelate arvutamiseks

Siinusfunktsioonide kujutamine kompleksarvudena võimaldab hetkväärtuste kohta koostatud võrranditelt (tavaliselt diferentsiaalvõrrandid) üle minna algebralistele võrranditele, mis on koostatud kompleksvoolule ja -pingele. Nii saab suhteliselt lihtsalt leida lineaarsete diferentsiaalvõrrandite erilahendeid, mis määravad vahelduvvooluahelate statsionaarse töörežiimi siinuselise emj korral.

Vaatleme näiteks rLC -jadaahelat (joon. 3.15) siinuspingel

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$



Joonis 3.15. rLC -jadaahel.

Kirchhoffi II seaduse põhjal

$$u = u_r + u_L + u_C,$$

kus

$$u_r = ir; \quad u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt.$$

Seega

$$ir + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i_C dt = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

See on diferentsiaalvõrrand, mille parem pool on siinusfunktsioon. Seega peab ka diferentsiaalvõrrandi lahend olema siinusfunktsioon:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Sümbolimeetodil kujutame klemmipinget kompleksarvuna $u = \underline{U}_m e^{j\omega t}$, kus $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$; samuti kujutame kompleksvoolu $i = \underline{I}_m e^{j\omega t} = I_m e^{j\omega t} e^{j\psi_i}$.

Voolu tuletis ja integraal avalduvad järgmiselt:

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} [I_m \sin(\omega t + \psi_i)] = \omega I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\int i dt = \int I_m \sin(\omega t + \psi_i) dt = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \psi_i) = \frac{I_m}{\omega} \sin\left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}\right).$$

Seega on tuletis di/dt kujutatav kompleksarvuna

$$\omega \underline{I}_m e^{j\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} = j\omega \underline{I}_m e^{j\omega t}$$

ja integraal $\int i dt$ vastavalt

$$\frac{\underline{I}_m}{\omega} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} = -j \frac{\underline{I}_m}{\omega} e^{j\omega t} = \frac{\underline{I}_m}{j\omega} e^{j\omega t}.$$

Asendades komplekspinge avaldised Kirchhoffi II seaduse põhjal saadud võrrandisse, saame:

$$r \underline{I}_m e^{j\omega t} + j\omega L \underline{I}_m e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \underline{I}_m e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}.$$

Jagame selle võrrandi mõlemad pooled suurusega $e^{j\omega t}$, saame

$$\underline{I}_m \left(r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{U}_m \quad \text{ehk} \quad \underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}};$$

kui jagame veel $\sqrt{2}$ -ga, saame kompleksfektiivväärtustele avaldise

$$\underline{I} \left(r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) = \underline{U} \quad \text{ehk} \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}},$$

kus

$$\underline{Z} = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

on **komplekstakistus**.

Seega võime niiviisi leida pingevaldisest komplekspinge $\underline{U}_m$ või $\underline{U}$, selle kaudu määrame voolu kompleksuuruse $\underline{I}_m$ või $\underline{I}$, selle põhjal aga saame kirjutada voolu hetkväärtuse avaldise

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

3.11 Komplekstakistus ja –juhtivus

Ohmi seaduse komplekskujulises avaldises

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

kujutab suurus

$$r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

endast kompleksarvu, mille dimensiooniks on $[\Omega]$. Seda nimetatakse **komplekstakistuseks**

$$\underline{Z} = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = r + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = ze^{j\varphi}.$$

$\underline{Z}$ on küll kompleksarv, aga (ajas) pöörlevat vektorit ta endast ei kujuta. Komplekstakistuse võib kirjutada kujul

$$\underline{Z} = ze^{j\varphi} = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = r + jx,$$

milles $r = z \cos \varphi$ – reaalosa, aktiivtakistus;

$x = z \sin \varphi$ – imaginaarosa, reaktiivtakistus;

$$\tan \varphi = \frac{x}{r}.$$

Komplekstakistuse kasutuselevõtmisel on võimalik Ohmi seadust kirjutada kujul

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \quad \text{või} \quad \underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_m = \underline{Y} \cdot \underline{U}_m.$$

See on Ohmi seaduse komplekskuju siinuselise vahelduvvooluahela puhul.

Komplekstakistuse pöördväärtust nimetatakse kompleksjuhtivuseks

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{z} e^{-j\varphi} = ye^{-j\varphi} = g - jb,$$

mille ühik on siimens $[S]$. Reaalosa g on aktiivjuhtivus; imaginaarosa b – reaktiivjuhtivus.

Kuna

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{(r + jx)(r - jx)} = \frac{r - jx}{r^2 + x^2} = \frac{r}{r^2 + x^2} - j \frac{x}{r^2 + x^2},$$

siis

$$g = \frac{r}{r^2 + x^2}; \quad b = \frac{x}{r^2 + x^2}; \quad y = \sqrt{g^2 + b^2}.$$

Kui $x > 0$ (induktiivne), siis ka $b > 0$ ja $y = g - jb$.

Kui $x < 0$ (mahtuvuslik), siis $b < 0$ ja $y = g - (-jb) = g + jb$.

Komplekskuju avaldub Ohmi seadus:

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y} \quad \text{ja} \quad \underline{I}_m = \underline{U}_m \cdot \underline{Y}.$$

3.12 Kirchhoffi seadused komplekskuju

Kirchhoffi I seaduse kohaselt võrdub voolu hetkväärtuste algebraline summa nulliga:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (3.78)$$

Asendades $i_k = \sqrt{2} I_k e^{j\omega t}$ ja tuues $\sqrt{2} e^{j\omega t}$ sulgude ette, saame

$$\sqrt{2} e^{j\omega t} \sum_{k=1}^n I_k = 0.$$

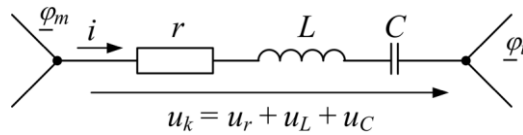
Kuna ükskõik millisel t väärtusel $\sqrt{2} e^{j\omega t} \neq 0$, siis peab olema

$$\sum_{k=1}^n \underline{I}_k = 0 \quad \text{või} \quad \sum_{k=1}^n \underline{I}_{mk} = 0 . \quad (3.79)$$

See ongi **Kirchhoffi I seaduse komplekskuju**.

Kirchhoffi II seaduse alusel võrdub suvalises suletud kontuuris pingelangude hetkväärtuste algebraline summa emj hetkväärtuste algebralise summaga:

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n e_k .$$



Joonis 3.16. Elektrialhela rLC -haru.

