

IV PEATÜKK

ELEKTRIAHELATE RESONANTSNÄHTUSED JA SAGEDUSKARAKTERISTIKUD

4.1 Põhimõisted elektriarela resonantsist ja sageduskarakteristikust

Kõrvuti aktiivtakistusega esinevad elektriarelas ka reaktiivtakistused ja reaktiivjuhtivused, kusjuures nad võivad olla positiivse või negatiivse väärtusega (induktiivsed või mahtuvuslikud elemendid). Seega võib esineda juhtumeid, kus ahelas esinevad nii induktiivpoolid kui ka kondensaatorid, kuid ahela sisendreaktiivtakistus või -juhtivus osutuvad võrdseks nulliga, kuna induktiivpoolide ja kondensaatorite reaktiivtakistused või -juhtivused kompenseerivad üksteist:

$$x_{ekv} = 0; \quad b_{ekv} = 0. \quad (4.1)$$

Sealjuures sisendpinge ja -vool langevad faasis kokku ja ahela ekvivalentne sisendtakistus on aktiivne. Sellist nähtust nimetatakse resonantsiks.

Sagedusi, mille korral vaadeldav elektriarela töötab resonantsrežiimis, nimetatakse resonants-sagedusteks.

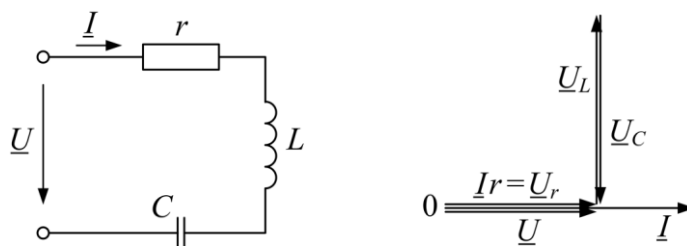
Elektriarelate resonantsrežiimide uurimine on tihedas seoses ahela sageduskarakteristikute tundmaõppimisega. Elektriarela sageduskarakteristikuteks nimetatakse ahela parameetreid r , x , z , g , b ja y sõltuvust sagedusest. Samuti võib sageduskarakteristikutena vaadelda ka voolu ja pinge efektiivväärtuste I ja U sõltuvust sagedusest, aga ka P ja Q sõltuvust sagedusest.

4.2 Resonants jadaahelas

Jadaühenduses rLC -ahela komplekstakistus avaldub:

$$\underline{Z} = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = r + jx = ze^{j\varphi},$$

$$\text{kus } x = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \quad z = \sqrt{r^2 + x^2} \quad \text{ja} \quad \varphi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}.$$



Joonis 4.1. Jadaühenduses rLC -ahel skeem ja selle ahela resonantsolukorra vektordiagramm.

Sellises ahelas saabub resonants, kui $\varphi = 0$ või $x = 0$, s.o kui

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (4.2)$$

Seega resonantsrežiimis induktiiv- ja mahtuvustakistused kompenseerivad teineteist. Tingimusest (4.2) saame avaldada antud L ja C väärtustele vastava resonantsnurksageduse

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.3)$$

Lisaks sageduse reguleerimisele on resonantsi võimalik saavutada ka induktiivsuse või mahtuvuse reguleerimisega:

$$L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}, \quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Kuna resonantsi korral $x_L = x_C$, siis ka omavahel vastasfaasis olevad pinged induktiivsusel $\underline{U}_L$ ja mahtuvusel $\underline{U}_C$ on suuruselt võrdsed ja kompenseerivad teineteist. Siit ka nimetus – **pingeresonants**.

Pingeresonantsi olukorras võivad pinged induktiivsusel U_L ja mahtuvusel U_C tunduvalt ületada ahela toitepinget U , mis ühtlasi võrdub pingega ahela aktiivtakistusel $U_r = U$.

Resonantspunktis on ahela sisendtakistus minimaalne, $z = r$, aga ahela vool saavutab antud pinge U korral resonantsis maksimaalse väärtuse $I_0 = U/r$.

Resonantsi korral on induktiivne ja mahtuvuslik takistus võrdsed:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho. \quad (4.4)$$

Siin suurust ρ nimetame **laine- ehk karakteristlikuks takistuseks** resonantskontuurile.

Resonantsolukorras reaktiivpinge (U_L või U_C) suhet ahela kogupingesse U nimetatakse ahela **hüveteguriks**:

$$\frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\rho I}{rI} = \frac{\rho}{r} = \frac{x_{res}}{r} = Q. \quad (4.5)$$

Seega hüvetegur näitab, mitu korda ahelas reaktiivpinge poolil või kondensaatoril ületab toitepinget. Hüveteguri pöördväärtus on resonantsahela sumbumustegur

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{r}{\rho} = \frac{U}{U_C}. \quad (4.6)$$

Resonantsprotsess on oma olemuselt määratud ahela magnet- ja elektrivälja energiatega muutuste kaudu. Koguenergia on magnet- ja elektrivälja energiatega summa

$$W = W_L + W_C.$$

Olgu vool resonantsolukorras

$$i = I_m \sin \omega_0 t.$$

Mahtuvuse pinge hetkväärtus avaldub siis faasis 90° võrra nihutatult:

$$u_C = U_{Cm} \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = -U_{Cm} \cos \omega_0 t.$$

