

HAJUPARAMEETRITEGA AHELAD

(LIINID)

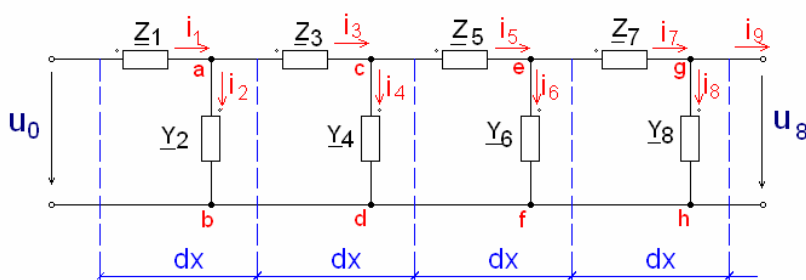
1. Põhimõisted	2
2. Homogeense liini diferentsiaalvõrrandid	3
3. Homogeense liini siinuseline režiim	5
4. Kulglained homogeenses liinis	9
5. Lainetakistusega koormatud homogeenne liin.....	11
6. Homogeense liini karakteristikud parameetrid	12
7. Moonutusvaba homogeenne liin	13
8. Kaovaba homogeenne liin	14
9. Veerandlainetrafo (sobitustrafo)	17
10. Homogeense liini mõningate põhiseoste määramine	18

1. Põhimõisted

Siiani vaatlesime **koondparameetritega** ahelaid, seal on elektri- ja magnetväli ning sellega seotud nähtused **kontsentreeritud** konkreetsetele elektriahela elementidele.

Energiaülekanделиinides, samuti sideliinides on aga **elektromagnetiline väli jaotunud kogu liini piikuse ulatuses**, ka on **soojusena** eralduvad **aktiivkaod jaotunud kogu liini pikkuses**. Seega on ka liini iseloomustavad parameetrid L , C , R ja G jaotunud liini pikkuse ulatuses. Selliseid ahelaid nimetatakse **jaotatud parameetritega** ehk **hajuparameetritega ahelateks**.

Toome sisse liini **pikitakistuse** ja **põikijuhtivuse** mõisted, mis kirjeldavad vastavalt liinijuhtmete aktiivtakistuse ja induktiivsuse mõju ning juhtmetevahelise isolatsioonikihi juhtivuse (lekkejuhtivuse) ja mahtuvuse mõju.



Sel juhul võiksime liini ette kujutada järgmise aseskeemi abil:

Seega on olemas lekkevoolu mõju:

$$i_3 \neq i_1; \quad i_3 = i_1 - i_2 \text{ jne.}$$

$$i_9 = i_1 - i_2 - i_4 - i_6 - i_8$$

Ka pinge liini pikkuses muutub

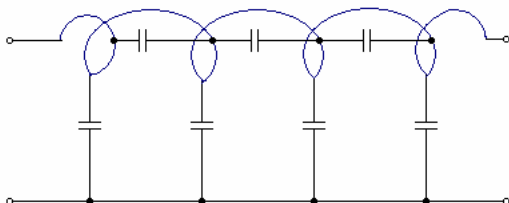
$$u_8 \neq u_0$$

$$u_8 = u_0 - i_1 z_1 - i_3 z_3 - i_5 z_5 - i_7 z_7$$

Hajuparameetritega liini nimetatakse **homogeenseks**, kui tema kõikide lõikude **pikitakistused** ja **põikijuhtivused** ühikulise pikkuse kohta on ühesugused.

Sealjuures lineaarsetes liinides ei sõltu liini ühikpikkuse parameetrid vooludest ega pingetest liinis.

Lisaks **elektriliste hajuparameetritega** liinidele võib samasugust parameetrite jagunemist märgata ka **magnetilistes hajuparameetritega ahelates**. Näiteks traadist mähitud **induktiivpool** kujutab endast samuti hajuparameetritega ahelat, mille aseskeemi võiks tinglikult kujutada järgmisel viisil:



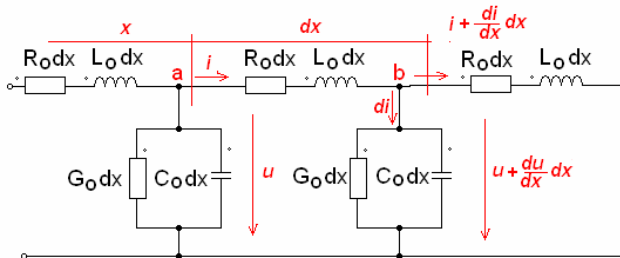
Arvestada tuleb pikiinduktiivsust ja aktiivtakistust, samuti keerdudevahelisi mahtuvusi. Eriti tuntav on mahtuvuslik hajuelementide mõju **kõrgematel** sagedustel, läbi mahtuvuste tekib märkimisväärne vool.

Väga kõrgetel sagedustel (kümned GHz) võib aga vool minna valdavalt mahtuvuslikuks ja näivalt on sellise pooli sisetakistus **mahtuvuslik**.

Meie oma kursuses vaatleme põhiliselt elektrilisi hajuparameetritega liine.

2. Homogeense liini diferentsiaalvõrrandid

Olgu homogeense liini **pikkusühiku kohta** teada järgmised parameetrid: pikitakistus R_0 ja –induktiivsus L_0 ; põikijuhtivus G_0 ja –mahtuvus C_0 . Siis võime liinielementi ning selle voolu- ja pingeaotust kujutada ette järgmiselt:



Peame arvestama, et liinis nii vool i kui pinge u on sõltuvad nii ajast t kui ka kaugusest liini alguspunktist x .