Üldjuhul, kui ahelas on r_k ; L_k ja C_k , on k -nda haru summaarne pingelang

$$u_k = r_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt .$$

Nagu varem juba nägime, vastab sellele kompleksvõrrand

$$\underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k = \left(r_k + j\omega L_k + \frac{1}{j\omega C_k} \right) \underline{I}_k .$$

Arvestades, et e_k hetkväärtusele vastab komplekskujul $\underline{E}_k$, saame **Kirchhoffi II seaduse komplekskujul** avaldisena

$$\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \underline{I}_k = \sum_{k=1}^n \underline{E}_k .$$

3.13 Vahelduvvooluvõimsus

Vaatleme rLC -jadaühendust (joon. 3.17), millele rakendub siinuspinge, mille algaas on null:

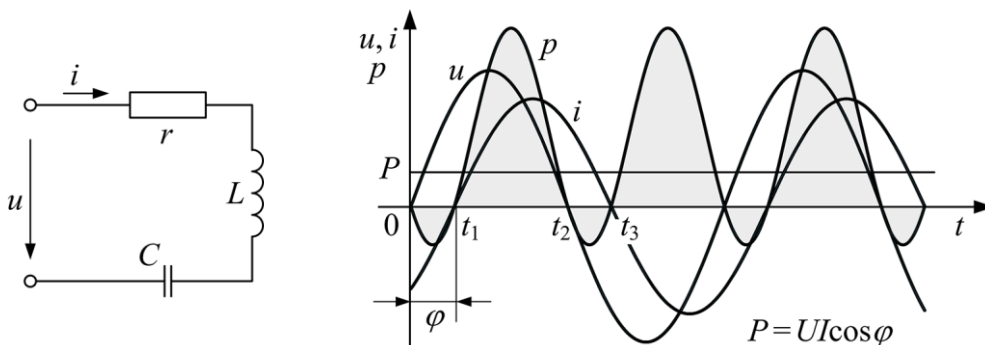
$$u = U_m \sin \omega t .$$

Selles ahelas tekib mingi siinusvool

$$i = I_m \sin(\omega t - \varphi) .$$

Selles ahelas tehakse ajavahemikul dt tööd dA , mis avaldub $dA = u i dt$. Töö tegemise kiirust iseloomustab nn **võimsuse hetkväärtus**

$$p = \frac{dA}{dt} = u \cdot i .$$



Joonis 3.17. rLC -jadaahel ning selle pinge, voolu ja võimsuse kõverad.

Asendame siia voolu ja pinget hetkväärtused:

$$p = ui = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] \\ = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi),$$

kus $U = U_m / \sqrt{2}$ ja $I = I_m / \sqrt{2}$.

Näeme siit, et võimsuse hetkväärtus võngub nurksagedusega 2ω , mis ületab voolu ja pinget nurksageduse kahekordselt, ümber telje väärtusega $P = UI \cos \varphi$. Erinevalt alalisvooluahelatest on vahelduvvooluahela võimsus **pidevas ajalises muutumises**, nagu avaldisest selgub.

Nagu näeme hetkväärtuse muutumise kõveralt, on $p = 0$ hetkedel, kui kas $i = 0$ või $u = 0$; $p > 0$, kui u ja i on ühesuguse märgiga, s.o kui voolu ja pinget suunad on kokkulangevad; $p < 0$, kui u ja i on erinevate märkidega, s.o vastasfaasides.

Kui hetkvõimsus $p < 0$, siis sel ajal ei suundu energia toiteallikast elektrialhela, vaid vastupidi.

Selline energia tagasiandmine toiteallikale toimub seetõttu, et elektrialhela L - ja C -elementidel salvestuv magnet- ja elektrivälja energia perioodiliselt suureneb ja väheneb, millele vastab hetkvõimsuse positiivne või negatiivne väärtus.

Ajavahemikul $t_1 - t_2$, kui $p > 0$, võib energiaallika poolt elektrialhela antavat võimsust kirjeldada kui p -kõvera ja abstsissitelje vahelist pindala.

Ajavahemikul $t_2 - t_3$, kui $p < 0$, antakse energiat ahelast allikale tagasi vastavalt p -kõvera alla jäävale pindalale.

Perioodiliste protsesside korral huvitab meid sageli ahelas tehtav töö perioodi vältel või siis **täis-perioodi** vältel ahelasse **antav energia**

$$A = \int_0^T u i dt.$$

Seda tööd või energiat võib iseloomustada **võimsuse keskväärtusega** täisperioodi vältel, mis oleks ekvivalentne **alalisrežiimis** ahelasse antava püsienergiaga. See võimsuse keskväärtus perioodi vältel kannab sageli nimetust **aktiivvõimsus** või lihtsalt **võimsus**. See avaldub

$$P = \frac{A}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = UI \cos \varphi.$$

Seega vahelduvvooluahela aktiivvõimsus sõltub nii voolu ja pinget efektiivväärtustest I ja U kui ka nende vahelisest nihkenurgast φ . Kordaja $\cos \varphi$, mis võimsuse avaldises sees, kannab sageli nimetust **võimsustegur**. Kuna üldiselt $\cos \varphi \leq 1$, siis $P \leq UI$. Erijuhul $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$ ja $P = UI$.

Maksimaalne võimalik võimsus kannab nime **näivvõimsus** või **koguvõimsus**:

$$S = UI.$$

Seega iseloomustab võimsustegur $\cos \varphi$ aktiiv- ja koguvõimsuse suhet:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}.$$

Elektrialhelate arvutamisel ja ka praktilises ekspluatatsioonis kasutatakse veel **reaktiivvõimsuse** mõistet ja avaldist vastavalt

$$Q = UI \sin \varphi.$$

Reaktiivvõimsus iseloomustab elektrialhela poolt tarbitavat reaktiivvoolu, sest

$$Q = UI \sin \varphi = UI_x.$$

Vaatleme võimsust r -, L - ja C -ahelates üksikelementide kaupa eraldi.

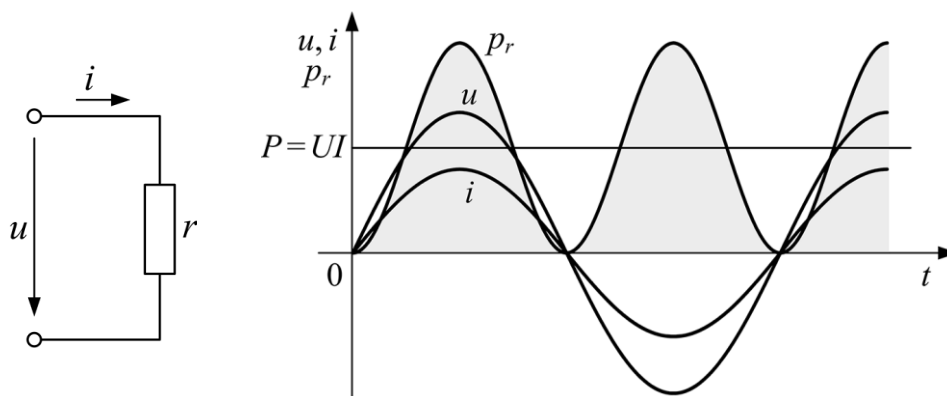
a) Võimsus r -ahelas

Olgu ahelas r ja klemmidel pinge

$$u = U_m \sin \omega t ,$$

siis tekkiv vool on temaga samas faasis:

$$i = I_m \sin \omega t .$$



Joonis 3.18. r -ahel ning selle pinge, voolu ja võimsuse hetkväärtuste kõverad.