Seega magnet- ja elektrivälja summaarne energia avaldub:

$$W = W_L + W_C = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t + \frac{CU_{Cm}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t. \quad (4.7)$$

Kuna aga

$$U_{Cm} = \frac{1}{\omega_0 C} I_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m \quad \text{ja} \quad \sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t = 1,$$

siis

$$W_{C\max} = \frac{CU_{Cm}^2}{2} = \frac{C}{2} \left(\sqrt{\frac{L}{C}} I_m \right)^2 = \frac{L}{2} I_m^2 = W_{L\max}$$

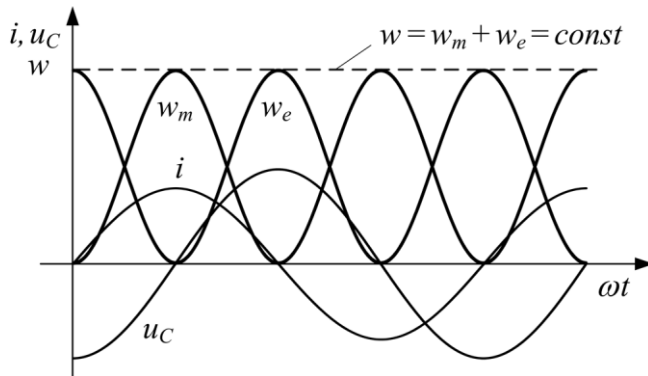
või teisiti

$$W = W_L + W_C = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_{Cm}^2}{2} = \text{const}. \quad (4.8)$$

Toome sisse voolu ja pinge efektiivväärtused energiatesse:

$$W = LI^2 = CU_C^2 = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_{Cm}^2}{2} = \text{const}.$$

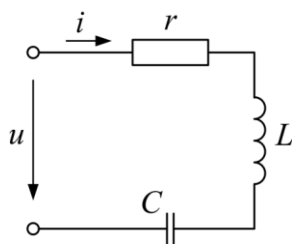
Siit nähtub, et resonantsahelas summaarne reaktiivenergia – s.o magnetvälja ja elektrivälja energiatega summa – ei muutu ajas, kusjuures summaarne energia on võrdne magnetvälja või elektrivälja maksimaalse energiaga. Ajaliselt toimub reaktiivenergia võnkumine induktiiv- ja mahtuvus-elementide vahel.



Joonis 4.2. Magnetvälja ja elektrivälja energia võnkumine L- ja C-elementide vahel.

Kogu toitepinge kaudu resonantsahelasse antav energia eraldub soojusena ahela aktiivtakistil r . Seetõttu toiteallika suhtes ongi kogu ahel ekvivalentne aktiivtakistusele r .

4.3 Sageduskarakteristikud rLC -jadaahelas



Joonis 4.3. Jadaühenduses rLC -ahela skeem.

Olgu r -, L - ja C -elemente sisaldavale jadaahelale rakendatud siinuspinge

$$u = U_m \sin \omega t,$$

mille amplituud on konstantne ($U_m = \text{const}$), aga sagedus f või nurksagedus $\omega = 2\pi f$ võib muutuda vahemikus $0 \dots \infty$.

Nurksageduse ω muutumine tekitab ka ahela kogutakistuse

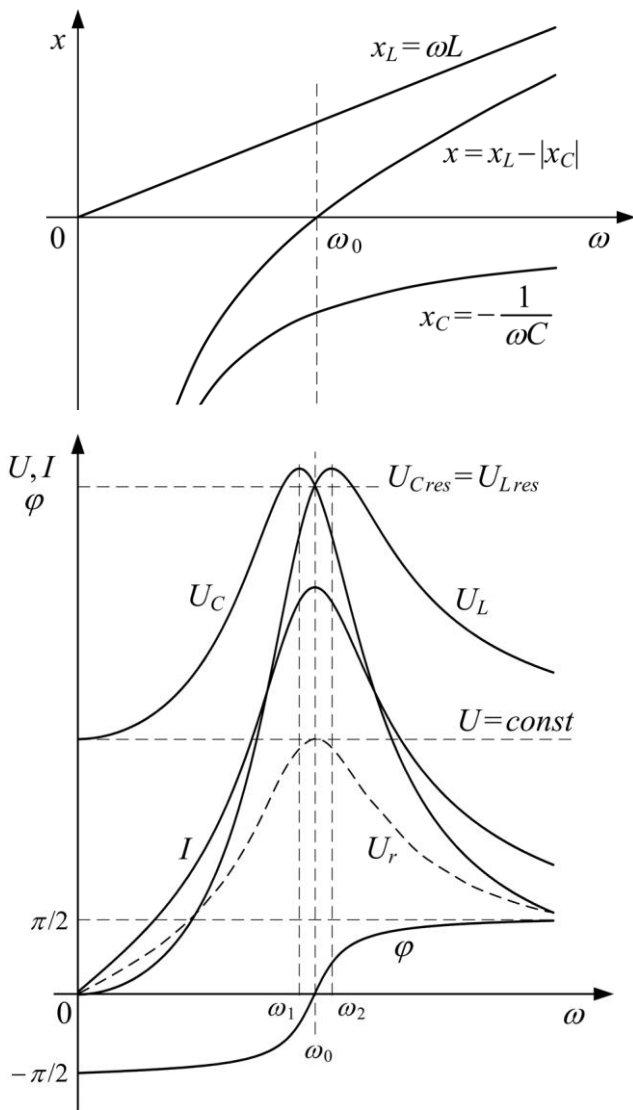
$$\underline{Z} = r + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

muutuse. Kogutakistuse avaldisest selgub, et $r = \text{const} \neq f(f)$, aga samas x , z , $\varphi = f(f)$, s.o sageduse muutudes muutuvad x , z ja φ väärtused.