Olgu **mingil ajahetkel** t liinipunktist a (kaugusel x) väljuv vool i ja pinge liinijuhtmete vahel u ; liinipunktis b , mis asub punktist a kaugusel dx ja liini algusest $x+dx$, olgu vool vastavalt **samal hetkel** $i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$ ja pinge $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$. Liinilõigul dx tekib pikisuunaline pingelang ($R_0 dx i$) ja $\left(L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} \right)$.

Seega võime kontuuri kohta dx ulatuses kirjutada võrrandi Kirchhoffi II seaduse alusel:

$$-u + R_0 dx \cdot i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0.$$

Pärast lihtsustamist ja jagamist suurusega dx saame:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 i. \quad (*)$$

Kirchhoffi I seaduse põhjal saame sõlmes b

$$i = di + i + \frac{\partial i}{\partial x} dx.$$

Aga vool di on võrdne summaga vooludest läbi **põikijuhtivuse** ($G_0 dx$) ja **–mahtuvuse** ($C_0 dx$):

$$di = di_{G_0} + di_{C_0},$$

$$di_{C_0} = C_0 \frac{\partial u_C}{\partial t} = C_0 \frac{\partial u}{\partial t} dx + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} d^2 x \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$C_0 \frac{\partial u}{\partial t} d^2 x \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

$$G_0 dx + C_0 dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$di = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right).$$

Jätame siit kõrvale 2. järku väiksusega komponendid ja saame:

$$di = u G_0 dx + C_0 dx \frac{\partial u}{\partial x},$$

kus uG_0dx – juhtivusvool, so lekkevool läbi isolatsiooni;

$C_0dx \frac{\partial u}{\partial x}$ – nihkevool.

Asendades di avaldise Kirchhoffi I seaduse põhjal saadud võrrandisse leiame: dx

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (**)$$

Need (*) ja (**) osatuletistega võrrandid ongi **homogeense liini diferentsiaalvõrrandid**.

Need võimaldavad etteantud algtingimuste ja piiritingimuste korral leida liinis pinge ja voolu jaotuse x - ja t -funktsioonidena.

3. Homogeense liini siinuseline režiim

Olgu homogeense liini klemmidele rakendatud siinuspinge

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

ja voolaku liinijuhtmeis siinusvool

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i).$$

Kasutades sümbolimeetodit, kujutame liini pingeid ja vooluid kompleksidena.

$$U_m e^{j\omega t} e^{j\varphi_u} = U \cdot \sqrt{2} e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} = \dot{U} \sqrt{2} e^{j\omega t}$$

ja

$$I_m e^{j\omega t} e^{j\varphi_i} = I \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = \dot{I} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}.$$

Seega, kui liini ulatuses nii pinge kui ka vool on tegelikult üheaegselt sõltuvuses nii ajast t (ωt kaudu) kui ka kaugusest x liini algusest, siis nendes kompleksides oleme eraldanud muutujad t -järgi ($e^{j\omega t}$ kaudu) ja x -järgi $[\dot{U}(x)$ ja $\dot{I}(x)]$.

Seega saame homogeense liini põhivõrrandites üle minna **osatuletistelt** täistuletistele:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow e^{j\omega t} \frac{d\dot{U}}{dx}; \\ L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \rightarrow L_0 \dot{I} \frac{d}{dt} e^{j\omega t} = j\omega L_0 \dot{I} e^{j\omega t}; \\ \frac{\partial i}{\partial x} \rightarrow e^{j\omega t} \cdot \frac{d\dot{I}}{dx}; \\ C_0 \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow j\omega C_0 \dot{U} e^{j\omega t} \end{cases}.$$

Asendame need täistuletisavaldised homogeense liini põhivõrrandite üldavaldistesse (*) ja (**) ning saame, taandades kordaja $e^{j\omega t}$:

$$-\frac{d\dot{U}}{dx} = \underline{z}_0 \dot{I}, \text{ kus } \underline{z}_0 = R_0 + j\omega L_0 \text{ (pikitakistus ühikulisele pikkusele),}$$

$$-\frac{d\dot{I}}{dx} = \underline{Y}_0 \dot{U}, \text{ kus } \underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 \text{ (põikijuhtivus ühikpikkusele).}$$

Võtame esimesest avaldisest tuletise x -järgi ja asendades sellesse 2. avaldise, saame:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \underline{z}_0 \underline{Y}_0 \dot{U}.$$

Toome sisse uue muutuja $\sqrt{\underline{z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \gamma$ – **levitegur**.

Siis saame teist järku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} - \gamma^2 \dot{U} = 0.$$

Sellise diferentsiaalvõrrandi üldlahend on kujul:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{+\gamma x},$$

kus $\dot{A}_1$ ja $\dot{A}_2$ – **komplekssed integreerimiskonstandid**, mis edaspidi määratakse pinge ja voolu väärtuste kaudu liini alguses või liini lõpus.

Levitegur γ avaldub

$$\gamma = \alpha + j\beta,$$

kus α – sumbuustegur [Np/km],

β – faasitegur [rad/km].

Voolukompleksi väärtus liini suvalises punktis on:

$$\dot{I} = -\frac{1}{\underline{z}_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x}}{\underline{z}_0 / \gamma}.$$

Siinjuures

$$\underline{z}_0 / \gamma = \frac{\underline{z}_0}{\sqrt{\underline{z}_0 \cdot \underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{\underline{z}_0}{\underline{Y}_0}}$$

on liini lainetakistus;

$$\underline{z}_B = \sqrt{\frac{\underline{z}_0}{\underline{Y}_0}} = \underline{z}_B e^{j\varphi_B}.$$

Seega avaldub vool teisiti:

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{\underline{z}_B} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_2}{\underline{z}_B} e^{\gamma x}.$$

Määrame integreerimiskonstandid $\dot{A}_1$ ja $\dot{A}_2$, kui ette võtta liini alguses ($x = 0$) pinge $\dot{U}_1$ ja vool $\dot{I}_1$. Kuna $x = 0$, siis saame

