

# ELEKTRIAHELATE SÜNTEES

|                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Elektriahelate sünteesi ülesanded .....                                | 2  |
| 2. Kaks клемmi sisendfunktsiooni omadused .....                           | 2  |
| 3. Kaks клемmi realiseerimine ahellülituse abil .....                     | 6  |
| 4. Kaks клемmi realiseerimine lihtsamate elementide eraldamise teel ..... | 9  |
| Elektriahelate sünteesi näiteid .....                                     | 16 |
| Ülesanne 1.....                                                           | 16 |
| Ülesanne 2.....                                                           | 17 |
| Ülesanne 3.....                                                           | 19 |

## 1. Elektriahelate sünteesi ülesanded

Elektriahelate sünteesiks nimetatakse ahela struktuuri (so skeemi) ja tema elementide  $R$ ,  $L$ , ja  $C$  arvuliste väärtuste leidmist teadaolevate **operaatoravaldiste alusel** või siis teadaolevate **ajaliste karakteristikute alusel**, kui ahela sisendis toimib teatud kujuga signaal.

Ühele ja samale operaatoravaldisele, mis võetakse sünteesi aluseks, võib vastata mitu erineva struktuuriga skeemi. Seega kui on antud operaatorfunktsioonile leitud mitu vastavat skeemi, valitakse nende hulgast sobivaim. Sobivuse kriteeriumideks võivad olla gabariidid, kaal, maksumus jne.

Sünteesi ülesanded kerkivad üles näiteks keerukamate elektrifiltrite ehitamisel, automaatika seadmetes korrigeerivate ahelate projekteerimisel, küberneetikas jne.

Elektriahelate süntees on enam arenenud viimase 30 aasta vältel, muidugi ka seoses arvutustehnika tormilise arenguga. Elektriahelate sünteesi arengus on 2 põhisuunda:

- 1) süntees teadaolevate operaatorfunktsioonide alusel ( $z(p)$  või  $Y(p)$  kaks клеммidel või  $K(p)$ , so ülekandefunktsioon neliklemmidel),
- 2) elektriahelate süntees teadaolevate ajaliste karakteristikute alusel (näiteks ahelaid iseloomustavate siirde- või impulsskarakteristikute alusel).

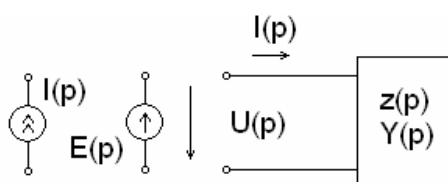
Need mõlemad sünteesi teed täiendavad teineteist. Suuremat edu on siiski saavutatud **operaatorfunktsioonide alusel** ahelate sünteesimisel. Ka meie vaatleme seda sünteesi suunda.

## 2. Kaks клемми sisendfunktsiooni omadused

Kaks клемми operaatorsisendtakistust ja –juhtivust me kirjeldasime

$$z(p) = \frac{U(p)}{I(p)};$$

$$Y(p) = \frac{I(p)}{U(p)}$$



$z(p)$  võib vaadelda kui ülekandefunktsiooni, kus põhjuseks on vool  $I(p)$  (vooluallikas) ja tagajärjeks pinge  $U(p)$ .

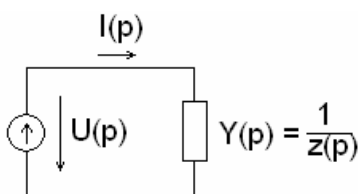
$Y(p)$  korral – vastupidi.

Seega üldistatud kujul võime operaatorsisendtakistust kaks клеммил esitada murdratsionaalse funktsiooni kujul

$$z(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n}{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_m}$$

ja analoogselt sisendjuhtivus

$$Y(p) = \frac{1}{z(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n}.$$



$Y(p)$ -d võib vaadelda kui ülekandefunktsiooni, kus põhjuseks on  $U(p)$  ja tagajärg  $I(p)$ .

$I(p) = Y(p) \cdot U(p)$ . Kui siin  $U(p) = 1$ , so  $U(p)$  on ühikimpulss, siis  $Y(p)$  kujutab endast  $I(p)$ -d oma avaldise poolest.

**Millistele tingimustele** peab vastama allikaid mittesisaldava kaks клемmi  $z(p)$  ja  $Y(p)$ , et nendele vastav kaks клемm oleks **füüsiliselt realiseeritav**? Lühidalt öeldes –  $z(p)$  ja  $Y(p)$  peavad olema **positiivsed reaalfunktsioonid**, st nad on muutuja  $p$  suhtes **ratsionaalfunktsioonid**, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

1)  $p$  muutumisel vaid imaginaarteljel ( $p = j\omega$ )  $z(p)$  ja  $[j\omega Y(p)]$  omavad **mittenegatiivset reaalosa**

$$\operatorname{Re}[z(j\omega)] \geq 0; \quad \operatorname{Re}[Y(j\omega)] \geq 0.$$

### Tõestus

Siinuspinge ja –voolu korral avalduvad kaod kaks клемmis:

$$P = I^2 R = I^2 \cdot \operatorname{Re}[z(j\omega)];$$

või

$$P = U^2 G = U^2 \cdot \operatorname{Re}[Y(j\omega)].$$

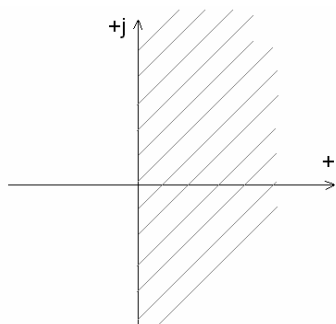
Kuna energiaallikaid mittesisaldavas kaks клемmis

$$P \geq 0 \quad \text{ja} \quad U^2 \geq 0 \quad \text{ning} \quad I^2 \geq 0,$$

siis peab olema

$$\operatorname{Re}[z(j\omega)] \geq 0 \quad \text{ja} \quad \operatorname{Re}[Y(j\omega)] \geq 0.$$

2)



$z(p)$  ja  $Y(p)$  ei või omada pooluseid ega 0-kohti, so  $z(p) = 0$  ja  $Y(p) = 0$  lahendeid, so  $z(p) = \infty$  ja  $Y(p) = \infty$  lahendeid kompleks-tasandi parempoolsel pooltasandil.