Elektriahelat iseloomustavate omadustega parameetrite või suuruste sõltuvust sagedusest nimetatakse **sageduskarakteristikuteks**. Sealjuures voolu või pinge sõltuvust sagedusest nimetatakse sageli **resonantskarakteristikuteks**. Jadaühenduses rLC -ahela sageduskarakteristikud on toodud joonisel. Sealjuures ahela reaktiivtakistuse x muutumine tekitab ahelas voolu I muutumise, samuti ahela elementidel pingelangude U muutumise.

Sageduse muutumisel $0 \rightarrow \omega_0$, muutub ahela reaktiivtakistus $-\infty \rightarrow 0$, seega faasinihkenurk φ muutub $-\pi/2 \rightarrow 0$. Kui $\omega = \omega_0$, siis on sisendtakistus minimaalne ($\underline{Z} = r + j0$) ja vool I on maksimaalne ($I = I_0$).

Kui sagedus kasvab resonantsväärtusest suuremaks ($\omega = \omega_0 \rightarrow \infty$), siis ahela reaktiivtakistus kasvab taas induktiivse iseloomu juures $x = x_L - x_C$ ($0 \rightarrow \infty$). Seega vool väheneb maksimaalväärtuselt $I_{\max} = I_0$ kuni $I = 0|_{\omega = \infty}$. Sealjuures ahela nihkenurk $\varphi > 0$ ja kasvab $0^\circ \rightarrow \pi/2$.



Joonis 4.4. Sagedusarakteristikud rLC -jadaahelas.

Pinge $U_r = rI$ muutub võrdeliselt vooluga I ja omandab resonantspunktis, kui $\omega = \omega_0$, väärtuse $U_r = U$.

Pinge $U_L = \omega LI$ algul kasvab nullist kuni maksimumväärtuseni $U_{L\max|\omega=\omega_2}$, kusjuures $\omega_2 > \omega_0$. Sageduse edasisel suurendamisel hakkab pinge U_L vähenema, kui $\omega \rightarrow \infty$, siis $U_L \rightarrow U$.

Pinge $U_C = (1/\omega C)I$ suureneb alguses väärtuselt $U_C = U$ kuni väärtuseni $U_{C\max|\omega=\omega_1}$, kusjuures $\omega_1 < \omega_0$. Sageduse edasisel suurendamisel pinge U_C väheneb ja kui $\omega \rightarrow \infty$, siis $U_C \rightarrow 0$.

Resonantskõver $I(\omega)$ sõltuvalt ahela parameetritest

Et paremini võrrelda erinevatele ahela parameetritele vastavaid resonantskõveraid omavahel, vaatleme neid suhteliste suurustena resonantspunktis esineva voolu maksimumväärtuse suhtes:

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \frac{U}{z} \bigg/ \frac{U}{r} = \frac{r}{z} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)/r\right]^2}}. \end{aligned}$$

Ahela reaktiivtakistus võib olla kirjutatud kujul

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega C \omega_0 L} \right) = \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Kasutades hüveteguri avaldist

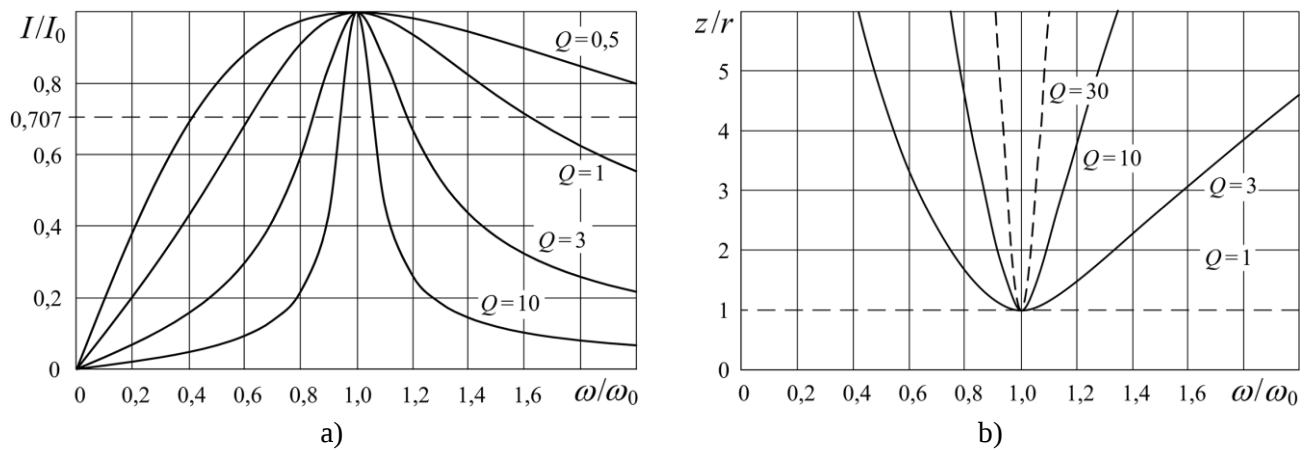
$$Q = \frac{\omega_0 L}{r} = \frac{x_{0L}}{r}$$

saame avaldada:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}. \quad (4.9)$$