Takistusele r antava võimsuse hetkväärtus avaldub

$$p_r = ui = U_m I_m \sin^2 \omega t = UI (1 - \cos 2\omega t)$$

või teisiti

$$p_r = ri^2 = rI^2 (1 - \cos 2\omega t) .$$

Siin võngub võimsuse hetkväärtuse kõver nurksagedusega 2ω väärtuste $p_{r\min} = 0$ ja $p_{r\max} = 2UI = U_m I_m$ vahel.

Siin on võimsuse hetkväärtus alati $p_r \geq 0$. See tähendab, et energiat antakse edasi kogu aeg ainult ühes suunas – allikalt r -tarbijale. Kogu see energia muundub r -elemendil soojuseks.

Kõvera p_r alune pindala on võrdeline aktiivtakistile r antava energiaga. Perioodi ulatuses

$$W_r = \int_0^T u i dt = r \int_0^T i^2 dt = r I^2 \cdot T = UI \cdot T .$$

Siit saame perioodi vältel eralduva keskmise võimsuse ehk **aktiivvõimsuse**

$$P = \frac{W_r}{T} = UI = rI^2 .$$

b) Võimsus L -ahelas

Kui vaadeldavas elektrialahelas on ainult induktiivsus L ja kui seda läbib siinusvool

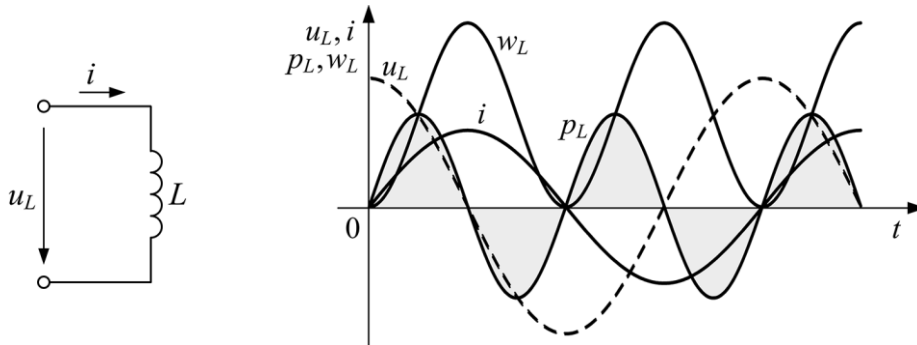
$$i = I_m \sin \omega t ,$$

siis **pinge** ahela klemmidel on faasis $\pi/2$ võrra **voolust ees**, s.o

$$u_L = U_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U_m \cos \omega t .$$

Hetkvõimsus induktiivsusel avaldub

$$p_L = u_L i = L \frac{di}{dt} \cdot i = \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} w_L,$$



Joonis 3.19. L -ahel ning selle pinge, voolu, võimsuse ja energia hetkväärtuste kõverad.

kus $w_L = Li^2/2$ on **magnetvälja energia** induktiivsusel. Asendades hetkvõimsuse avaldises u_L ja i nende hetkväärtuste avaldistega, saame

$$p_L = u_L \cdot i = U_m I_m \sin \omega t \cos \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t = UI \sin 2\omega t.$$

Antud juhul hetkvõimsus muutub siinuselise seaduspära järgi nurksagedusega 2ω , kusjuures amplituud on UI . Funktsioon p_L iseloomustab magnetvälja energia muutumise kiirust induktiivsusel. Induktiivsuse magnetvälja energia

$$w_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{LI_m^2}{2} (1 - \cos 2\omega t).$$

Siinjuures magnetvälja energia w_L muutub perioodiliselt nurksagedusega 2ω vahemikus nullist kuni väärtuseni $LI_m^2/2$.

Energia salvestub ajutiselt induktiivpooli magnetvälja energiana, saavutades maksimaalse väärtuse siis, kui ahelas on maksimaalne voolu hetkväärtus $i = |I_m|$. Seejärel voolu vähenedes väheneb ka magnetvälja energia ja kui $i = 0$, siis ka $w_L = 0$.

Seega toimub energia võnkumine toiteallika ja induktiivsuse vahel, kusjuures induktiivsusele üleantav aktiivvõimsus on null. Kui ahelas voolu väärtus kasvab, siis kasvab ka w_L ja seega $p_L = dw_L/dt > 0$ ($i = 0 \rightarrow +I_m$ või $i = 0 \rightarrow -I_m$).

Kui ahelas voolu väärtus väheneb, siis väheneb ka magnetvälja energia w_L ja seega $p_L = dw_L/dt < 0$ ($i = +I_m \rightarrow 0$ või $i = -I_m \rightarrow 0$).

Seega on keskmine töö ahelas kogu perioodi ulatuses:

$$A = W_{LT} = \int_0^T L i di = 0;$$

$$P = \frac{A_T}{T} = 0.$$

Analoogsed tulemused võidakse saada mahtuvuse korral.

c) Võimsus C -ahelas

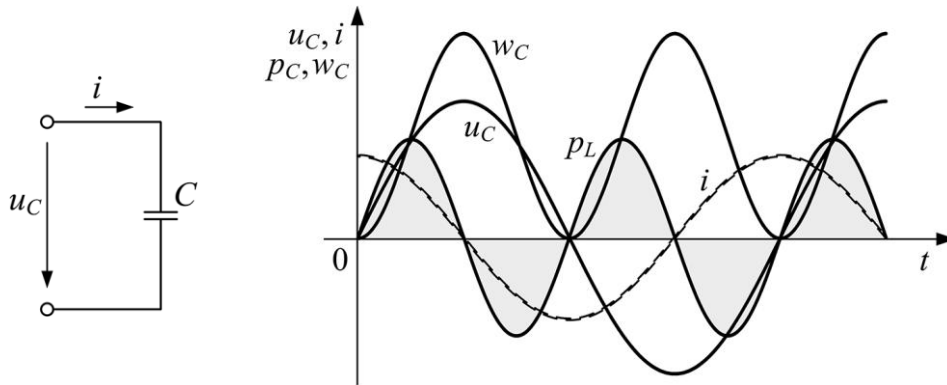
Siin on mahtuvusel pinge ja vool:

$$u = U_m \sin \omega t;$$

$$i = I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Mahtuvusel võimsuse hetkväärtus

$$p_C = u_C i = u_C C \frac{du_C}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Cu_C^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} w_C,$$



Joonis 3.20. C-ahel ning selle pinget, voolu, võimsuse ja energia hetkväärtuste kõverad.

kus $w_C = Cu_C^2/2$ on kondensaatori elektrivälja energia:

$$w_C = \frac{Cu_C^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{CU^2}{2} (1 - \cos 2\omega t).$$

Elektrivälja energia muutub nurksagedusega 2ω piirides nullist kuni $CU_m^2/2$.

$$p_C = u_C i = U_m I_m \sin \omega t \cos \omega t = UI \sin 2\omega t.$$

Üldjuhul töötavad ahelas korraga nii r -, L - kui ka C -elemendid jadamisi või rööbiti.