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{A}_1 + \dot{A}_2; \\ \dot{I}_1 \underline{z}_B &= \dot{A}_1 - \dot{A}_2 \end{aligned} \right\}$$

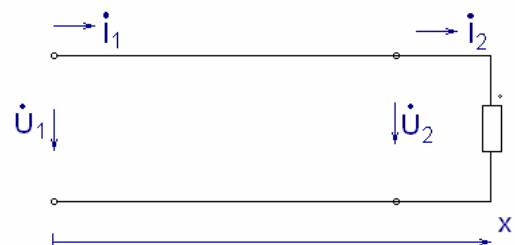
$$+\dot{u}_1 + \dot{I}_1 \underline{z}_C = 2\dot{A}_1$$

$$-\dot{u}_1 - \dot{I}_1 \underline{z}_C = 2\dot{A}_2$$

Siit avalduvad integreerimiskonstandid

$$\dot{A}_1 = 0,5(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{z}_B),$$

$$\dot{A}_2 = 0,5(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{z}_B).$$



Seega avalduvad vool ja pinge liini suvalises punktis:

$$\begin{cases} \dot{U} = 0,5(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{z}_B) e^{-\gamma x} + 0,5(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{z}_B) e^{\gamma x}; \\ \dot{I} = 0,5\left(\dot{I}_1 + \frac{\dot{U}_1}{\underline{z}_B}\right) e^{-\gamma x} + 0,5\left(\dot{I}_1 - \frac{\dot{U}_1}{\underline{z}_B}\right) e^{\gamma x}. \end{cases}$$

Liini pinge ja voolu saab esitada ka hüperboolsete funktsioonide kaudu, kuna

$$\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} = ch(\gamma x); \quad \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = sh(\gamma x).$$

Seega pinge ja vool võib olla avaldatud:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_1 ch \gamma x - \dot{I}_1 \underline{z}_B sh \gamma x; \\ \dot{I} = \dot{I}_1 ch \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{\underline{z}_B} sh \gamma x. \end{cases}$$

Liini pinge ja vool võib olla antud ka lähtudes pingest ja voolust liini lõpus ($\dot{U}_2$ ja $\dot{I}_2$):

$$\begin{cases} \dot{U} = 0,5(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{z}_B) e^{\gamma x} + 0,5(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{z}_B) e^{-\gamma x}; \\ \dot{I} = 0,5\left(\dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2}{\underline{z}_B}\right) e^{\gamma x} + 0,5\left(\dot{I}_2 - \frac{\dot{U}_2}{\underline{z}_B}\right) e^{-\gamma x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 ch \gamma x + \dot{I}_2 \underline{z}_B sh \gamma x; \\ \dot{I} = \dot{I}_2 ch \gamma x + \frac{\dot{U}_2}{\underline{z}_B} sh \gamma x. \end{cases}$$

Võib näha sarnasust homogeense liini ja sümmeetrilise neliklemmi voolude ja pingete seostes. **Seega võib homogeense liini tööd ette kujutada kui lõpmatu arvu jadamisi ühendatud sümmeetriliste neliklemmide või ahellulituste komplekti.**

Kui aga pidada silmas vaid seoseid sisend- ja väljundpinge ning voolu vahel, siis võib homogeense liini asendada sümmeetrilise neliklemmiga, mille A -parameetrid avalduvad

$$\begin{cases} A = D = ch \varphi l \\ B = \underline{z}_B sh \varphi l \\ C = \frac{sh \varphi l}{\underline{z}_B} \end{cases}.$$

Kehtib ka pööratavuse tingimus:

$$AD - BC = ch^2 \varphi l - sh^2 \varphi l = 1.$$

Kui asendada homogeenne liin T-kujulise aseskeemiga, siis selle parameetrid avalduvad:

$$\begin{cases} \underline{z}_1 = \underline{z}_2 = \underline{z}_B \frac{ch \varphi l - 1}{sh \varphi l} = \underline{z}_B \frac{sh \varphi l}{ch \varphi l + 1}; \\ \underline{Y}_0 = \frac{sh \varphi l}{\underline{z}_B} \end{cases}.$$

Π -kujulise sümmeetrilise neliklemmi korral on need seosed:

$$\begin{cases} \underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \frac{ch\gamma - 1}{\underline{z}_B \cdot sh\gamma} = \underline{z}_B \frac{sh\gamma}{\underline{z}_B(ch\gamma + 1)}; \\ \underline{z}_0 = \underline{z}_B \cdot sh\gamma. \end{cases}$$

4. Kulglained homogeenes liinis

Pinge jaotumise kirjeldus homogeenes liinis võrrandi kujul:

$$\dot{U} = 0,5(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 z_B) e^{-\gamma x} + 0,5(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 z_B) e^{\gamma x}.$$

Kasutades leviteguri avaldist

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

toome selle pingeavaldise kummagi poole tähistamiseks sisse uued muutujad:

$$\dot{U}_\varphi = 0,5(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 z_B) e^{-\gamma x} = \dot{U}_\varphi e^{-\gamma x} = U_\varphi e^{j\xi} e^{-\gamma x};$$

$$0,5(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 z_B) = \dot{U}_\psi$$

$$\dot{U}_\psi = 0,5(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 z_B) e^{\gamma x} = \dot{U}_\psi e^{\gamma x} = U_\psi e^{j\eta} e^{\gamma x}.$$

Kogupinge avaldub nende komponentide kaudu komplekskujul:

$$\dot{U} = \dot{U}_\varphi + \dot{U}_\psi = \dot{U}_\varphi e^{-\gamma x} + U_\psi e^{\gamma x} = U_\varphi e^{-\alpha x} e^{j(\xi - \beta x)} + U_\psi e^{\alpha x} e^{j(\eta + \beta x)}.$$

Kasutatavad komplekspinged kirjeldavad siinuseliselt muutuvaid suurusi. Läheme pinge kompleksidelt üle nende poolt kujutatavatele siinuspingetele: $\dot{U}_m e^{j\omega t} = \dot{U} \sqrt{2} e^{j\omega t} \rightarrow u(t)$; pinge hetkväärtus kaugusel x liini algusest

$$u(t) = u_\varphi(t) + u_\psi(t) = \sqrt{2} U_\varphi e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \xi - \beta x) + \sqrt{2} U_\psi e^{\alpha x} \sin(\omega t + \eta + \beta x).$$

Pingekomponenti $u_\varphi(t)$ nimetatakse **langevaks** ehk **päripingeks**, $u_\psi(t)$ on aga **peegeldunud** ehk **vastupinge** komponent.