Sellest avaldisest nähtub, et resonantskõvera kuju (vt joon. 4.5a) on täielikult määratud ahela hüveteguriga Q . Mida kõrgema väärtusega on ahela hüvetegur Q , seda teravama kujuga on vastav resonantskarakteristik.

Esitatud karakteristikud $I/I_0 = f(\omega/\omega_0)$ (joonis 4.5a) näitavad, et rLC -jadaahelal on teatud sagedusvalivad omadused. Selline rLC -jadaahel laseb vähima suhtelise sisendtakistusega z/r läbi voolu, mille sagedus on lähedane resonantssagedusele (joonis 4.5b).

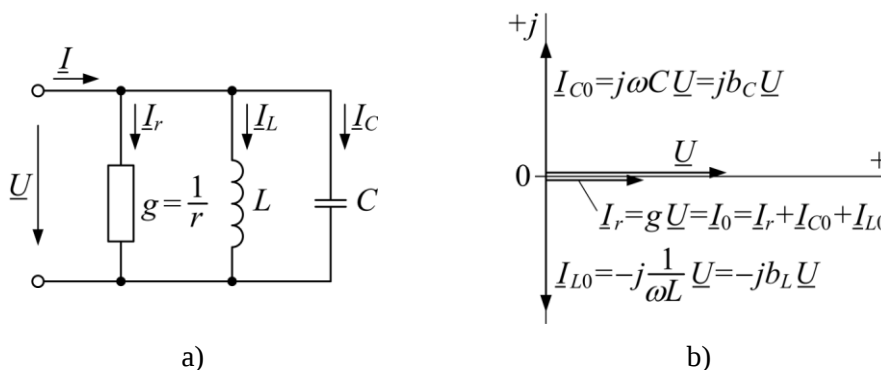


Joonis 4.5. rLC -jadaahela resonantskõvera $I/I_0 = f(\omega/\omega_0)$ (a) ja ahela suhtelise sisendtakistuse z/r (b) sõltuvus ahela parameetritest.

Selliseid jadaühenduses rLC -ahelaid saab tänu nende sagedus-valivatele omadustele kasutada raadioehnikas ja sidetehnikas vastavate filterskeemidena. Niisuguste rLC -jadafiltri avapiirkonnaks loetakse sellise laiusega sagedusriba resonantssageduse lähedal, mille piirsagedustel on vool vähenenud resonantssagedusel esineva maksimaalväärtusega võrreldes $1/\sqrt{2} = 0,707$ korda.

4.4 Resonants r -, L - ja C -elementide rööpühenduse korral

Resonantsi tingimuseks ja tunnuseks r -, L - ja C -elementide rööpühenduse korral on faasinihke puudumine sisendvoolu ja -pinge vahel ($\psi_u - \psi_i = 0$).



Joonis 4.6. rLC -elementide rööpühenduse skeem (a) ja vastav resonantsolukorra vektordiagramm (b).

Sellise ahela sisendjuhtivus avaldub:

$$\underline{Y} = g - j \frac{1}{\omega L} + j\omega C = g - j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) = g - jb = ye^{-j\varphi}, \quad (4.10)$$

kus $g = 1/r$ – aktiivjuhtivus;

$$\varphi = \arctan \frac{b}{g} = \arctan \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{g} \text{ – juhtivuse faasinihkenurk.}$$

Resonantsi tingimuse kohaselt $\varphi = 0$, see tähendab

$$b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C = 0 \quad (4.11)$$

või teisiti

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C, \text{ s.o. } b_L = b_C. \quad (4.12)$$

Resonantsseosed parameetrite vahel:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}; \quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}.$$

Seega resonantsolukorras rööpahela sisendreaktiivjuhtivus on 0, s.o vastastikku kompenseeruvad induktiivsed ja mahtuvuslikud reaktiivjuhtivused.

Resonantsi korral omandab ahela kogujuhtivus minimaalse võimaliku väärtuse $\underline{Y} = g$ ja selle tõttu saavutab vool ahelas minimaalse väärtuse

$$I_0 = y_0 U = g U.$$

Resonantsolukorra vektordiagramm on näidatud joonisel 4.6b.