Sellise ahela võimsus on

$$Q = UI \sin \varphi,$$

mis väljendab ahelasse antava magnet- ja elektrivälja energia muutumise kiirust:

$$Q = UI \sin \varphi = I^2 x = I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = \omega (W_{L \max} - W_{C \max}),$$

kus $W_{L \max} = LI^2$ ja $W_{C \max} = CU_C^2$.

3.14 Võimsuste kolmnurk

Toome sisse mõisted aktiiv-, reaktiiv- ja koguvõimsus:

$$\left. \begin{aligned} P &= UI \cos \varphi = UI_a = IU_a = rI^2 = gU^2; \\ Q &= UI \sin \varphi = UI_r = IU_r = xI^2 = bU^2; \\ S &= UI = IU = zI^2 = yU^2; \\ S &= \sqrt{P^2 + Q^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.80)$$

Nendest avaldistest on näha, et võimsused P , Q ja S on vastavalt võrdelised takistustega r , x ja z , kusjuures võrdeteguriks on I^2 . Samuti on P , Q ja S vastavalt võrdelised juhtivustega g , b ja Y – võrdetegur on U^2 .

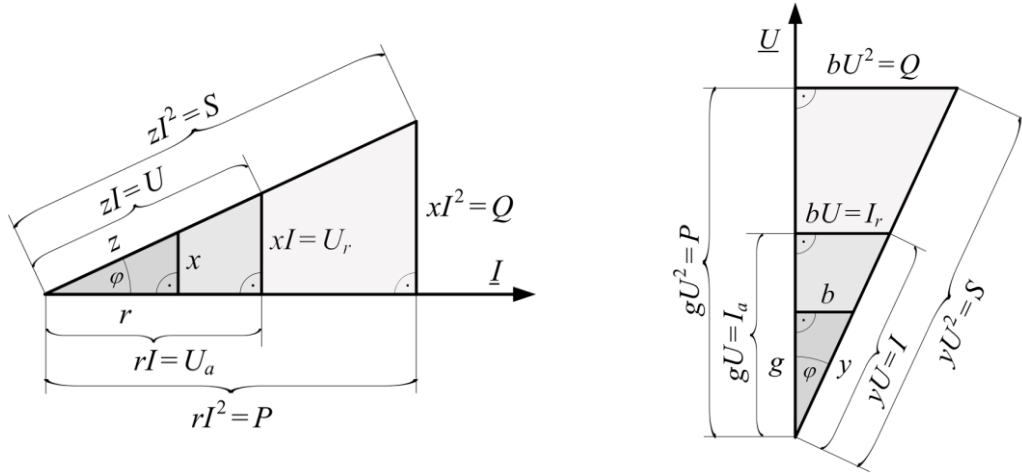
Siit järeldub, et kui korrutada takistuskolmnurga küljed suurusega I^2 , saame võimsuste kolmnurga, mis on sarnane takistus- ja pingekolmnurgaga.

Kui korrutada juhtivuskolmnurga küljed võrdeteguriga U^2 , saame ka võimsuste kolmnurga, mis on sarnane juhtivuste ja voolude kolmnurgaga.

Võimsuste kolmnurgast saame seosed:

$$\tan \varphi = \frac{Q}{P}; \quad \cos \varphi = \frac{P}{S}; \quad \sin \varphi = \frac{Q}{S}.$$

Ühikud on: P [W]; Q [var]; S [VA].



Joonis 3.21. Sarnased kolmnurgad takistused-pinged-võimsused ja juhtivused-voolud-võimsused.

Sealjuures reaktiivvõimsus $Q > 0$, kui ahelal on induktiivne iseloom ($x_L > x_C$ või $b_L > b_C$) ja $Q < 0$, kui on mahtuvuslik iseloom ($x_L < x_C$).

3.15 Võimsus komplekskujul

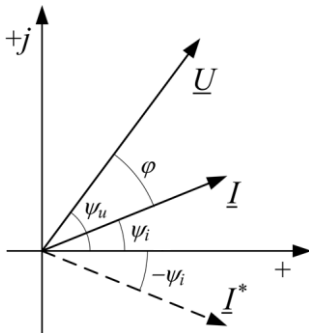
Olgu elektrialhela klemmidel toitepinge

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Siis ahelas vool avaldub

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i),$$

kusjuures vool on pinge suhtes faasis nihutatud nurga $\varphi = \psi_u - \psi_i$ võrra.



Vastavalt komplekspinge ja -vool avalduvad:

$$\underline{U} = Ue^{j\psi_u} \quad \text{ja} \quad \underline{I} = Ie^{j\psi_i}.$$

Voolu kaaskompleks on

$$\underline{I}^* = Ie^{-j\psi_i}.$$

Korrutades komplekspinge ja kaaskompleksvoolu, saame

$$\underline{U}\underline{I}^* = Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\varphi}.$$

Joonis 3.22. Kompleksvool $\underline{I}$ ja kaaskompleksvool $\underline{I}^*$.

Kasutades Euleri valemit $e^{j\varphi}$ avaldamiseks, saame teisendades

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ.$$

Seega aktiivvõimsus P on kompleksvõimsuse $\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^*$ reaalosa, reaktiivvõimsus Q aga imaginaarosa:

$$P = \operatorname{Re}[\underline{U}\underline{I}^*]; \quad Q = \operatorname{Im}[\underline{U}\underline{I}^*].$$

Siin kompleksvõimsuse $\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^*$ moodul $S = UI$ on kogu- ehk näivvõimsus. Kuna $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$, siis saab kompleksvõimsuse $\underline{S}$ leida ka teisiti:

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = \underline{Z} \cdot \underline{I}\underline{I}^* = \underline{Z}I^2 = (r + jx)I^2 = rI^2 + jxI^2 = P + jQ.$$

Kuna $\underline{I} = \underline{Y}\underline{U}$ ja $\underline{I}^* = \underline{Y}^*\underline{U}^*$, siis

$$\underline{S} = \underline{U}\underline{I}^* = \underline{U}\underline{Y}^*\underline{U}^* = \underline{Y}^*\underline{U}^2 = (g + jb)U^2 = gU^2 + jbU^2 = P + jQ.$$

Et $\underline{Y} = g - jb$ ja $\underline{Y}^* = g + jb$, siis saame

$$\underline{Z} = \frac{\underline{S}}{\underline{I}^2} = \frac{P}{I^2} + j \frac{Q}{I^2},$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{S}}{\underline{U}^2} = \frac{P}{U^2} - j \frac{Q}{U^2}.$$