Teiste sõnadega,

$z(p) = \frac{N(p)}{M(p)} \rightarrow M(p) = 0$  lahendil  $M(p)$  ja  $N(p)$  vastavalt ei oma 0-e parempoolsel pooltasandil.

(a)  $z(p)$  kohta:

$U(p) = z(p)I(p)$ ; kui  $I(p) = 1$ , so ühikimpulss, siis  $U(p) = z(p)$ .  $z(p)$  kujutab endast  $U(p)$  väärtust, kui kaks клемm on avatud клемmid (vooluallika sisetakistus  $= \infty$ ). Seega  $z(p)$  iseloomustab avatud клемmid kaks клемmi, kui talle mõjub voolu ühikimpulss.

$$u = \sum_{p_k} \operatorname{res}[Z(p)e^{pt}] = \sum_{k=1} A_k e^{p_k t} = \sum A_k e^{C_k t} \cdot e^{j\omega_k t},$$

kus  $p_k = C_k + j\omega_k$ .

Siin  $p_k$  on  $z(p)$  poolus, so kui  $M(p) = 0$ .

Kui poolus asub parempoolsel pooltasandil, siis on  $C_k > 0$ , seega  $u$  vastav liige ajas ei sumbu, vaid kasvab piiramatult ( $e^{C_k t}$ ). Seega oleks allikaid mittesisaldav kaks клемm **ebastabiilne**. See aga on võimatu.

(b)  $Y(p)$  kohta:

$I(p) = Y(p) \cdot U(p)$ . Kui  $U(p) = 1$ , siis  $I(p) = Y(p)$ .

Seega  $Y(p)$  kujutab endast  $I(p)$ -d juhul, kui kaks-klemm on lühistatud (so pingesallika sisetakistus=0), st kui talle mõjub pinge ühikimpulss  $U(p) = 1$ .

Vool avaldub

$$i = \sum_{p_k} \text{res}(Y(p)e^{pt}) = \sum B_k e^{p_k t} = \sum B_k e^{C_k t} e^{j\omega_k t},$$

kus  $p_k = C_k + j\omega_k$ .

Siin  $p_k$  on  $Y(p)$  poolus, so kui  $Y(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ , siis  $N(p) = 0$  **lahend. seega kui  $Y(p) = \infty$ .**

Kui poolus asuks parempoolisel pooltasandil, siis oleks  $C_k > 0$  ja ka  $e^{C_k t}$  **kasvaks piiramatult**, seega  $i(t)$  kasvaks piiramatult, olles seega ebastabiilne.

**3)**  $z(p)$  ja  $Y(p)$  võivad omada **imaginaarteljel** ainult **lihtpooluseid** (mitte kordseid), kusjuures nende poolustele vastavad resiidid on **positiivsed ja reaalsed**.

Vaatame  $z(p)$ -d, sest  $Y(p)$ -le on arutlus analoogne.

Olgu  $z(p)$ -l ühekordne poolus imaginaarteljel  $p_k = j\omega_k$  (samaaegselt ka poolus  $p'_k = -j\omega_k$ ). Sellele  $p_k$ -le vastab **avatud kaks-klemmi** pinge avaldises liige

$$\text{res}(z(p)e^{pt}) = A_k e^{j\omega_k t},$$

st kaks-klemmis tekib sellest **konstantse amplituudiga võnkumine**.

Kui aga esineks kordne poolus, näiteks  $p_k = j\omega_k$  oleks 2-kordne, siis tekiks sellest kaks-klemmi pinge avaldisse komponent

$$\text{res}_{p_k}(z(p)e^{pt}) = A'_k(B_k + t \cdot D_k) e^{j\omega_k t}$$

seega tekiks kaks-klemmis võnkumised, mis ajas piiramatult kasvaksid. See aga pole reaalne.

Sealjuures esinevad poolused imaginaarteljel sellistes kaks-klemmides, mis koosnevad ainult reaktiivelementidest ( $L$  ja  $C$ ), so **puuduvad kaod**, või siis kaks-klemmides, milles sisaldub energeetiliselt isoleeritud osa, mis koosneb vaid reaktiivelementidest.

**4)** See tingimus tuleneb 2. tingimusest.

$z(p)$  ja  $Y(p)$  lugejas ja nimetajas ( $N(p)$  ja  $M(p)$ ) avaldistes peavad kõik **kordajad  $a_k$  ja  $b_k$  olema mittenegatiivsed ja reaalsed** ( $a_k \geq 0$  ja  $b_k \geq 0$ ).

See tuleneb matemaatikast.

**5)** See tuleneb 3. tingimusest.

$z(p)$  ja  $Y(p)$  lugeja ja nimetaja maksimaalne  **$p$ -aste ei tohi erineda teineteisest rohkem kui 1 võrra** ( $p^m$  ja  $p^n$  korral peab olema  $|m - n| \leq 1$ ).

Kui see tingimus pole täidetud, näiteks  $|m - n| = 2$ , siis kui  $p = j\omega$  ja  $\omega \rightarrow \infty$ , siis on  $z(p)$ -l imaginaarteljel 2-kordne poolus  $\omega = \infty$  juures (samuti ka  $Y(p)$  korral).

### Näited

1)  $z(p) = \frac{p+1}{p-2}$  pole realiseeritav – 2. tingimus pole täidetud, sest nimetaja 0-koht on positiivne  $p-2=0$ ;  $p=+2$ .

2)  $z(p) = \frac{p+j\omega}{p+2}$  – ei kõlba, sest lugeja ei ole positiivne **reaalfunktsioon**.

3)  $z(p) = p^2 + a_1p + a_2$  – pole realiseeritav, sest ( $p=j\omega$ ) puhul tema **reaalosa** võib tulla **negatiivne**.