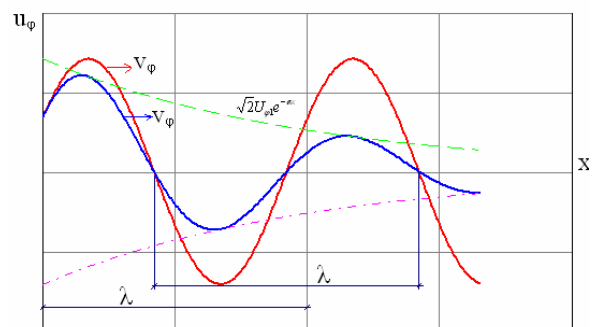
Vaatleme olukorda, kus liinis ei toimu pinge sumbumist, so $\alpha = 0$ ja $e^{\alpha x} = 1$. Siis päripinge komponent kaugusel x liini algusest on:

$$u_\varphi(t) = \sqrt{2} U_\varphi \cdot \sin(\omega t + \xi - \beta x).$$

$$\xi - \beta x = \varphi_u(x)$$

See on siinuseline pinge, mille algfaas $\varphi_u(x) = \xi - \beta x$ sõltub vaatluspunkti kaugusest liini algusest ja mis jaotub igal ajahetkel $t = \text{const}$ piki liini siinuseliselt (vt joonis).

Kui piki liini liikudes pinge muutub siinusfunktsiooni järgi, siis teatud liinipikkuse läbimise järel jõutakse punkti, kus pinge algfaasid erinevad 2π võrra.



Sellist lühimat liinipikkust nimetatakse lainepikkuseks λ , mille kohta saame seose:

$$\sin(\beta x) = \sin \beta(x + \lambda)$$

ehk siit

$$\beta(x + \lambda) = \beta x + 2\pi$$

ja edasi lainepikkus avaldub

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}.$$

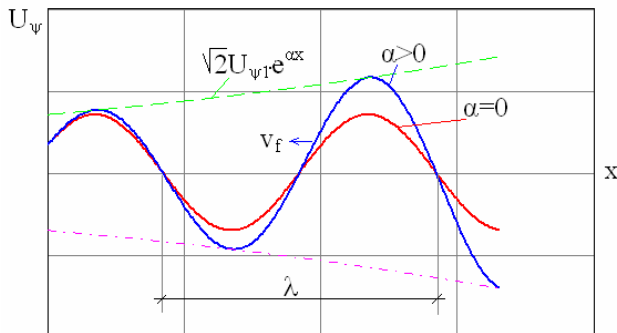
Ajafunktsioonina levib päripingelaine piki liini kiirusega

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \lambda \cdot f \text{ liini algusest lõpu suunas.}$$

See on **faasikiirus**, sellise kiirusega levib liini algusest lõpu suunas siinusfunktsiooni kõvera punkt, mille faasinihe on konstantne (ei sõltu x ega t väärtusest).

Kui liini sumbuvus pole null ($\alpha \neq 0$), siis pinge pärilaine liini algusest lõpu suunas väheneb (—). Analoogselt jaotub piki liini **vastu-** ehk **peegeldunud** pinge

$$u_\psi(t) = \sqrt{2}U_{\varphi 1} \cdot \sin(\omega t + \eta + \beta x)$$



Selliseid laineid, mis liiguvad teatud suunas (kas liini lõpu suunas (pärilaine) või liini alguse suunas (vastulaine)) faasikiirusega v_f , nimetatakse kulglaineteks.

Ka liinivoolu avaldist saab esitada **päri-** ja **vastulainete** kaudu:

$$\dot{I} = \dot{I}_\varphi + \dot{I}_\psi = \dot{I}_{\varphi 1} e^{-\alpha} e^{-j\beta x} + \dot{I}_{\psi 1} e^{\alpha} e^{j\beta x},$$

kusjuures langeva ehk pärilaine ja peegelduva ehk vastulaine voolukompleksi väärtused liini alguses ($x = 0$) avalduvad:

$$\dot{I}_{\varphi 1} = 0,5 \left(\frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_B} + \dot{I}_1 \right) = I_{\varphi 1} e^{j\nu};$$

$$\dot{I}_{\psi 1} = 0,5 \left(\dot{I}_1 - \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_B} \right) = I_{\psi 1} e^{j\mu}.$$

Seega voolu hetkväärtus kaugusel x liini algusest on:

$$i(t) = i_\varphi(t) + i_\psi(t) = \sqrt{2}I_{\varphi 1} e^{-\alpha} \sin(\omega t + \nu - \beta x) + \sqrt{2}I_{\psi 1} e^{\alpha} \sin(\omega t + \mu + \beta x).$$

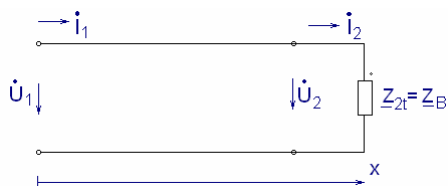
Need on voolu kulglained.