3.16 Potentsiaalidiagramm (topograafiline diagramm)

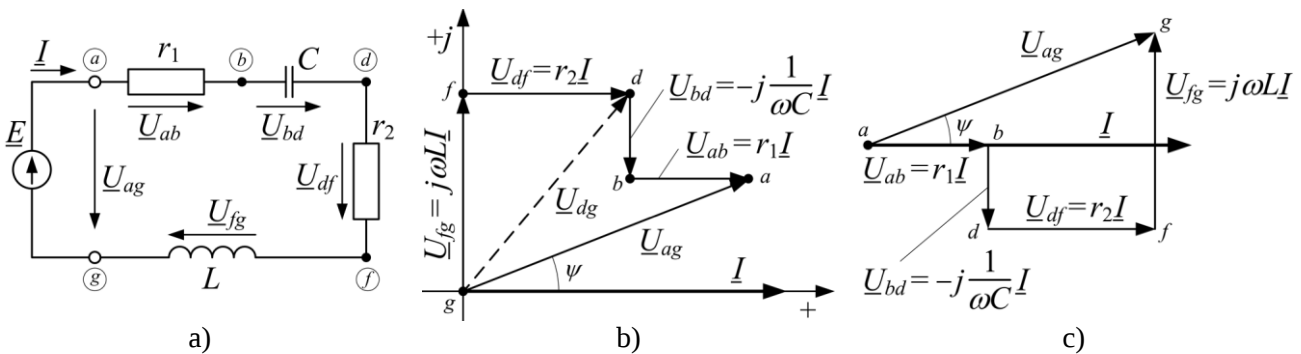
Potentsiaalidiagramm kujutab endast topograafilist vektordiagrammi, millele on kantud vaadeldava elektriiahela üksikute punktide või sõlmede komplekspotentsiaalid sellise ahelapunkti suhtes, mille komplekspotentsiaal on null. Siinjuures sõlmedevaheliste komplekspingelangude vektorite järjekord diagrammil on samasugune nagu vastavate elektriiahela elementide paiknemise järjekord skeemis. Iga järgneva elemendi pingelangu vektori nool on suunatud eelmise lõigu pingelangu alguse poole. Kui selliselt kindlas järjekorras ja suunas kõikide lõikude komplekspingelangude vektorid diagrammile kanda, siis iseloomustab selle diagrammi iga punkt vastava sõlme komplekspotentsiaali. Elektriskeemi baaspunkti komplekspotentsiaali iseloomustab koordinaatide alguspunkt.

Joonisel 3.23 on toodud potentsiaalidiagrammi koostamise näide. Komplekspotentsiaalidiagrammi koostamisel lähtume voolu kompleksi suunast. Valime talle suuna reaaltelje suunas. Võtame punkti g komplekspotentsiaali väärtuseks $\varphi_g = 0$.

Skeemis valime liikumissuuna vastupidi voolu suunale, seega läbime ahela punkte järjekorras $g-f-d-b-a$. Komplekspotentsiaal φ_f on komplekspotentsiaal φ_g suurem (kõrgem) pingelangu võrra induktiivsusel

$$\varphi_f = \varphi_g + j\omega LI = j\omega LI,$$

kuna $\varphi_g = 0$.



Joonis 3.23. Elektriiahela (a) komplekspotentsiaalide diagramm (b) ja tavaline vektordiagramm (c).

Seega punkti f komplekspotentsiaali iseloomustab vektor $j\omega LI$. Analoogselt järgmised punktid:

$$\varphi_d = \varphi_f + r_2 I,$$

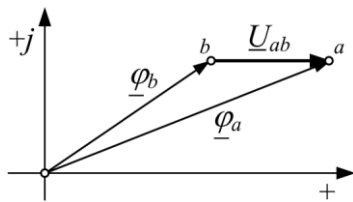
s.o vektor $r_2 I$ lähtub potentsiaalist φ_f ,

$$\varphi_b = \varphi_d - j \frac{I}{\omega C},$$

$$\varphi_a = \varphi_b + r_1 I.$$

Kontrolliks: $\underline{\varphi}_g = \underline{\varphi}_a - \underline{E} = 0$ ($\underline{U}_{ag} = \underline{E}_{ga}$ – emj allikas).

Tähelepanu nõuab pingektorite suund komplekspotentsiaalidiagrammil. Komplekspotentsiaalidiagrammil on pinged suunatud komplekspotentsiaalitasandi punktide suhtes vastupidi nende tegelikule



Joonis 3.24. Vektorite lahutamine.

suunale vastavate elektriskeemi punktide suhtes. Näiteks vektori $\underline{U}_{ab}$ suund on skeemis $a \rightarrow b$, kuid komplekspotentsiaalidiagrammil $b \rightarrow a$.

See tugineb vektorite lahutamise reeglile, mille kohaselt vektor $\underline{U}_{ab} = \underline{\varphi}_a - \underline{\varphi}_b$ on suunatud vektori $\underline{\varphi}_b$ lõpust vektori $\underline{\varphi}_a$ lõpu suunas (joon. 3.24). Komplekspotentsiaalide diagrammi abil on võimalik määrata pinget suvaliste punktide vahel.

3.17 Vahelduvvooluahela arvutamine erinevate meetoditega

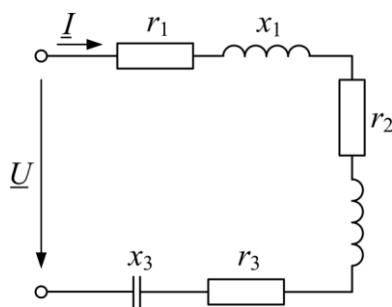
Alalisvooluahelate arvutamisel kasutatud arvutusmeetodid tuginevad Ohmi ja Kirchhoffi seaduste kasutamisele (Kirchhoffi seaduste meetod; kontuurvoolude meetod; sõlmepingete meetod, ekvivalentse generaatori meetod).

Kuna need seadused (Ohmi ja Kirchhoffi) kehtivad ka siinuselise vahelduvvooluga elektrialhelates, siis on sellistes ahelates kasutatavad ka kõik eespool nimetatud arvutusmeetodid. Selleks tuleb vastavatesse arvutusvalemites alalisvoolu ja -pinge asemel panna sisse siinuselisele voolule ja pingele vastavad kompleksväärtused, aga takistuse R ja juhtivuse G asemel kasutame kompleks-takistust $\underline{Z} = r + jx$ või kompleksjuhtivust $\underline{Y} = g + jb$.

Mõningal määral erandlikud on sellised siinussuurstega elektrialhelad, milles sisalduvad vastastikuse induktiivse sidestusega elemendid. Selliste ahelate arvutamist vaatleme eraldi.

Vaatleme allpool näiteid siinuselise voolu ja pingega vahelduvvooluahelate arvutamisest.

A Jadaühenduse arvutuskäik (rakendame Ohmi seadust).