4)  $z(p) = \frac{p^4 + a_2p^2 + 1}{p^2 + 3}$ ,  $a_2 > 0$  (pole realiseeritav, sest  $p$ -astmete erinevus on  $>1$ , sest  $|(4-2) > 1|$ ).

5)  $z(p) = \frac{p^2 - 2p^2 + 1}{p^2 + 1}$  (pole realiseeritav, **negatiivne** koefitsient).

6)  $z(p) = \frac{2p^2 + p + 1}{(p+1)(p^2+1)}$  (on realiseeritav):

a)  $p = j\omega$

$$z(j\omega) = \frac{-2\omega^2 + j\omega + 1}{(j\omega + 1)(1 - \omega^2)} = \frac{(-2\omega^2 + j\omega + 1)(1 - j\omega)}{(j\omega + 1)(1 - \omega^2)(1 - j\omega)}$$

$$\operatorname{Re}[z(j\omega)] = \frac{-2\omega^2 + 1 + \omega^2}{(1 + \omega^2)(1 - \omega^2)} = \frac{1 - \omega^2}{(1 + \omega^2)(1 - \omega^2)} = \frac{1}{1 + \omega^2} \geq 0$$

b)  $M(p)$  nullkohad —  $p_1 = -1$ ;  $p_2 = j$ ;  $p_3 = -j$ .

$N(p)$  nullkohad —  $2p^2 + p + 1 = 0$

$$p_{4,5} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{-\frac{7}{16}} = -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Seega

$$z(p) = \frac{2p^2 + p + 1}{(p+1)(p^2+1)}$$

vastab kõigile tingimustele ja võib kujutada realiseeritava kaksklemmi operaatorsisendtakistuse avaldist.

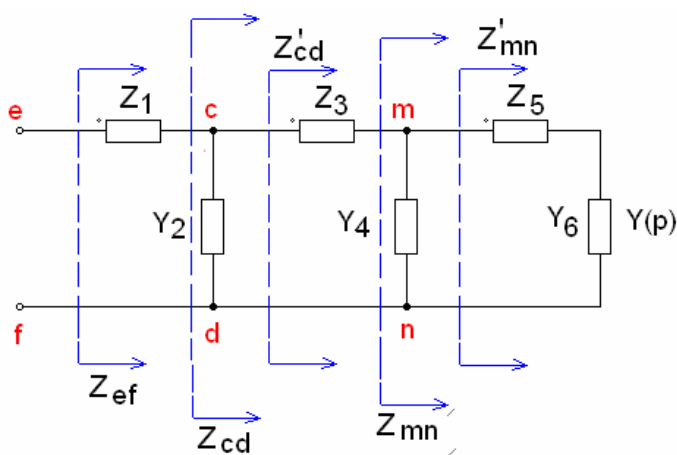
### 3. Kasklemmi realiseerimine ahellütuse abil

Kõigepealt tutvume ahelmurru mõistega. **Ahelmurruks** nimetatakse murdu järgmisel kujul:

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \dots}}}}$$

Järgnevalt veendume, et ahelskeemi (treppskeemi) sisendtakistust saab esitada ahelmurru kujul. Olgu sealjuures tähistatud **pikitakistused**  $z_1; z_3; z_5 \dots$  ja **põikitakistused**  $Y_2; Y_4; Y_6 \dots$

Vaatleme näiteks skeemi.



Esitame selle ahela sisendtakistuse lõikhaaval elementide juurdeühendamise teel:

$$z'_{mn} = z_5 + \frac{1}{Y_6};$$

$$z_{mn} = \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{z'_{mn}}} = \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{z_5 + \frac{1}{Y_6}}};$$

$$z'_{cd} = z_3 + z_{mn} = z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{z_5 + \frac{1}{Y_6}}};$$

$$z_{cd} = \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{z'_{cd}}} = \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{z_3 + \frac{1}{z_5 + \frac{1}{Y_6}}}};$$

$$z_{ef} = z_{cd} + z_1 = z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{z_3 + \frac{1}{Y_4 + \frac{1}{z_5 + \frac{1}{Y_6}}}}}.$$

Analoogiliselt võime esitada ka treppskeemi (ahelskeemi) sisendjuhtivusest.

Seega, kuna ahelmurrule vastav skeem on teada, on piisav kui  $z(p)$  avaldis **teisendada ratsionaalmurrust** → **ahelmurruks**.

Kuidas seda teisendamist teha?

Selleks tuleb:

- 1) Kirjutada  $N(p)$  ja  $M(p)$  avaldis  $p$ -astmete kahanevas või kasvavas järjekorras.
- 2) Jagame hulkliikmed omavahel, jälgides, et jagamisel **täisosas** saaksime positiivsed (**mitte negatiivsed**) liikmed ja et nad ei sisaldaks  $p$ -d astmes, mis on suurem kui 1.
- 3) Jagamisel on vajaduse korral lubatud üle minna hulkliikmetes  $p$ -astmete **kahanevalt järjekorralt** → **kasvavale** (või vastupidi), st hulkliikmetes võib liikmeid ümber grupeerida.

Näiteks  $z$ -funktsiooni korral võiks see jagamine välja näha nii:

$$z = \frac{N}{M} = z_1 + \overset{\text{jääk 1}}{\frac{0_1}{M}} = z_1 + \frac{1}{\frac{M}{0_1}};$$

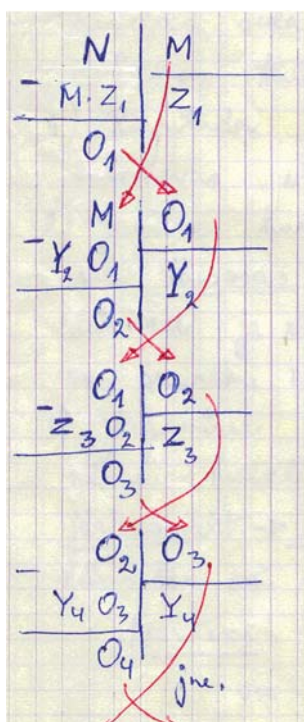
$$\frac{M}{0_1} = Y_2 + \overset{\text{jääk 2}}{\frac{0_2}{0_1}};$$

$$z = z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{0_2}{0_1}} = z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{\frac{0_1}{0_2}}};$$

$$\frac{0_1}{0_2} = z_3 + \overset{\text{jääk 3}}{\frac{0_3}{0_2}};$$

$$z = z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{z_3 + \frac{0_3}{0_2} \dots}} \text{ jne.}$$

Sellele vastab järgmine **tegevusskeem**:



Jagamisprotsess peab jätkuma niikaua, kuni lõpuks on jääk 0.