Liini suvalises punktis x on pinge ja voolu kompleksefektiivväärtuste suhe võrdne lainetakistusega pärilainetele ja (—) lainetakistusega vastulainetele.

$$\frac{\dot{U}_\varphi(x)}{\dot{I}_\varphi(x)} = \underline{Z}_B; \quad \frac{\dot{U}_\psi(x)}{\dot{I}_\psi(x)} = -\underline{Z}_B.$$

Need suhted ei sõltu liini lõpu ühendatud koormustakistuse $\underline{Z}_{2t}$ väärtusest.

5. Lainetakistusega koormatud homogeenne liin



Olgu liini lõpus koormustakistus, mille väärtus on võrdne lainetakistusega. Sel juhul avaldub liini lõpus pinge

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_{2l} = \dot{I}_2 \underline{Z}_B$$

Seega homogeenne liini suvalises punktis kogupinge ja –vool avalduvad (tuletatud pingevõrrandist)

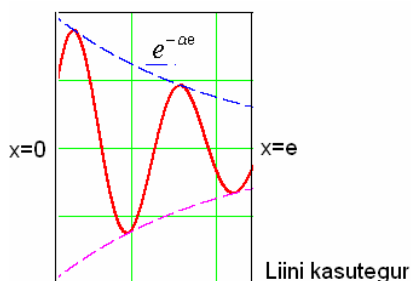
$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 e^{\gamma x} \\ \dot{I} = \dot{I}_2 e^{\gamma x} \end{cases}$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \underline{Z}_B.$$

So lainetakistusega koormatud homogeenne liini igas punktis on kogupinge ja –voolu suhe võrdne lainetakistusega. Sealhulgas ka liini alguses

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \underline{Z}_B.$$

Kuna $\gamma = \alpha + j\beta$ ja $e^{\gamma l} = e^{\alpha l + j\beta l} = e^{\alpha l} \cdot e^{j\beta l}$, võib öelda, et nii pinge- kui voolulained sumbuvad sobitatud koormuse korral liini algusest lõpu suunas eksponentsiaalselt.



Liini kasutegur

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2 I_2 \cos \varphi_2}{U_1 I_1 \cos \varphi_1} = e^{-2\alpha l}.$$

Kuna $\eta \leq 1$, siis $\alpha \geq 0$.

6. Homogeense liini karakteristikud parameetrid

Nendeks suurusteks on **lainetakistus** $\underline{z}_B$ ja **lainetegur** γ .

$$\underline{z}_B = \sqrt{\frac{\underline{z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = z_B e^{j\varphi_B}.$$

Selle lainetakistuse moodul avaldub:

$$z_B = \sqrt{\frac{R_0^2 + (\omega L_0)^2}{G_0^2 + (\omega C_0)^2}}$$

ja nihkenurk on

$$\varphi_B = 0,5 \arctg \frac{\omega L_0 G_0 - \omega C_0 R_0}{R_0 G_0 + \omega^2 L_0 C_0}.$$

Kui sagedus läheneb 0-le ($\omega \rightarrow 0$), so alalispinge ja –vool, siis

$$\varphi_B \rightarrow 0 \quad \text{ja} \quad z_B \rightarrow \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}.$$

Kui aga $\omega \rightarrow \infty$ (ülikõrged sagedused, näiteks antennides jne), siis $\varphi_B \rightarrow 0$ ja $z_B \rightarrow \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$.

Ülekandeliinides ja sideliinides tavaliselt on $(R_0 \text{ ja } G_0) < (\omega L_0 \text{ ja } \omega C_0)$, seega seal ligikaudu

$$\varphi_B \approx 0 \quad \text{ja} \quad z_B \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Õhuliinide korral tavaliselt $z_B \approx 250 \dots 500 \, \Omega$. Kaabelliinide korral $z_B \approx 50 \dots 100 \, \Omega$.

Levitegur avaldub:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{z}_0 \cdot \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}.$$

Sealjuures **sumbumis-** ja **faasitegur** avalduvad:

$$\alpha = \sqrt{0,5(R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)})}$$

$$\beta = \sqrt{0,5(\omega^2 L_0 C_0 - R_0 G_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)})}.$$

Kui $\omega \rightarrow 0$, siis $\alpha \rightarrow \sqrt{R_0 G_0}$ ja $\beta \rightarrow 0$.

Kui $\omega \rightarrow \infty$, siis $\alpha \rightarrow 0$ ja $\beta \rightarrow \omega \sqrt{L_0 C_0}$.

7. Moonutusvaba homogeenne liin

Ülekandeliinis leviva signaali **sagedusspekter** on sageli üsna lai, näiteks sideliinides.

Kuna nii **sumbumis-** (α) kui **faasitegur** (β) sõltuvad üldjuhul sagedusest, siis sagedusspektri erinevas osas levib signaal piki liini erineva sumbuveusega. Seega liini lõppu jõudnud signaalspekter on sumbumuselt tugevasti moonutatud sisendspektriga võrreldes.

$$(v_f = \frac{\omega}{\beta} = \lambda \cdot f; \lambda = \frac{2\pi}{\beta})$$

Teatud eritingimustel võib aga saavutada α ja faasikiiruse v_f sõltumatuse sagedusest; $\alpha \neq f(\omega)$; $v_f \neq f(\omega)$. Siin **moonutused liinis puuduvad**.