Antud:

$$\underline{U} = 100 \text{ V}$$

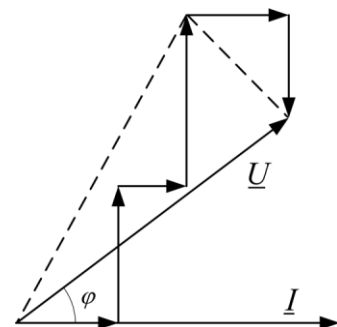
$$\underline{Z}_1 = r_1 + jx_1 = 3 + j4 \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = r_2 + jx_2 = 2 + j5 \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = r_3 - jx_3 = 3 - j3 \Omega$$

Leida:

$$\underline{I}, \underline{S}$$



Lahendus:

$$\underline{Z} = \sum \underline{Z}_k = \sum r_k + j \sum x_k;$$

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = (r_1 + jx_1) + (r_2 + jx_2) + (r_3 - jx_3) \\ &= (r_1 + r_2 + r_3) + j(x_1 + x_2 - x_3) = (3 + 2 + 3) + j(4 + 5 - 3) \\ &= 8 + j6 = 10 \angle 36^\circ 53' \Omega; \end{aligned}$$

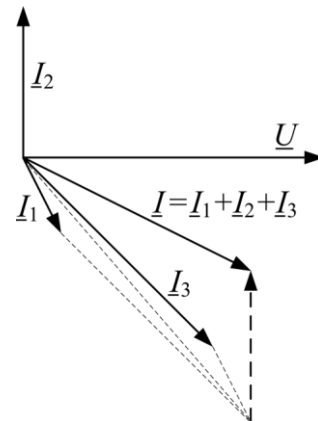
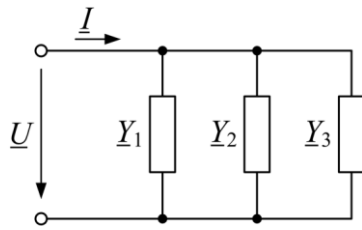
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{100}{10 \angle 36^\circ 53'} = 10 \angle -36^\circ 53' \text{ A}$$

või

$$\underline{I} = \frac{100(8 - j6)}{(8 + j6)(8 - j6)} = (8 - j6) \text{ A};$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I} = 100(8 + j6) = 800 + j600 \text{ VA}; \quad P = 800 \text{ W}; \quad Q = 600 \text{ var}.$$

B Rööpühenduse arvutus



Antud:

$$\underline{U} = 100 \text{ V}$$

$$\underline{Z}_1 = 4 + j8 \, \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = -j5 \, \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = 2 + j2 \, \Omega$$

Leida:

$$\underline{I}$$

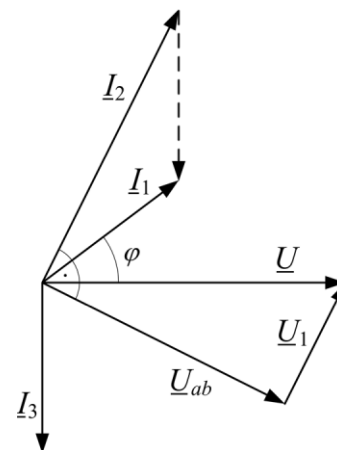
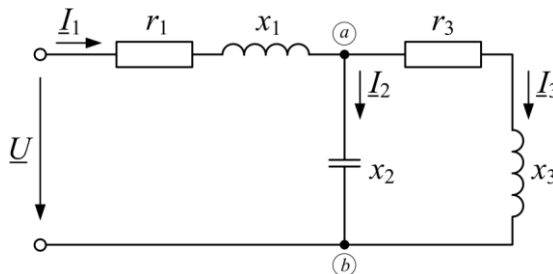
Lahendus:

$$\underline{I} = \sum \underline{I}_k; \quad \underline{I}_k = \underline{Y}_k \underline{U}; \quad \underline{I} = \sum \underline{Y}_k \underline{U} = (\sum \underline{Y}_k) \underline{U} = \underline{Y} \underline{U};$$

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{4 + j8} + \frac{1}{-j5} + \frac{1}{2 + j2} = \frac{4 - j8}{4^2 + 8^2} + j\frac{1}{5} + \frac{2 - j2}{2^2 + 2^2} \\ &= (0,05 - j0,1) + j0,2 + (0,25 - j0,25) = 0,30 - j0,15 = 0,336e^{-j26^\circ 33'} \text{ S}; \end{aligned}$$

$$\underline{I} = \underline{Y} \underline{U} = 100 \cdot 0,336 \angle -26^\circ 33' = 33,6 \angle -26^\circ 33' \text{ A}.$$

C Segäühenduses ahela arvutus



Antud:

$$\underline{U} = 100 \text{ V}$$

$$\underline{Z}_1 = r_1 + jx_1 = 4 + j2 \, \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = -j5 \, \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = 4 + j8 \, \Omega$$

Leida:

$$\underline{I}_k, \underline{S}$$

Lahendus:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ab} &= \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(4 + j8)(-j5)}{(4 + j8) - j5} = \frac{40 - j20}{4 + j3} = \frac{40 - j20}{4^2 + 3^2} (4 - j3) \\ &= \frac{(160 - 60) - j(80 + 120)}{25} = \frac{100 - j200}{25} = 4 - j8 \, \Omega; \end{aligned}$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{ab} = 4 + j2 + 4 - j8 = 8 - j6 \, \Omega;$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{100}{8-j6} = \frac{100(8+j6)}{8^2+6^2} = 8+j6 \text{ A} = 10\angle 36^\circ 53' \text{ A};$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_1 \underline{Z}_{ab} = (8+j6)(4-j8) = (32+48) + j(24-64) = 80-j40 \text{ V};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2} = \frac{80-j40}{4-j5} = \frac{40+j80}{5} = 8+j16 \text{ A} = 17,9\angle 63,5^\circ \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{80-j40}{4+j8} = \frac{(80-j40)(4-j8)}{4^2+8^2} = \frac{(320-320)-j(640+160)}{80} = -j10 = 10\angle -90^\circ \text{ A};$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}_1^* = 100(8-j6) = 800-j600 \text{ VA} = 1000\angle -36^\circ 53' \text{ VA};$$

$$S = 1000 \text{ VA}; \quad P = 800 \text{ W}; \quad Q = 600 \text{ var};$$

$$\underline{S}_1 = \underline{I}_1^2 \underline{Z}_1 = 10^2 \cdot (4+j2) = 400+j200 \text{ VA};$$

$$\underline{S}_2 = \underline{I}_2^2 \underline{Z}_2 = 17,9^2 \cdot (-j5) = -j1600 \text{ var}$$

või teisiti

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_{ab} \cdot \underline{I}_2^* = (80-j40)(8-j16) = -j1600 \text{ var};$$

$$\underline{S}_3 = \underline{I}_3^2 \underline{Z}_3 = 10^2 \cdot (4+j8) = 400+j800 \text{ VA}$$