Mõnikord tekivad jagamisel **negatiivsed** liikmed. Sellest vabanemiseks on otstarbekas polünoomis liikmeid **ümber grupeerida**.

Võivad esineda ka sellised  $z(p)$  või  $Y(p)$  avaldised, mida ei saa ahellulituse abil realiseerida. Siis võib proovida kasutada mõnda järgnevatest meetoditest.

## Näide

$$1) z(p) = \frac{2p^2 + p + 1}{p^3 + p^2 + p + 1}$$

Alustame jagamist:

$$\begin{array}{r|l} 2p^2 + p + 1 & p^3 + p^2 + p + 1 \\ -\left(2p^2 + 2p + 2 + \frac{2}{p}\right) & \frac{2}{p} \\ \hline -p - 1 - \frac{2}{p} & \\ p^3 + p^2 + p + 1 & -p - 1 - \frac{2}{p} \\ \hline & \text{,,—,, ??} \end{array}$$

grupeerime liikmed ümber: ←

$$\begin{array}{r|l} 1 + p + p^2 + p^3 & -\frac{2}{p} - 1 - p \\ \hline & \text{,,—,, ?? ikka ,,—,, st ei saa realiseerida ahel-lülitusena} \end{array}$$

$$2) z(p) = \frac{2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}{2p^2 + 2p + 1}$$

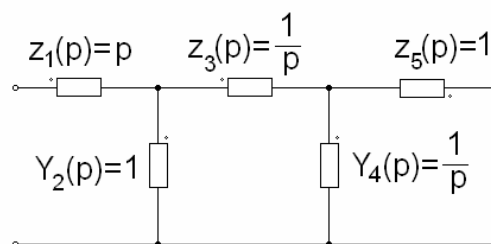
Jagame:

$$\begin{array}{r|l} 2p^3 + 3p^2 + 2p + 1 & 2p^2 + 2p + 1 \\ -(2p^3 + 2p^2 + p) & p = z_1(p) \\ \hline 2p^2 + 2p + 1 & p^2 + p + 1 \\ -(2p^2 + 2p + 2) & 2 \end{array}$$

See tee viib tupikusse; grupeerime liikmed ümber

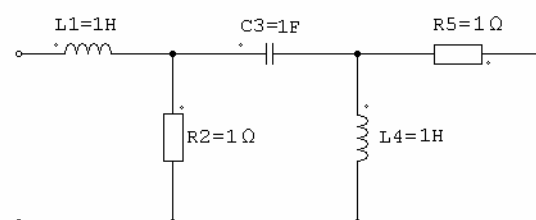
Vastav operaatorskeem:

$$\begin{array}{r|l} -1 & 1 + p + p^2 \\ 1 + 2p + 2p^2 & 1 = Y_2(p) \\ -(1 + p + p^2) & \\ \hline p + p^2 & p + p^2 \\ 1 + p + p^2 & \frac{1}{p} = z_3(p) \\ -(1 + p) & \\ \hline p^2 & \end{array}$$



$$\begin{array}{r|l} p + p^2 & p^2 \\ p & \frac{1}{p} = Y_4(p) \\ \hline p^2 & \\ \frac{p^2}{p^2} & p^2 \\ 0 & 1 = z_5(p) \end{array}$$

Reaalsetest elementidest koosnev skeem:

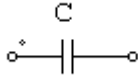


#### 4. Kaksiklemmi realiseerimine lihtsamate elementide eraldamise teel

Vaatame kõigepealt lihtsamate ühe- ja kaheelemendiliste kaksiklemmide operaatortakistuste ja juhtivuste avaldisi:

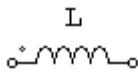
##### 1) $z(p)$ elemendid:

a)



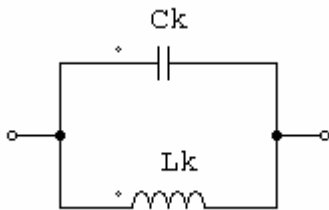
$$z_C(p) = \frac{1}{pC} = \frac{a_0}{p} \quad a_0 = \frac{1}{C}$$

b)



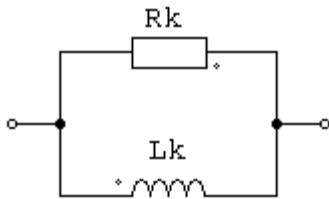
$$z_L(p) = pL = a_\infty \cdot p \quad a_\infty = L$$

c)



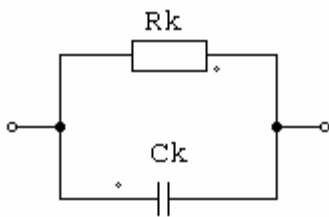
$$z_{LC}(p) = \frac{pL_k \cdot \frac{1}{pC_k}}{pL_k + \frac{1}{pC_k}} = \frac{p \frac{1}{C_k}}{p^2 + \frac{1}{L_k C_k}} = \frac{a_k \cdot p}{p^2 + \omega_k^2} = \frac{\frac{1}{2}a_k}{p + j\omega_k} + \frac{\frac{1}{2}a_k}{p - j\omega_k}$$

d)



$$z_{R,L}(p) = \frac{R_k \cdot pL_k}{R_k + pL_k} = \frac{pR_k}{p + \frac{R_k}{L_k}} = \frac{pb_k}{p + m_k}$$