Kuna ahela sisendvool $\underline{I}$ on summa üksikutest haruvooludest

$$\underline{I} = \underline{I}_r + \underline{I}_L + \underline{I}_C,$$

aga resonantsolukorras on vektorid $\underline{I}_L$ ja $\underline{I}_C$ võrdse pikkusega ja teineteise suhtes vastasfaasis ega avalda mõju üldsisendvoolule, siis võib juhtuda, et väärtuselt ületavad mõlemad reaktiivvoolud sisendvoolu väärtust: $I_C = I_L > I$ või isegi $I_C = I_L \gg I$.

Sellepärast nimetatakse rLC -rööpahela korral resonantsolukorda **vooluresonantsiks**. Koguvool (sisendvool) rLC -rööpahelas resonantsolukorras on võimalik siis, kui

$$g < \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma. \quad (4.13)$$

Siin suurust $\gamma = \sqrt{C/L}$ nimetame **kontuuri lainejuhtivuseks**. Lainejuhtivuse suhe ahela kogujuhtivusse resonantsi korral iseloomustab seda, kui mitu korda reaktiivharu vool resonantsis ületab ahela sisendvoolu ja seda nimetame resonantskontuuri **hüveteguriks**

$$Q_0 = \frac{I_{L0}}{I_0} = \frac{I_{C0}}{I_0} = \frac{\gamma U}{g U} = \frac{\gamma}{g}. \quad (4.14)$$

Hüveteguri pöördväärtus $d = 1/Q_0$ iseloomustab **kontuuri sumbumust**.

Energeetilised protsessid on vooluresonantsi korral analoogsed olukorraga pingeresonantsi puhul, seega $p_L = -p_C$, st hetkväärtuste summa $p_L + p_C = 0$.

Seega toimub **energia võnkumine** induktiivsuse ja mahtuvuse vahel, s.o eksisteerib **võnkekontuur**. Energias tarbib ainult aktiivjuhtivusega haru g , seal eraldub aktiivvõimsus.

4.5 Resonantskarakteristikud rLC -elementide rööpühenduse korral

Joonestame välja reaktiivjuhtivuste, kogujuhtivuse ja nihkenurga φ sõltuvuse nurksagedusest ω rLC -rööpühenduses elektrialhela korral. Ahela reaktiivjuhtivus on

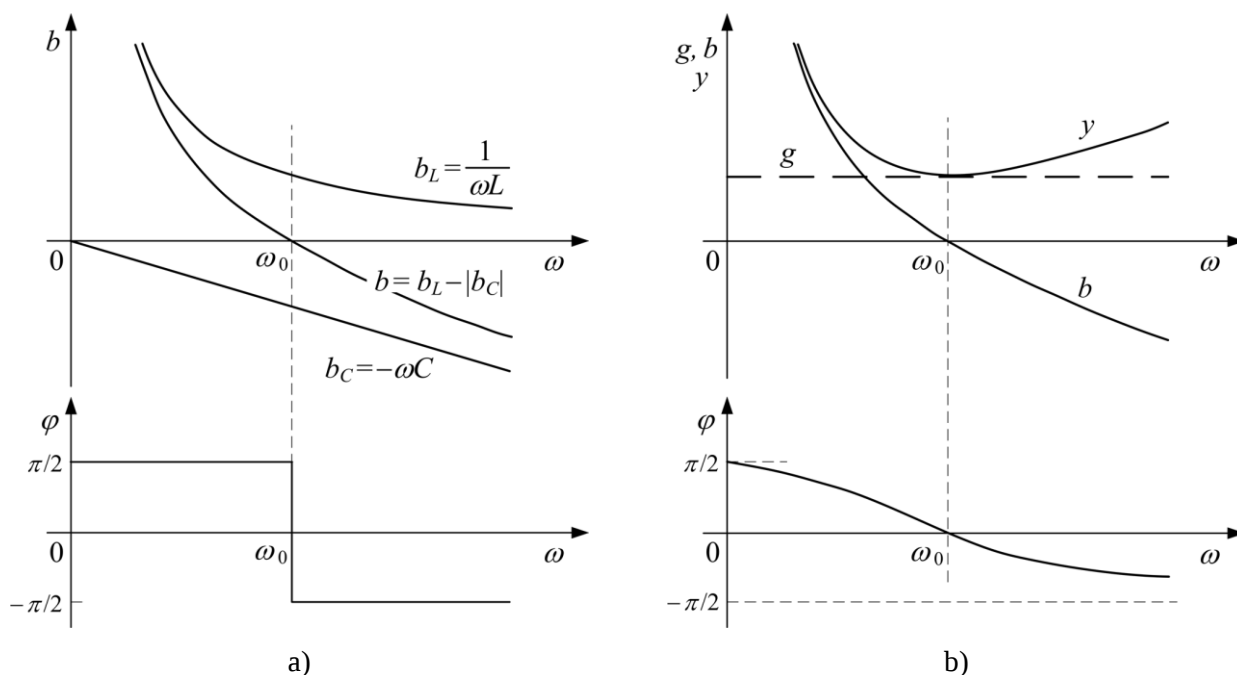
$$b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$$

ning reaktiivjuhtivusel on kaks poolust $\omega = 0$ ja $\omega = \infty$ korral (siis on $b(\omega) = \infty$) ja üks nullpunkt $\omega = \omega_0$, kus $b(\omega) = 0$.