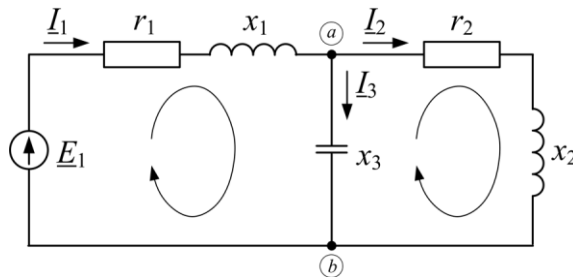
või

$$\underline{S}_3 = \underline{U}_{ab} \underline{I}_3^* = (80-j40) \cdot j10 = 400+j800 \text{ VA}.$$

Võimsuste bilanss

$$\underline{S} = \sum \underline{S}_k = (400+j200) - j1600 + (400+j800) = 800-j600 \text{ VA}.$$

D Lahendame ülesande Kirchhoffi seaduste meetodil



Antud:

$$\underline{E}_1 = 100 \text{ V}$$

$$\underline{Z}_1 = 4+j2 \Omega$$

$$\underline{Z}_2 = 4+j8 \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = -j5 \Omega$$

Leida: $\underline{I}_k$

Lahendus:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0; \\ \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_3 \underline{Z}_3 = \underline{E}_1; \\ \underline{I}_2 \underline{Z}_2 - \underline{I}_3 \underline{Z}_3 = 0; \end{cases}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_3;$$

$$\begin{cases} \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + (\underline{I}_1 - \underline{I}_2) \underline{Z}_3 = \underline{E}_1; \\ \underline{I}_2 \underline{Z}_2 - (\underline{I}_1 - \underline{I}_2) \underline{Z}_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{I}_1 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) - \underline{I}_2 \underline{Z}_3 = \underline{E}_1; \\ -\underline{I}_1 \underline{Z}_3 + \underline{I}_2 (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (4-j3) \underline{I}_1 + j5 \cdot \underline{I}_2 = 100; \\ j5 \cdot \underline{I}_1 + (4+j3) \underline{I}_2 = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4-j3 & j5 \\ j5 & 4+j3 \end{vmatrix} = 4^2 + 3^2 + 5^2 = 50;$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 100 & j5 \\ 0 & 4+j3 \end{vmatrix}}{\Delta} = 100 \cdot \frac{4+j3}{50} = 8+j6 \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4-j3 & 100 \\ j5 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = -j \frac{500}{50} = -j10 \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 8+j6+j10 = 8+j16 \text{ A}.$$

E Sama ülesande lahendamine kontuurvoolumeetodil

$$\begin{cases} \underline{I}_{11}\underline{Z}_{11} - \underline{I}_{22}\underline{Z}_{12} = \underline{E}_1; \\ -\underline{I}_{11}\underline{Z}_{21} + \underline{I}_{22}\underline{Z}_{22} = 0. \end{cases}$$

Siin:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3; \quad \underline{I}_{11} = \underline{I}_1;$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3; \quad \underline{I}_{22} = \underline{I}_2;$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_3; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{11} - \underline{I}_{22}.$$

F Sama ülesande lahendamine sõlme pingemeetodil (2 sõlme meetod)

$$\underline{U}_{ab} = \frac{\underline{E}_1 \underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{100(0,2-j0,1)}{(0,2-j0,1) + (0,05-j0,1) + j0,2} = 100 \frac{0,2-j0,1}{0,25-j0} = 80-j40 \text{ V}.$$

Siin:

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{4+j2} = \frac{4-j2}{4^2+2^2} = 0,2-j0,1 \text{ S};$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{4+j8} = \frac{4-j8}{4^2+8^2} = \frac{4-j8}{80} = 0,05-j0,1 \text{ S};$$

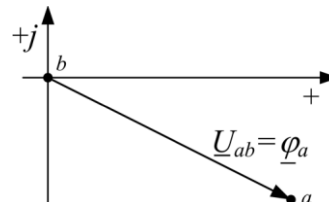
$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{-j5} = j0,2 \text{ S}.$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1 - \underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_1} = \frac{100-80+j40}{4+j2} = \frac{(20+j40)(4-j2)}{4^2+2^2} = \frac{(80+80)+j(160-40)}{20} = 8+j6 \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2} = \frac{80-j40}{4+j8} = -j10 \text{ A};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{80-j40}{-j5} = 8+j16 \text{ A}.$$

Kui $\varphi_b = 0$, siis $\underline{U}_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \varphi_a = 80-j40 \text{ V}.$



3.18 Energia ülekanne vahelduvvooluahelas

Tarbija sobitamine

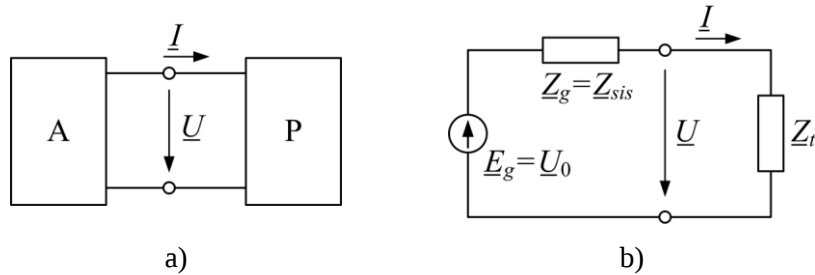
Energiaülekandesüsteemile esitatavad nõuded on sõltuvuses süsteemi kasutamise eesmärgist. Signaaliülekandesüsteemide korral on oluline saada väljundis maksimaalset võimsust, kusjuures

kasutegur η pole sageli tähtis. Tihti on selliste signaalliallikate korral ka oluline koht sagedus-karakteristikutel, seega sagedusele vastaval maksimaalsel võimsusel.

Energeetikasüsteemide korral on tavaliselt sageduse mõju ülekantavale võimsusele vähe tähtis, kuid väga oluline on saavutada energiaülekande maksimaalne kasutegur η . Oluline on ka tagada tarbijale stabiilne pinge koormuse muutumisel.

Vaatleme signaaliülekandesüsteemi korral energiaülekannet ja tarbija parameetrite valikut või häälestamist selliselt, et tarbijal eralduks maksimaalne võimsus (antud signaalliallika korral). Sellest lähtudes sobivalt valitud parameetritega tarbijat nimetatakse ka sobitatud koormuseks.

Signaaliülekandesüsteem kahejuhtmelise liini abil võib olla kirjeldatav kui energia ülekanne aktiivkaks клеммilt passiivsele (joon. 3.25a). Sealjuures aktiivkaks клемми võime kujutada kui ekvivalentset generaatorit parameetritega $\underline{E}_g$ ja $\underline{Z}_g = r_g + jx_g$. Passiivkaks клемми aga kujutab haru takistusega $\underline{Z}_t = r_t + jx_t$. Saame välja joonistada vastava aseskeemi (joon. 3.25b).



Joonis 3.25. Energiaülekanne aktiivkaks клеммilt passiivsele tarbijale.