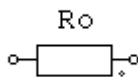
e)



$$z_{R,C}(p) = \frac{R_k \cdot \frac{1}{pC_k}}{R_k + \frac{1}{pC_k}} = \frac{\frac{1}{C_k}}{p + \frac{1}{pC_k \cdot R_k}} = \frac{e_k}{p + d_k}$$

$$e_k = \frac{1}{C_k}; \quad d_k = \frac{1}{C_k R_k}$$

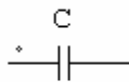
f)



$$z_{R_0} = R_0$$

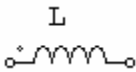
2) Analoogets avaldised  $Y(p)$  elementidele:

a)



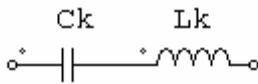
$$Y_C(p) = pC = a'_\infty \cdot p$$

b)



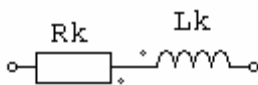
$$Y_L(p) = \frac{1}{pL} = \frac{a'_0}{p}$$

c)



$$Y(p) = \frac{1}{pL_k + \frac{1}{pC_k}} = \frac{p \cdot \frac{1}{L_k}}{p^2 + \frac{1}{L_k C_k}} = \frac{a'_k \cdot p}{p^2 + \omega_k'^2}$$

d)



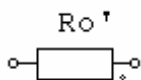
$$Y(p) = \frac{1}{R_k + pL_k} = \frac{\frac{1}{L_k}}{p + \frac{R_k}{L_k}} = \frac{b'_k}{p + m'_k}$$

e)



$$Y(p) = \frac{1}{R_k + pC_k} = \frac{p \cdot \frac{1}{R_k}}{p + \frac{1}{R_k C_k}} = \frac{p \cdot e'_k}{p + d'_k}$$

f)

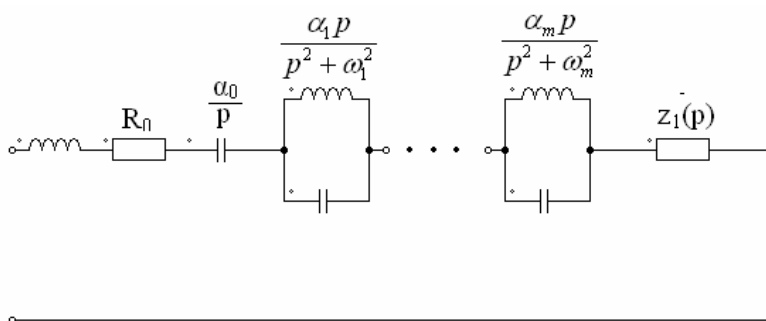


$$Y(p) = R'_0$$

$z(p)$  realiseerimine (kasutame skeeme 1)

Meetodi olemus seisneb selles, et  $z(p)$  esitatakse **osamurdude summana** ja koostatakse askeem vastavalt osamurdude kui operaatortakistuste avaldistele.

Vaatleme selliste  $z(p)$ -de realiseerimist, millel on lihtpoolused kohal  $p=0$ ,  $p=\infty$ , reaaltelje negatiivsel osal ja imaginaarteljel (komplekspoolused  $p_k = S_k + j\omega_k$ ). Kaksiklemm olgu realiseeritav ja sellele vastav askeem oleks:



Lihtpooluse kohal  $p=\infty$   $a_\infty \neq 0$ , kui  $z(p)$  lugeja  $p$  maksimaalne aste  $n$  on suurem nimetaja maksimaalsest  $p$ -astmest  $m$  (so  $n-m=1$ ).

Kui  $n = m$ , siis  $R_0 \neq 0$ .

$z(p)$  kui osamurdude summa avaldugu nii:

$$z(p) = a_\infty \cdot p + R_0 + \frac{a_0}{p} + \sum \frac{a_k \cdot p}{p^2 + \omega_k^2} + \sum \frac{e_k}{p^2 + d_k} \cdot \sum \frac{e_k}{p + d_k} = z_1(p)$$

$$z(p) = a_\infty \cdot p + R_0 + \frac{a_0}{p} + \sum \frac{a_k \cdot p}{p^2 + \omega_k^2} + z_1(p)$$

Kui  $n < m$ , siis lihtmurru  $z(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$  lahutamisel osamurdudeks vastavad komponendid:

**1) Reaalpoolusele**  $\alpha_i$ , mille kordseks on  $k_i$  (so võrrandi  $M(p) = 0$  0-lahendid) vastavad osamurru järgmised liikmed:

$$\frac{C_1}{p - \alpha_i} + \frac{C_2}{(p - \alpha_i)^2} + \dots + \frac{C_{k_i}}{(p - \alpha_i)^{k_i}}, \text{ kus } C_1; C_2 \text{ jne on reaalsed.}$$

**2) Komplekspoolusele**  $\beta_i$ , mille korduseks on  $k_i$  ja mis on ruutvõrrandi  $p^2 + p_i \cdot p + q_i$  lahend, vastavad osamurru järgmised liikmed:

$$\frac{D_1 p + E_1}{p^2 + p_i \cdot p + q_i} + \frac{D_2 p + E_2}{(p^2 + p_i \cdot p + q_i)^2} + \dots + \frac{D_{k_i} p + E_{k_i}}{(p^2 + p_i \cdot p + q_i)^{k_i}},$$

kusjuures  $D_1; E_1$  jne on reaalsed.

Kui esinevad komplekspoolused  $\beta_i$ , siis on ka kaaskomplekspoolused  $\beta_i^*$  ja seetõttu võib osamurru liikmeid kirjutada ka nii:

$$\frac{A_1}{p - \beta_i} + \frac{A_2}{(p - \beta_i)^2} + \dots + \frac{A_{k_i}}{(p - \beta_i)^{k_i}} + \frac{B_1}{p - \beta_i^*} + \frac{B_2}{(p - \beta_i^*)^2} + \dots + \frac{B_{k_i}}{(p - \beta_i^*)^{k_i}}.$$

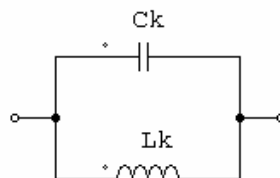
Siin on kordajad  $A_1; A_2 \dots; B_1; B_2 \dots B_{k_i}$  kompleksarvud.