Sõltuvuse $b(\omega)$ kõvera kuju põhjal saab teha järelduse, et nurksageduse suurenemisel reaktiivjuhtivuse algebraline väärtus $b(\omega)$ alati väheneb, s.o

$$\frac{db(\omega)}{d\omega} < 0.$$

See omadus kehtib igasuguste kuitahes keerukate struktuuridega ahelate reaktiivjuhtivuse kohta juhul, kui ahelas puuduvad aktiivkaod.



Joonis 4.7. rLC -elementide rööpühenduses elektri ahela resonantskarakteristikud.

Sageduse suurendamisel punkti ω_0 , s.o resonantspunkti läbimisel muutub ahela iseloom, s.o reaktiivjuhtivuse iseloom. Kui rLC -rööpahelas $\omega < \omega_0$, siis on ahel induktiivse iseloomuga, kui aga $\omega > \omega_0$, siis mahtuvusliku iseloomuga. Erijuhtumil, kui ahel on kaovaba, s.o $g = 0$, siis ahela iseloomu muutus toimub hüppeliselt $\omega = \omega_0$ korral ja faasinihkenurk muutub resonantspunktis hüppeliselt 180° võrra: $\varphi = \pi/2 \rightarrow \varphi = -\pi/2$.

Reaalsete ahelate korral aga $g \neq 0$. Siis on sageduskarakteristikud $y(\omega)$ ja $\varphi(\omega)$ teistsuguse kujuga, seosed nende saamiseks avalduvad järgmiselt:

$$y = \sqrt{g^2 + b^2}; \quad g = \text{const}; \quad \varphi = \arctan \frac{b(\omega)}{g}.$$

Siinuselise toitepinge $u = U_m \sin \omega t$ korral, mille efektiivväärtus on $U = \text{const}$, avalduvad voolu sageduskarakteristikud $I(\omega)$, $I_L(\omega)$, ja I_C järgmiselt:

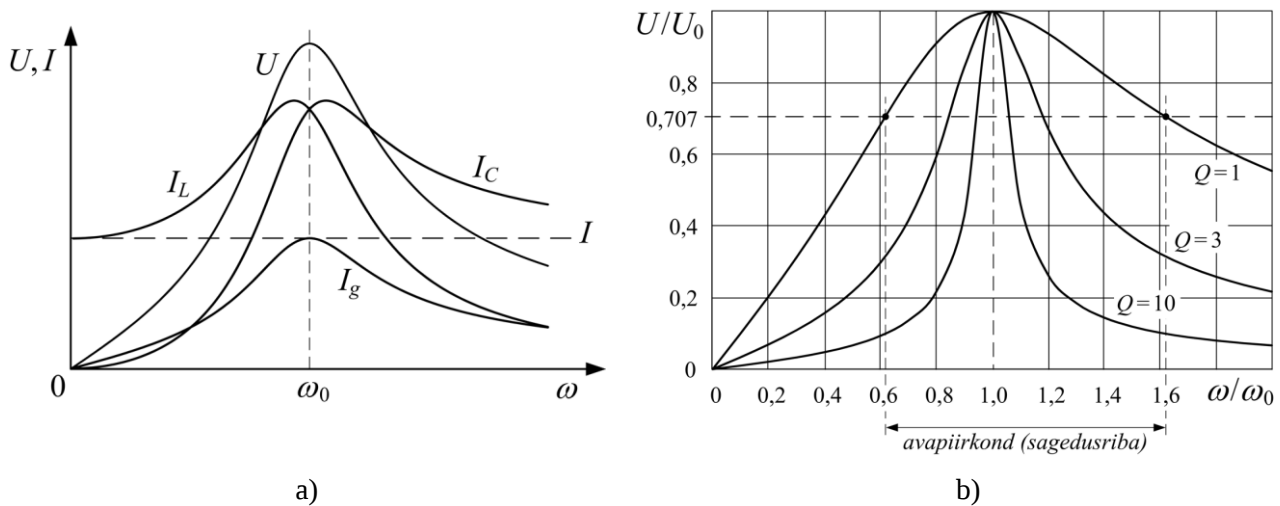
$$I(\omega) = y(\omega)U; \quad I_L(\omega) = b_L(\omega)U; \quad I_C(\omega) = b_C(\omega)U.$$

Sageduskarakteristik $U(\omega)$ avaldub analüütiliselt, kui $I = \text{const}$, $g = \text{const}$, $L = \text{const}$ ja $C = \text{const}$:

$$U(\omega) = \frac{I}{y(\omega)} = \frac{I}{\sqrt{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}. \quad (4.15)$$

Siia joonestame kõverad $I_g(\omega) = gU(\omega)$; $I_L(\omega) = U(\omega)/\omega L$; $I_C(\omega) = \omega CU(\omega)$.

Kui $\omega = 0$, siis $U = 0$, sest kogu vool läbib induktiivsust, mille takistus $\rightarrow 0$. Kui $\omega = \infty$, siis $U = 0$, kuna kogu vool läbib siis kondensaatorit, mille takistus $\rightarrow 0$. Resonantsi korral $\omega = \omega_0$, siis $I_L = I_C$.