Sellises ahelas tekkiv vool on

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_g + \underline{Z}_t}.$$

Tarbijal ära kasutatav aktiivvõimsus on avaldatav Joule-Lenzi seaduse järgi:

$$P_t = r_t \cdot I^2 = r_t \cdot \frac{U_0^2}{(\underline{Z}_g + \underline{Z}_t)^2},$$

kus ahela kogutakistus on

$$\underline{Z} = \underline{Z}_g + \underline{Z}_t = r_g + jx_g + r_t + jx_t.$$

Kui eesmärgiks on saada maksimaalne võimsus tarbijal, peab vool olema maksimaalne ($I = I_{\max}$), selleks aga peab konstantse pinge korral olema takistus võimalikult väike. Väikseim võimalik sisendtakistus ahelas aga on $\underline{Z}_{\min} = r_g + r_t$, kui $jx_g + jx_t = 0$, s.o **I tingimus on $x_g = -x_t$** .

Sealjuures avaldub võimsus tarbijal:

$$P_t = r_t \frac{U_0^2}{(r_g + r_t)^2},$$

s.o $P_t = f(r_t)$. Maksimaalse võimsuse saame sellele funktsioonile vastava kõvera maksimum(ekstreemum)punktina, s.o $dP_t/dr_t = 0$:

$$\frac{d}{dr_t} \frac{r_t}{(r_t + r_g)^2} = \frac{1}{(r_g + r_t)^2} + \frac{(-2)r_t}{(r_g + r_t)^3} = \frac{(r_g + r_t) - 2r_t}{(r_g + r_t)^3} = 0,$$

s.t $r_g + r_t - 2r_t = 0$ ehk **II tingimus on $r_t = r_g$** .

Määratletud I ja II tingimuse saab komplekskujul avaldada ka üheainsa avaldisega: $\underline{Z}_t = \underline{Z}_g^*$. Sealjuures tarbijale ülekantav maksimaalne võimsus avaldub:

$$P_{t\max} = r_t \cdot \frac{U_0^2}{(r_t + r_g)^2} = \frac{r_g U_0^2}{(2r_g)^2} = \frac{U_0^2}{4r_g}.$$

Sealjuures on ahelas tarbijal vool

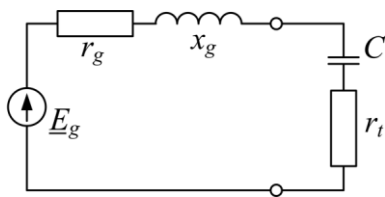
$$I = \frac{U_0}{r_t + r_g} = \frac{U_0}{2r_g},$$

aga ahela kasutegur (maksimaalne) avaldub:

$$\eta = \frac{P_t}{P_0} = \frac{r_t I^2}{(r_t + r_g)^2} = \frac{r_t}{r_t + r_g} = \frac{r_g}{2r_g} = 0,5.$$

Seega sellises sobitatud koormusega signaaliülekandesüsteemis võib maksimaalseks kasuteguriks saavutada $\eta_{\max} = 50\%$.

Signaaliallikatel on tavaliselt üsna suur aktiivsisetakistus, kuid vahel ka suur reaktiivtakistus, näiteks $\underline{Z}_g = 600 + j800 \Omega$. Sellisele signaaliallikale antud sagedusel on sobitatud koormuse väärtuseks $\underline{Z}_t = 600 - j800 \Omega$, s.o aktiivtakistus $r_t = 600 \Omega$ ja mahtuvustakistus $x_C = 800 \Omega$ ($x_C = -x_L$).



Joonis 3.26. Signaaliallikaga sobitatud koormus.

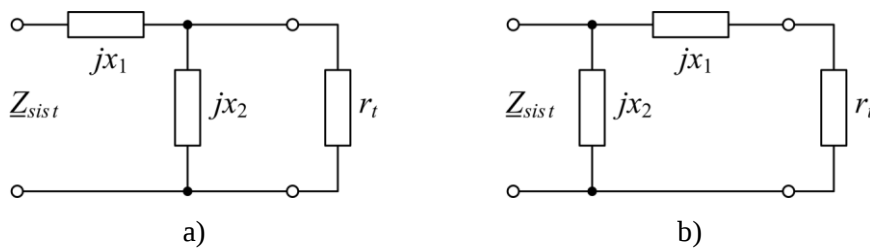
Sellises skeemis on tarbijal maksimaalne võimsus ainult vaadeldaval kindlal sagedusel. Kui näiteks siin suurendada sagedust 2 korda, siis on ahela takistus

$$\underline{Z}'_g + \underline{Z}'_t = 600 + j2 \cdot 800 + 600 - j\frac{800}{2} = 1200 + j1200 \Omega,$$

st koormus ei ole enam sobitatud ja võimsus tarbijal väheneb kaks korda antud U_0 korral.

Mõnikord on tarbija aktiivtakistus r_t füüsikalistel või konstruktiivsetel põhjustel reguleerimatu. Sel juhul on mitmeid skeemivaliku võimalusi, et saada tarbijale maksimaalset aktiivvõimsust.

Sageli kasutatakse lisareaktiivharusid, vt skeemid joonisel 3.27.



Joonis 3.27. Lisareaktiivharude kasutamine aktiivtakisti sobitamiseks toiteallikaga.

Sealjuures peab muidugi säilima seos

$$\underline{Z}_{sist} = r_{sis} + jx_{sis} = \underline{Z}_g^*,$$

kus ekvivalentne sisendtakistus r_{sis} võib oluliselt erineda takistusest r_t – ta võib olla sellest suurem või väiksem. Siinjuures skeemi joon. 3.27a korral on sisendtakistus

$$\underline{Z}_{sis} = r_{sis} + jx_{sis} = jx_1 + \frac{jx_2 r_t}{r_t + jx_2} = \frac{x_2^2 r_t}{r_t^2 + x_2^2} + j \left(x_1 + \frac{x_2 r_t^2}{r_t^2 + x_2^2} \right).$$

Kui sisendtakistuse reaaloosa on võrdne generaatori aktiivtakistusega (sobitamine!), st

$$r_{\text{sis}} = \frac{x_2^2 r_t}{r_t^2 + x_2^2} = r_g,$$

millest

$$x_2 = \pm r_t \sqrt{\frac{r_g}{r_t - r_g}}.$$

Reaalne lahend on vaid siis, kui $r_t > r_g$. Siin võib valida nii $x_2 > 0$ (induktiivsus) kui ka $x_2 < 0$ (mahtuvus). Võttes aluseks võrduse $x_{\text{sis}} = -x_g$, saame

$$x_1 = -\left(x_g + \frac{x_2 r_t^2}{r_t^2 + x_2^2}\right).$$

Asendame siia x_2 avaldise ja lihtsate teisenduste järel saame:

$$x_1 = -\left(x_g \pm \sqrt{r_g (r_t - r_g)}\right).$$

Siin võtame $+\sqrt{}$, kui valisime $x_2 > 0$ (induktiivsus), ja $-\sqrt{}$, kui valisime $x_2 < 0$ (mahtuvus). Siin aga on x_1 ja x_2 reaalsed vaid siis, kui $r_t > r_g$.

Analoogselt saame määrata parameetrid sobitamiseks skeemi joon. 3.27b abil.