$z(p)$  avaldise esitamisel osamurdude summana vastavad osamurdude liikmete operaatorkujule järgmised takistuselemendid:

**Liikmele**  $a_\infty p$  vastab **induktiivsus**  $L = a_\infty$ ;

**Liikmele**  $\frac{a_0}{p}$  vastab **mahtuvus**  $C = \frac{1}{a_0}$ ;

**Liikmele**  $\frac{a_k p}{p^2 + \omega_k^2}$  vastab skeemielement



kus  $C_k = \frac{1}{a_k}$  ja  $L_k$  leiame seosest  $L_k = \frac{1}{\omega_k^2 \cdot C_k}$ ;

$a_\infty$ -le vastab pooluse  $p = \infty$  juures väärtus

$$a_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{z(p)}{p};$$

$a_0$ -le vastab poolus  $p = 0$  juures

$$a_0 = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot z(p) = \operatorname{res}_{p=0} z(p) = \frac{N(0)}{M'(0)};$$

$$e_k = \lim_{p \rightarrow (-d_k)} z(p)(p + d_k),$$

Nii  $p = +j\omega_k$  kui  $p = -j\omega_k$  korral võrdne väärtus, seega kokku  $2 \frac{N(j\omega_k)}{M'(j\omega_k)}$

$$a_k = \frac{N(j\omega_k)}{M'(j\omega_k)}$$

$a_k$ -le vastab imaginaarteljel  $p_{1,2} = \pm j\omega_k$

$$a_k = \lim_{p^2 \rightarrow (-\omega_k^2)} \frac{p^2 + \omega_k^2}{p} \cdot z(p) = 2 \cdot \operatorname{res} Z(p) = 2 \cdot \operatorname{res} Z(p)$$

$$\underbrace{p = +j\omega_k}_{p \rightarrow j\omega_k} \text{ või } \underbrace{p = -j\omega_k}_{p \rightarrow -j\omega_k},$$

sest

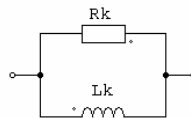
$$\frac{a_k p}{p^2 + \omega_k^2} = \frac{\frac{1}{2} a_k}{p + j\omega_k} + \frac{\frac{1}{2} a_k}{p - j\omega_k} \text{ ja seega}$$

$$a_k = 2 \cdot \lim_{p \rightarrow -j\omega_k} z(p)(p + j\omega_k) = 2 \cdot \lim_{p \rightarrow (+)j\omega_k} z(p)(p - j\omega_k).$$

$z_1(p)$  kujutab endast sellist operaatortakistust, millel **pole pooluseid imaginaarteljel**. Sellist funktsiooni  $z_1(p)$ , millel imaginaarteljel poolused puuduvad, nimetatakse **minimaalse reaktiivtakistusega funktsiooniks**.

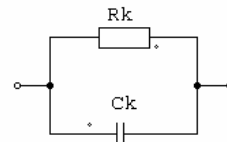
$z_1(p)$  võib omada kuju või nende kujude summat:

$\alpha) z_1(p) = \sum \frac{b_k p}{p + m_k}$  vastav skeem

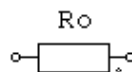


Seda pole praktikas vaja.

$\beta) z_1(p) = \sum \frac{e_k}{p + d_k}$  vastav skeem



$\gamma) z_1(p) = R_0$  vastab aktiivtakistus

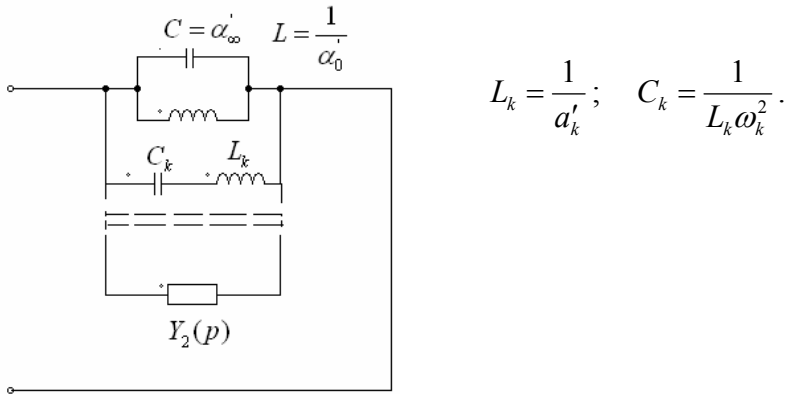


## $Y(p)$ funktsiooni realiseerimine

Kirjutame ka  $Y(p)$  osamurdude summana

$$Y(p) = a'_\infty \cdot p + \frac{a'_0}{p} + \sum \frac{a'_k p}{p^2 + \omega_k^2} + Y_2(p)$$

ja vastav askeem on selline:

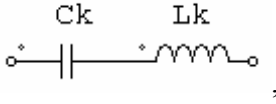


Osamurdude hulgas vastavad liikmetele järgmised skeemielemendid:

Liikmele  $a'_\infty \cdot p$  vastab mahtuvus  $C = a'_\infty$ ;

Liikmele  $\frac{a'_0}{p}$  vastab induktiivsus  $L = \frac{1}{a'_0}$ ;

Liikmele  $\frac{a'_k p}{p^2 + \omega_k^2}$  vastab



kusjuures  $L_k = \frac{1}{a'_k}$  ja  $C_k = \frac{1}{L_k \omega_k^2}$ ;

$a'_\infty$  vastab poolus  $p = \infty$  juures  $a'_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{Y(p)}{p}$ ;

$a'_0$ -le vastab poolus  $p = 0$  juures  $a'_0 = \lim_{p \rightarrow 0} Y(p) \cdot p = \text{res}_{p=0} Y(p)$ ;

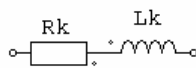
$a'_k$ -le vastab poolus imaginaarteljel  $p_{1,2} = \pm j\omega_k$

$$a'_k = \lim_{p^2 \rightarrow -\omega_k^2} \frac{p^2 + \omega_k^2}{p} \cdot Y(p) = 2 \text{res}_{p=+j\omega_k} Y(p) = 2 \text{res}_{p=-j\omega_k} Y(p).$$

$Y_2(p)$  kujutab endast juhtivust, millel pole pooluseid imaginaarteljel. Seega  $Y_2(p)$  kujutab endast minimaalse reaktiivtakistusega funktsiooni.