Moonutusvaba liini korral peab liiniparameetrite vahel olema seos:

$$\frac{R_0}{G_0} = \frac{L_0}{C_0} \text{ ehk } R_0 \cdot C_0 = G_0 \cdot L_0.$$

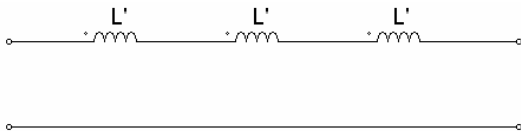
Moonutusvaba liini jaoks avalduvad **sumbumis-** ja **faasitegur**, **faasikiirus** ja **lainetakistus**:

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0}; \quad \beta = \omega \sqrt{L_0 C_0};$$

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}; \quad z_B = z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} - \text{on reaali-, mittekompleksarv.}$$

Reaalses õhuliinis tavaliselt on $G_0 \cdot L_0 < R_0 \cdot C_0$. Et muuta sideliinid moonutusvabaks, kasutatakse liini pikiinduktiivsuse suurendamiseks **lisainduktiivsusi**.

Näide:



Kahejuhtmelise telefoniliini (vask, Ø 4 mm) parameetrid on $R_0=14 \Omega/\text{km}$; $L_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ H/km}$; $G_0 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ S/km}$; $C_0 = 6,35 \cdot 10^{-9} \text{ F/km}$.

Leida lisainduktiivsuse L' väärtus, et muuta liin moonutusvabaks. Olgu kandesagedus $f=100 \text{ kHz}$.

$$\frac{R_0}{G_0} = \frac{L_0}{C_0}; \quad L' = \frac{R_0 \cdot C_0}{G_0} = \frac{14 \cdot 6,35 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-6}} \approx 17,8 \cdot 10^{-3} \text{ H/km.}$$

Seega $L' = L'_0 - L_0 = 17,8 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3} = 15,8 \cdot 10^{-3} \text{ H/km.}$

Selle liini karakterparameetrid:

$$z_B = \sqrt{\frac{L'_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{17,8 \cdot 10^{-3}}{6,35 \cdot 10^{-9}}} = 1675 \Omega; \quad \alpha = \sqrt{R_0 G_0} = \sqrt{14,5 \cdot 10^{-6}} = 8,37 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Np}}{\text{km}};$$

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{L'_0 C_0}} = 9,406 \cdot 10^4 \frac{\text{km}}{\text{s}}; \quad \beta = \omega \sqrt{L'_0 C_0} = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \sqrt{17,8 \cdot 10^{-3} \cdot 6,35 \cdot 10^{-9}} = 6,68 \frac{\text{rad}}{\text{km}}.$$

8. Kaovaba homogeenne liin

Kaovabas liinis puuduvad energiakaod $P_{R_0} = I^2 R_0$ ja $P_{G_0} = U^2 G_0$; seega $R_0 = 0$ ja $G_0 = 0$.

Selline situatsioon esineb reaalse ülekandeliinide korral **suurtel sagedustel**, kus $\omega L_0 \gg R_0$ ja $\omega C_0 \gg G_0$. Seega siis võib lugeda $R_0 \approx 0$ ja $G_0 \approx 0$ ning paljud liinisuuruste avaldised lihtsustuvad:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 0; \\ \beta &= \omega \sqrt{L_0 C_0}; \\ \nu_f &= \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}; \\ \underline{z}_B = z_B &= \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \end{aligned} \right\} \text{ Need on samasugused avaldised nagu ka } \mathbf{moonutusvaba} \text{ liini korral.}$$

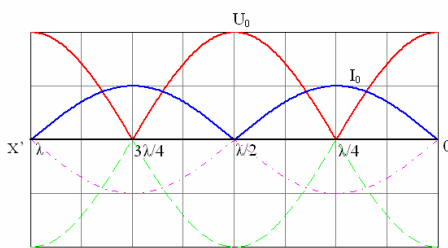
Pinge ja voolu kompleksefektiivväärtuste avaldised (hüperboolsete funktsioonide kaudu) lihtsustuvad (tavaliste trigonomeetriliste funktsioonide tasemel):

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta x' + \dot{I}_2 \underline{z}_B j \sin \beta x'; \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{z}_B} j \sin \beta x' + \dot{I}_2 \cos \beta x', \end{cases} \quad \text{Siin } \dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{z}_{2l}.$$

kus x' - **kaugus liini lõpust**.

Kui kaovaba liin töötab tühijooksurežiimis, so $\dot{I}_2 = 0$ ja $\underline{z}_{2l} = \infty$, siis

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_{20} \cos \beta x'; \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_{20}}{\underline{z}_B} j \sin \beta x'. \end{cases}$$



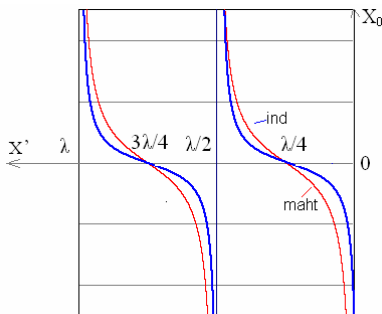
Siin liini teatud punktides on voolu või pinge =-väärtused ja maksimumid. Liinis tekivad **seisvad lained**.

Sealjuures takistuse muutumine sellise liini erinevates

punktides $\underline{z}_0 = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = jx_0$ on puhtreaktiivne:

$$\underline{z}_0(x') = \frac{\dot{U}_0(x')}{\dot{I}_0(x')} = -j \left(\frac{\underline{z}_B}{\tan \beta x'} \right).$$

$$\underline{z}_{10} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = \frac{-j \underline{z}_B}{\tan \beta l} = jx_0 \text{ on puhtreaktiivne.}$$