Joonis 4.8. rLC -elementide rööpühenduses elektriavala sagedusarakteristikud, kui $I = \text{const}$.

Huvi pakub sõltuvus $U/U_0 = f(y)$, kus $U_0 = I/g$ ja $y = \omega/\omega_0$, ning selle põhjal joonestatud sagedusarakteristikud erinevate Q_0 väärtuste korral. Selgub, et need kõverad on analoogsed pingeresonantsi korral saadud kõveratega $I/I_0 = f(\omega/\omega_0)$, kui asendada vastavalt $I \rightarrow U$, $L \rightarrow C$, $r \rightarrow g$ ja vastupidi. Selliseid ahelaid nimetatakse duaalseteks.

4.6 Vooluresonants liitharudega rööpahelas

Vooluresonants võib tekkida kahe või mitme rööpharu korral, milles on induktiiv- ja mahtuvuselemente ja mille summaarne reaktiivjuhtivus on null, s.o sisendvool ja -pinge on omavahel faasis kokkulangevad. Vaatleme näiteks elektriavelat, mille ühes harus on r_1 ja L ; teises aga r_2 ja C (joonis 4.9). Selle ahela sisendjuhtivus

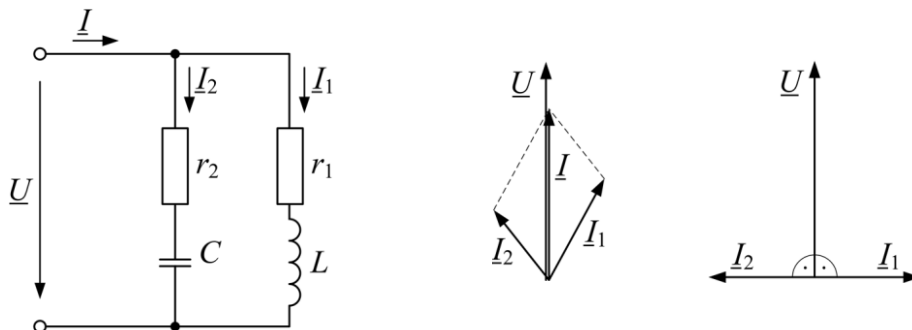
$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = (g_1 + g_2) + j(-b_1 + b_2),$$

kusjuures

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{r_1 + j\omega L} = \frac{r_1 - j\omega L}{r_1^2 + (\omega L)^2} = g_1 - jb_1$$

ja

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{r_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{r_2 + j\frac{1}{\omega C}}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = g_2 + jb_2.$$



Joonis 4.9. Liitharudega r, L, C -rööpahela skeem ja selle vektordiagrammid.

Resonantstingimuse kohaselt $b = -b_1 + b_2 = 0$ ehk teisiti

$$b_1 = \frac{\omega L}{r_1^2 + (\omega L)^2}$$

ja

$$b_2 = \frac{\frac{1}{\omega C}}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

seega

$$\frac{\omega L}{r_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Resonants saab tekkida, kui $L = \text{var}$ või $C = \text{var}$ või $\omega = \text{var}$, siit **resonantssagedus**

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - r_1^2}{\frac{L}{C} - r_2^2}}. \quad (4.16)$$

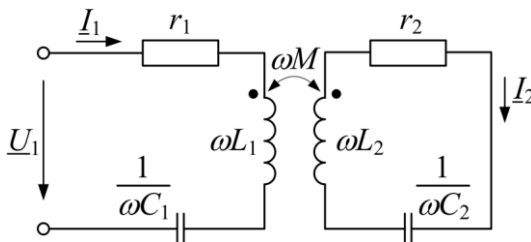
Erandjuhul, kui $r_1 = r_2 = 0$, siis

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

s.o samasugune kuju nagu jadaahelas. Ideaalsel juhul, kui $r_1 = r_2 = 0$, on voolud harudes võrdsed ja vastasfaasis, s.o $\underline{I}_1 = -\underline{I}_2$ (vooluresonants), samal ajal koguvool $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0$ ja sisendtakistus $\underline{Z}_{\text{sis}} = \infty$ (ideaalne võnkekontuur).

4.7 Resonants vastastikuse induktiivsusega sidestatud kontuurides

Vaatleme resonantsnähtusi ahelas, mis koosneb kahest vastastikuse induktiivsusega sidestatud kontuurist (joon. 4.10). Sellised vastastikuse induktiivsusega kõrge hüveteguriga resonantsahelaid kasutatakse sageli sidetehnikas ja raadiotehnikas. Sageli, kui $Q \gg 1$, võib r_2 väärtuse lihtsustamiseks vaatluse alt välja jätta ($r_2 \rightarrow 0$).



Joonis 4.10. Vastastikuse induktiivsusega sidestatud kahe r, L, C -kontuuri skeem.

Tähistame kummagi kontuuri resonantssageduse vastavalt $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ ja $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C_2}$, kui jätta arvestamata vastastikuse induktiivsuse tõttu kontuuride sidestus.