$Y_2(p)$  võib omada kuju või kujude summat:

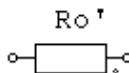
α)  $Y_2(p) = \sum \frac{b'_k}{p + m'_k}$ ; skeem



β)  $Y_2(p) = \sum \frac{e'_k p}{p + d'_k}$ ; skeem



γ)  $Y_2(p) = R'_0$ ; skeem



Kokkuvõttes võib lisada, et mõnel juhul võib funktsiooni  $K(p)$  ühe osa realiseerida takistusena  $z(p)$  ja ülejäänud osa juhtivusena  $Y(p)$ .

Võib aga juhtuda, et funktsiooni  $K(p)$  ei annagi realiseerida siin toodud meetodite abil (näiteks komplekssed poolused ja 0-d). Siis tuleb kasutada teisi meetodeid.

**Näide:**  $z(p) = \frac{2p^2 + p + 1}{(p+1)(p^2+1)}$

$$a_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{z(p)}{p} = 0;$$

$$a_0 = \operatorname{res}_{p=0} z(p) = \left[ \frac{2p^2 + p + 1}{(p+1)(p^2+1)} \cdot p \right]_{p=0} = 0$$

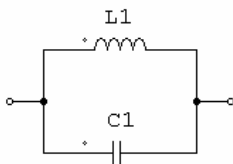
Otsime võnkekontuuri, mille võrrand on kujul  $\frac{a_1 p}{p^2 + \omega_1^2}; \frac{1}{(p^2+1)}$ ,

pooluse kohal  $p_{1,2} = \pm j = \pm j\omega_1$ , kus  $\omega_1^2 = 1^2 = 1$   $\omega_1^2 = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{L_1 C_1}$ .

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \operatorname{res}_{p=+j} z(p) = 2 \left[ \frac{2p^2 + p + 1}{(p+1)(p^2+1)} \cdot (p-j) \right]_{p=+j} = 2 \left[ \frac{(2p^2 + p + 1)(p-j)}{(p+1)(p+j)(p-j)} \right]_{p=+j} \\ &= 2 \frac{-2+j+1}{(j+1) \cdot 2j} = \frac{(j-1) \cdot 2}{(j+1) \cdot 2} = 1 \end{aligned}$$

Seega skeem:

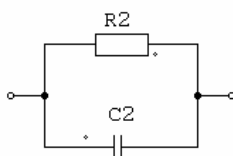
Operaatortakistus osamurruna on:



$$\frac{a_1 p}{p^2 + \omega_1^2} = \frac{1 \cdot p}{p^2 + 1}; \quad C_1 = \frac{1}{a_1} = 1 \text{ F}; \quad L_1 = \frac{1}{C_1 \omega_1^2} \text{ H}.$$

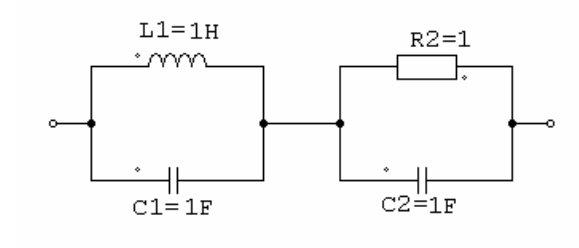
$$\begin{aligned} z_1(p) &= z(p) - \frac{p}{p^2+1} = \frac{2p^2 + p + 1}{(p+1)(p^2+1)} - \frac{1 \cdot p}{p^2+1} = \\ &= \frac{2p^2 + p + 1 - p^2 - p}{(p+1)(p^2+1)} = \frac{p^2+1}{(p+1)(p^2+1)} = \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

Sellele kujule vastab skeem,



$$\text{kus } C_2 = \frac{1}{1} = 1 \text{ F} \quad \frac{1}{C_2 R_2} = 1; \quad R_2 = 1 \Omega.$$

Seega aseskeem kaksklemmile on selline:



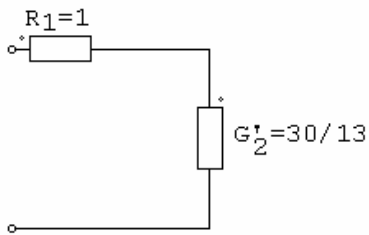
Neliklemmi sünteesi küsimuste osas on lähenemine analoogne, kusjuures vaadeldakse ülekandefunktsioone  $K(p)$ .

## Elektriahelate sünteesi näiteid

Põhimõtteline näide ahelskeemi osas:

### Ülesanne 1

$$z_1(p) = \frac{43}{30}$$



Sisendtakistus

$$R = 1.433$$

Sisendtakistus

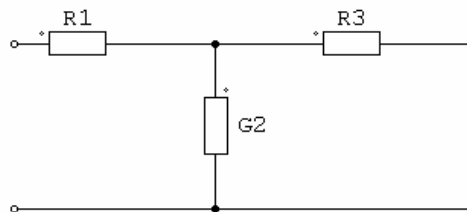
$$z_1(p) = 1.43333... \Omega$$

Teisiti täisarvuliste takistustega:

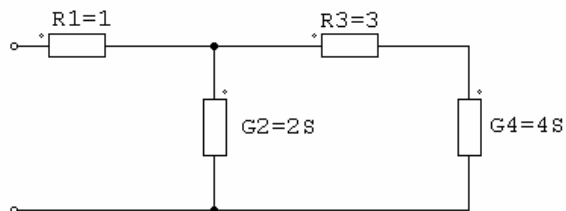
$$z_1 = 1 \frac{13}{30} = 1 + \frac{13}{30} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{13}} = R_1 + \frac{1}{G'_2}$$