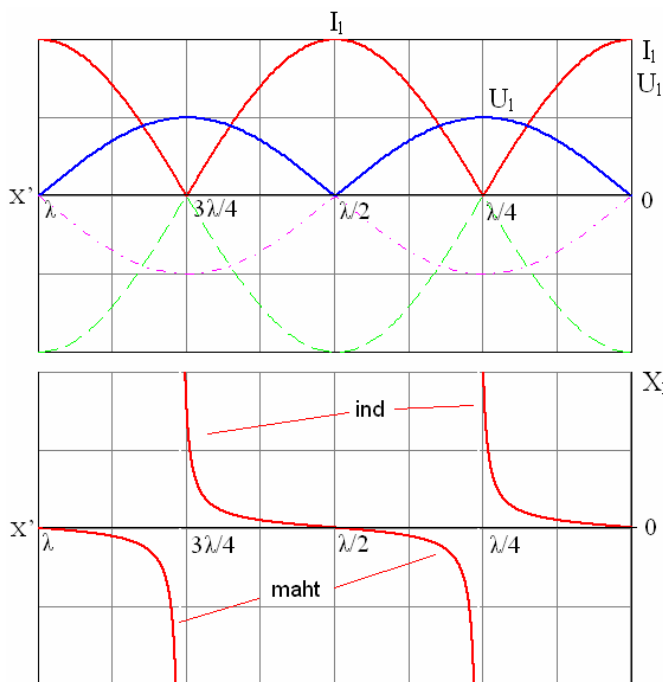
Kaovaba liin lühise režiimis, so ($\dot{U}_2 = 0$; $z_{2l} = 0$).

$$\begin{cases} \dot{U}_l = \dot{I}_{2l} \cdot z_B \cdot j \cdot \sin \beta x'; \\ \dot{I}_l = \dot{I}_{2l} \cos \beta x'. \end{cases}$$

Liini sisendtakistus

$$z_{1l} = \frac{\dot{U}_{1l}}{\dot{I}_{1l}} = j z_B \operatorname{tg} \beta l = j x_l$$

on reaktiivtakistus.



Ka siin tekivad liinis **voolu ja pinge seisvad lained**.

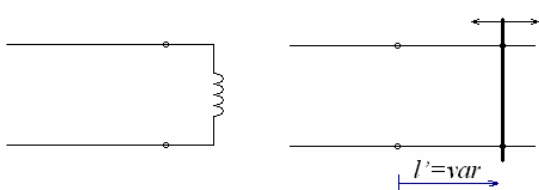
Sisendtakistus on puhtreaktiivne, muutub liini pikkuse muutudes:

$$z_l(x') = \frac{\dot{U}_l}{\dot{I}_l} = j z_B \operatorname{tg}(\beta x').$$

Nagu näha on lühistatud veerandlaineliini

$\left(l = x' = \frac{\lambda}{4}\right)$ sisendtakistus $z_{l(\lambda/4)} \rightarrow \infty$.

Seda nähtust kasutatakse tehnikas näiteks antennide **riputusisolaatorite valmistamiseks veerandlaineliinidest**.



lühisvarras

Kui $l < \frac{\lambda}{4}$, siis induktiivne iseloom.

Sel viisil saab määrata väikseid induktiivsusi või mahtuvusi.

Liini reaktiivkoormuse korral, kui $z_k = j x_k$, siis pinge ja vool:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 \left(\cos \beta x + \frac{z_c}{x_k} \sin \beta x \right) = \dot{U}_2 \frac{\sin(\beta x + \vartheta)}{\sin \vartheta},$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_2 \left(\cos \beta x - \frac{x_k}{z_c} \sin \beta x \right) = \dot{I}_2 \frac{\cos(\beta x + \vartheta)}{\cos \vartheta},$$

kus

$$\frac{x_l}{z_c} = \operatorname{tg} \vartheta \quad \text{ja} \quad \vartheta = \operatorname{arctg} \left(\frac{x_l}{z_c} \right).$$

Seega liinipunktides takistus:

$$\underline{z}(x) = \frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = jx_k \frac{\operatorname{tg}(\beta x + \vartheta)}{\operatorname{tg} \vartheta} = jz_c \operatorname{tg}(\beta x + \vartheta) .$$

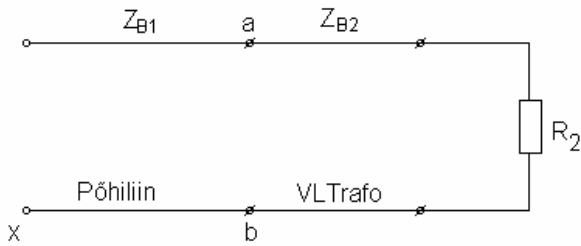
Seega ka **sisendtakistus** on reaktiivse iseloomuga

$$\underline{z}_{lx} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = jz_c \operatorname{tg}(\beta l + \vartheta) = jx .$$

Takistuse sõltuvus liini pikkusest on sarnane tühijooksu või lühisega, kuid nihutatud.

9. Veerandlainetrafo (sobitustrafo)

Kaovaba liini **sobitamiseks aktiivkoormusega** kasutatakse sageli **veerandlaineliini**:



Sobitatud koormuse korral põhiliini klemmide **a–b** küljes puuduvad põhiliinis **peegeldunud**, so **vastulained**, ei teki ka neist tingitud kadusid.

Veerandlainetrafo kujutab endast liinilõiku pikkusega $\lambda/4$ ja lainetakistusega z_{B2} (so teistsuguse läbimõõduga juhtmematerjal ja erinev juhtmete vahelaugus). Sealjuures vajalik z_{B2} väärtus määratakse selliselt, et sobitustrafo koos aktiivkoormusega annaksid klemmide a–b suhtes sobitamiseks vajaliku takistuse väärtuse z_1 :

$$z_{sisab} = \frac{R_2 \cos 90^\circ + j z_{B2} \sin 90^\circ}{\cos 90^\circ + j \frac{R_2}{z_{B2}} \sin 90^\circ} = \frac{z_{B2}^2}{R_2} = z_{B1}.$$

Seega siit vajalik sobitustrafo lainetakistus:

$$z_{B2} = \sqrt{R_2 \cdot z_{B1}}.$$

Kaovaba liini korral on muidugi nii z_{B1} kui z_{B2} reaalsed.