Kuna aga reaalselt on vastastikuse induktiivsuse M mõju elektri ahela kontuuride vahel olemas, siis kirjutame seda mõju arvestades sidestatud võrrandid kontuuridele (lihtsustamiseks loeme $r_2 = 0$):

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{I}_1 \left[r_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \right] - j\omega M \underline{I}_2 \\ 0 &= -j\omega M \underline{I}_1 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \underline{I}_2 \end{aligned} \right\}. \quad (4.17)$$

Siit saame

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \left[r_1 + j \underbrace{\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} - \frac{\omega^2 M}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}} \right)}_{x_{1-\Delta x}} \right] = \underline{I}_1 (r_1 + jx_{1ekv}).$$

Pingeresonantsi tingimuse kohaselt on ahela ekvivalentne reaktiivtakistus $x_{1ekv} = 0$, seega

$$\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) = \omega^2 M^2.$$

Jagame avaldise mõlemad pooled suurusega $(\omega L_1) \cdot (\omega L_2)$ ja saame

$$\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega^2} \right) = k^2$$

ehk

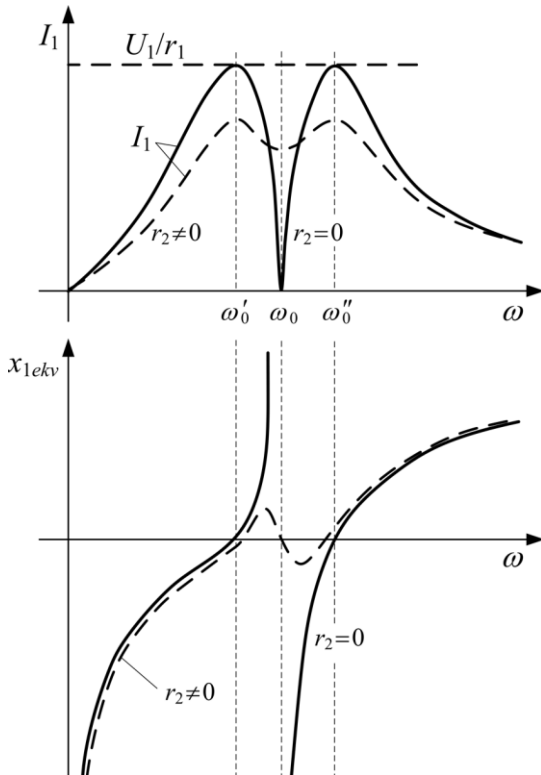
$$(1 - k^2) \omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \omega^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0, \quad (4.18)$$

kus $k^2 = M^2 / L_1 L_2 < 1$ on sidestusteguri ruutväärtus,

ω_1 ja ω_2 – kontuuride omavõnkesagedused.

Lahendades võrrandi (6.18) sageduse ω suhtes, saame resonantssagedusteks

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4(1 - k^2)\omega_1^2 \omega_2^2}}{2(1 - k^2)}}, \quad (4.19)$$



Joonis 4.11. Vastastikuse induktiivsusega sidestatud kahe r, L, C -kontuuri sageduskarakteristikud $I_1(\omega)$ ja $x_{1ekv}(\omega)$.

kust selgub, et sellises ahelas saab pingeresonants esineda kahel erineval sagedusel ω'_0 ja ω''_0 (lahendis märgid $\pm$).

Selle lahendi erikuju juhul, kui mõlema kontuuri omavõnkesagedused olid häälestatud võrdseteks ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$), on

$$\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{\frac{1 \pm k}{1 - k^2}}$$

ehk

$$\omega'_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + k}} \quad \text{ja} \quad \omega''_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - k}}, \quad (4.20)$$

kus $\omega'_0 < \omega_0 < \omega''_0$.

Seega sagedustel ω'_0 ja ω''_0 on $Z_{1sis} = r_1$ ja on minimaalne, vool aga maksimaalne $I_1 = U_1 / r_1$. Kui $\omega = \omega_0$, siis

$$x_1 = \left(\omega_0 L_1 - \frac{1}{\omega_0 C_1} \right) - \frac{\omega_0^2 M^2}{\omega_0 L_2 - \frac{1}{\omega_0 C_2}} = \infty$$

ja selles punktis $I_1 = 0$. Aga see on nii vaid siis, kui

$r_2 = 0$. Joonisel 4.11 on toodud sellise ahela sageduskarakteristikud $I_1(\omega)$ ja $x_{1ekv}(\omega)$, kui $U_1 = \text{const}$. Funktsiooni $x_1(\omega)$ poolusteks (s.o $x_1 \rightarrow \infty$) on sagedused $\omega = 0$, $\omega = \omega_0$ ja $\omega = \infty$. Nullkohtadeks aga on $\omega = \omega'_0$ ja $\omega = \omega''_0$. Sealjuures igal lõigul on $dx_{1ekv}/d\omega > 0$ ning poolused ja nullid vahelduvad.

Kui $r \neq 0$, siis on sageduskarakteristikud $I_1(\omega)$ ja $x_{1ekv}(\omega)$ joonisel 4.11 kujutatud pidevjoonega (–). Sealjuures saadakse ω_{res} väärtused 6ndat järku võrrandi lahendina, sellele vastab kolm resonantssagedust. Nendel sagedustel $\underline{Z}_{1sis} = r_1 + \Delta r$, kus Δr arvestab sekundaarahela r_2 mõju.