Lahutame  $G'_2$  komponentideks:

$$G'_2 = \frac{30}{13} = 2 + \frac{4}{13} = 2 + \frac{1}{\frac{13}{4}} = G_2 + \frac{1}{R'_3}$$



$$R'_3 \text{ arendus: } R'_3 = \frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4} = R_3 + \frac{1}{G_4}$$



Seega sisendtakistus lahutub ritta (ahelmurdu):

$$z_1(p) = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}} = R_1 + \frac{1}{G_2 + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{G_4}}}$$

## Ülesanne 2

$$z_1(p) = \frac{(p+1)(p+3)}{p(p+2)} = \frac{p^2 + 4p + 3}{p^2 + 2p} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}p + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{1}{6}p}}}$$

$$\begin{array}{r|l} \frac{p^2 + 4p + 3}{p^2 + 2p} & \frac{p^2 + 2p}{1 + z_1(p) = R_1} \\ \hline \frac{2p + 3}{p^2 + \frac{3}{2}p} & \frac{p}{2} = Y_2(p) \\ \hline \frac{2p + 3}{2p} & \frac{1}{2}p \\ \hline & 4 = z_3(p) = R_3 \\ \hline \frac{\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p} & 3 \\ \hline & \frac{1}{6}p = Y_4(p) \\ \hline 0 & \end{array}$$

$Z_L(p) = pL$   
 $Y_L(p) = \frac{1}{pL}$   
 $Z_C(p) = \frac{1}{pC}$   
 $Y_C(p) = pC$

## Proovime teistpidi

$$z(p) = \frac{3 + 4p + p^2}{2p + p^2}$$

$$\begin{array}{r|l} \frac{3 + 4p + p^2}{2p + p^2} & \frac{2p + p^2}{\frac{3}{2}p = z_1(p)} \\ \hline \frac{3 + \frac{3}{2}p}{2p + p^2} & \frac{5}{2}p + p^2 \\ \hline \frac{2p + \frac{4}{5}p^2}{2p + p^2} & \frac{4}{5} = Y_2(p) \\ \hline \frac{\frac{5}{2}p + p^2}{2p + \frac{4}{5}p^2} & \frac{1}{5}p^2 \\ \hline \frac{\frac{5}{2}p}{\frac{1}{5}p^2} & \frac{25}{2p} = z_3(p) \\ \hline \frac{\frac{1}{5}p^2}{\frac{1}{5}p^2} & p^2 \\ \hline 0 & \frac{1}{5} = Y_4(p) \end{array}$$

Saame uue, eelmisest erineva skeemi:



### Ülesanne 3

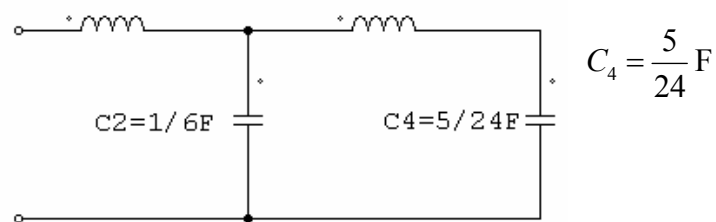
Määrata treppskeemi (või skeemide) parameetrid kui  $z(p) = \frac{p^4 + 9p^2 + 8}{p^3 + 3p}$ .

a) jagamisel jaotatakse polünoomid vastavalt kahanevatele  $p$  astmetele – skeem 1,

b) vastavalt kasvavale  $p$  astmetele – skeem 2.

#### a) Skeem 1

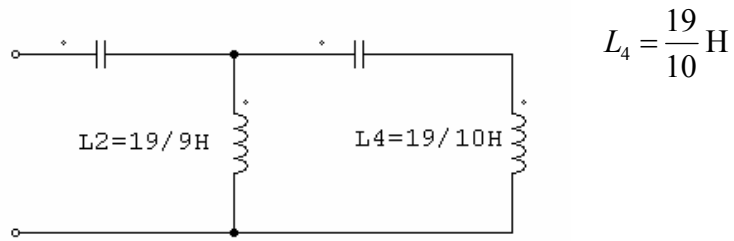
$$L_1 = 1 \text{ H} \quad L_3 = \frac{36}{10} = \frac{18}{5} \text{ H}$$



$$\begin{array}{r|l}
 p^4 + 9p^2 + 8 & p^3 + 3p \\
 \hline
 -(p^4 + 3p^2) & \\
 \hline
 6p^2 + 8 & p \rightarrow z_1(p) \\
 \hline
 p^3 + 3p & 6p^2 + 8 \\
 \hline
 -(p^3 + \frac{8}{6}p) & \frac{1}{6}p \rightarrow Y_2(p) \\
 \hline
 6p^2 + 8 & \frac{10}{6}p \\
 -6p^2 & \hline
 \hline
 & \frac{36}{10}p \rightarrow z_3(p) \\
 \hline
 \frac{10}{6}p & 8 \\
 \hline
 \frac{10}{6}p & \frac{5}{24}p \rightarrow Y_4(p) \\
 \hline
 0 & 
 \end{array}$$

**b) Skeem 2**

$$C_1 = \frac{3}{8} \text{ F} \quad C_3 = \frac{30}{361} \text{ F}$$



$$L_4 = \frac{19}{10} \text{ H}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l}
 8 + 9p^2 + p^4 \\
 - \left( 8 + \frac{8}{3}p^2 \right)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 3p + p^3 \\
 \frac{8}{3}p \rightarrow z_1(p)
 \end{array} \right. \\
 \begin{array}{l}
 3p + p^3 \\
 - \left( 3p + \frac{9}{13}p^2 \right)
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \frac{19}{3}p^2 + p^4 \\
 \frac{9}{19p} \rightarrow Y_2(p)
 \end{array} \right. \\
 \begin{array}{l}
 \frac{19}{3}p^2 + p^4 \\
 \frac{19}{3}p^2
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \frac{10}{19}p^3 \\
 \frac{361}{30p} \rightarrow z_3(p)
 \end{array} \right. \\
 \begin{array}{l}
 \frac{10}{19}p^3 \\
 \frac{10}{19}p^3 \\
 0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 p^4 \\
 \frac{10}{19p} \rightarrow Y_4(p)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$