Sealjuures z_{B2} -liinilõigul (sobitustrafo piires) on olemas nii langevad kui peegeldunud lained, kuid peegeldunud lained põhiliini ei levi. Peegeldunud lainetest sobitusliinis tekkivad lisakaod on aga väga väikesed.

10. Homogeense liini mõningate põhiseoste määramine

Homogeense liini lainetakistuse $\underline{z}_B$ ja leviteguri γ saab avaldada tühijooksu- lühissisendtakistuse kaudu, aga ka ekvivalentse neliklemmi A-parameetrite kaudu:

$$\begin{cases} \underline{z}_B = \sqrt{\underline{z}_{10} \cdot \underline{z}_{1l}}; \\ th(\gamma l) = \sqrt{\frac{\underline{z}_{1l}}{\underline{z}_{10}}}; \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{z}_B = \sqrt{\frac{B}{C}}; \\ th(\gamma l) = \frac{\sqrt{BC}}{A}. \end{cases}$$

Kuna

$$th(\gamma l) = \frac{sh(\gamma l)}{ch(\gamma l)} = \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} \quad | \cdot e^{\gamma l}$$

$$th(\gamma l) = \frac{e^{2\gamma l} - 1}{e^{2\gamma l} + 1}$$

ja siit edasi

$$e^{2\gamma l} = e^{2\alpha l} \cdot e^{2j\beta l} = \frac{1 + th\gamma l}{1 - th\gamma l}.$$

Error! Objects cannot be created from editing field codes.; $\underline{z}_0 = \gamma \cdot \underline{z}_B;$

$$\gamma = \sqrt{\underline{z}_0 \cdot \underline{Y}_0}; \quad \underline{Y}_0 = \frac{\gamma}{\underline{z}_B}.$$

Näide: liin pikkusega $l=5$ km, sagedusega $f=1000$ Hz, $\underline{z}_1 = 535 \angle -j64^\circ \Omega$; $\underline{z}_{10} = 467,5 \angle -10^\circ \Omega$.

Leida: $\underline{z}_B$; $\gamma = \alpha + j\beta$; R_0 ; L_0 ; G_0 ; C_0 .

Lahendus:

$$\underline{z}_B = \sqrt{\underline{z}_{10} \cdot \underline{z}_{1l}} = 500 \angle -37^\circ \Omega;$$

$$th(\gamma l) = \sqrt{\frac{\underline{z}_{1l}}{\underline{z}_{10}}} = 0,935 e^{j27^\circ}$$

$$e^{2\alpha l} \cdot e^{j2\beta l} = \frac{1 + th\gamma l}{1 - th\gamma l} = \frac{1 + 0,935 \angle 27^\circ}{1 - 0,935 \angle 27^\circ} = 4,11 \cdot e^{j81^\circ 10'} = e^{1,414} \cdot e^{j1,414}$$

Siinjuures

$$4,11 = e^{1,414}; \quad 81^\circ 10' = 1,414 \text{ rad};$$

$$2\alpha l = 1,414; \quad \alpha = \frac{1,414}{2l} = 0,1414 \frac{\text{Np}}{\text{km}};$$

$$2\beta l = 1,414; \quad \beta = \frac{1,414}{2l} = 0,1414 \frac{\text{rad}}{\text{km}};$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = 0,1414 + j0,1414 = 0,2 e^{j45^\circ} \frac{1}{\text{km}};$$

$$\underline{z}_0 = R_0 + j\omega L_0 = \gamma \cdot \underline{z}_B = 0,2 e^{j45^\circ} \cdot 500 e^{-j37^\circ} = 100 e^{j8^\circ} = 99 + j13,9;$$

$$L_0 = \frac{13,9}{2\pi \cdot 1000} = 0,00222 \frac{\text{H}}{\text{km}};$$

$$\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0 = \frac{\gamma}{\underline{Z}_B} = 0,0557 \cdot 10^{-3} + j0,396 \cdot 10^{-3}.$$

Olgu selle liini lõpus aktiivkoormus $R_2 = 400 \Omega$, vool koormusel $\dot{I}_2 = 0,5 \text{ A}$. Leida $\dot{U}_1$; $\dot{U}_2$; $\dot{I}_1$.

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \text{ch} \gamma l + \dot{I}_2 \underline{Z}_B \text{sh} \gamma l;$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \cdot R_2 = 200 \text{ V};$$

$$\gamma l = (\alpha + j\beta)l = (0,1414 + j0,1414) \cdot 5 = 0,707 + j0,707;$$

$$e^{\gamma l} = e^{0,707 + j0,707} = e^{0,707} \cdot e^{j0,707} = 2,02(\cos 40^\circ 20' + j \sin 40^\circ 20') = 1,54 + j1,305;$$

$$e^{-\gamma l} = e^{-0,707 - j0,707} = e^{-0,707} \cdot e^{-j0,707} = 0,495(\cos(-40^\circ 20') + j \sin(-40^\circ 20')) = 0,377 - j0,32;$$

$$\text{ch}(\gamma l) = 0,5(e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) = 0,96 + j0,4925 = 1,07 \angle 27^\circ 20';$$

$$\text{sh}(\gamma l) = 0,5(e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}) = 0,582 + j0,812 \approx 1 \cdot e^{j54^\circ 20'}.$$

Seega avaldub pinge

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = 200 \cdot 1,07 \angle 27^\circ 20' + 0,5 \cdot 500 \angle -37^\circ \cdot 1 \angle 54^\circ 20' = 463 \angle 22^\circ \text{ V}; \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \text{ch} \gamma l + \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_B} \text{sh} \gamma l = 0,8 \angle 53^\circ 38' \text{ A}. \end{cases}$$