

Arvusüsteemid (2)

- Väärtus = numbrite kaalutud summa
 - $173,42 = 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$
 - Täisosa / murdosa
 - Üldistatud esitusviis
 - $D = \sum d_i \cdot r^i, \quad i = -n, \dots, p-1$
 - $d_{p-1} d_{p-2} \dots d_2 d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} \dots d_{-n} / r$ - baas (radix)
-
- John F. Wakerly, Digital design: principles and practices. Pearson/Prentice Hall.
 - Vt ka Harri Lenseni materjale (Moodle's)

Negatiivsed arvud – esitusviisid

- Märgiga väärtus (signed-magnitude)
 - $23_{10} = 10111_2 = \underline{0}0010111_2$
 - $-23_{10} = -10111_2 = \underline{1}0010111_2$
 - Kaks nulli: $\underline{0}0\dots0$ (+0) ja $\underline{1}0\dots0$ (-0)
- Liitmine / lahutamine?
 - $-13_{10} + 13_{10} = 10001101_2 + 00001101_2 =$
 $= ? ? ? = 00000000_2$ või 10000000_2 ?
- Tehteid on riistvaras keeruline realiseerida

Negatiivsed arvud – esitusviisid

- Täiendkood (2's complement): $-A = (\sim A) + 1$
 - $23_{10} = 10111_2 = \underline{000}10111_2$
 - $-23_{10} = -10111_2 = (\sim 10111_2) + 1_2 = \underline{1}1101001_2$
 - Üks null: 00...0
- Liitmine / lahutamine?
 - $-13_{10} + 13_{10} = 11110011_2 + 00001101_2 = 00000000_2$
- Lahutaja == liitja + natuke lisaloogikat

Negatiivsed arvud – esitusviisid

- Pöördkood (1's complement): $-A = (\sim A)$
 - $23_{10} = 10111_2 = \underline{0}0010111_2$
 - $-23_{10} = -10111_2 = \underline{1}1101000_2$
 - Kaks nulli: $\underline{0}0\dots0$ (+0) ja $\underline{1}1\dots1$ (-0)
- Liitmine / lahutamine?
 - $-13_{10} + 13_{10} = 11110010_2 + 00001101_2 = 11111111_2$
- Tehteid on riistvaras keerulisem realiseerida
 - Kahe nulliga arvestamine

Negatiivsed arvud – esitusviisid

- Üldistus – täiend aluse suhtes
 - Complement & Radix-complement systems
 - Moodularvutus – $a = A \pmod{m}$
 - $(A - a) / m = \text{täisarv}$
 - Täiendkood (2's complement)
 - N järku – vahemik: $-2^{(N-1)} \dots + (2^{(N-1)} - 1)$
 - Pöördkood (1's complement)
 - N järku – vahemik: $-(2^{(N-1)} - 1) \dots + (2^{(N-1)} - 1)$
- Vt. Harri Lenseni materjale
 - Negatiivsed arvud ja BCD-koodid

Negatiivsed arvud – esitusviisid

- Täiendkood

- N järku – vahemik:
 $-2^{(N-1)} \dots + (2^{(N-1)} - 1)$
- 8 bitti: $-128 \dots + 127$

- Arvude skaala

-1	11111111
-2	11111110
...	...
-51	11001101
...	...
-128	10000000
+127	01111111
...	...
+51	00110011
...	...
+1	00000001
0	00000000

- Pöördkood

- N järku – vahemik:
 $-2^{(N-1)} \dots + (2^{(N-1)} - 1)$
- 8 bitti: $-127 \dots + 127$

- Arvude skaala

-0	11111111
-1	11111110
...	...
-51	11001100
...	...
-127	10000000
+127	01111111
...	...
+51	00110011
...	...
+1	00000001
0	00000000

Täiendkood – pöördarvu leidmine

- Täiendkood (2's complement): $-A = (\sim A) + 1$

23 == 00010111 → -23 == 11101000 + 1 = 11101001

13 == 00001101 → -13 == 11110010 + 1 = 11110011

12 == 00001100 → -12 == 11110011 + 1 = 11110100

10 == 00001010 → -10 == 11110101 + 1 = 11110110

36 == 00100100 → -36 == 11011011 + 1 = 11011100

60 == 00111100 → -60 == 11000011 + 1 = 11000100

- Inverteerida vasakult “viimase” üheni (v.a.)

23 == 00010111 → 11101001 = -23

60 == 00111100 → 11000100 = -60

72 == 01001000 → 10111000 = -72

Täiendkood – liitmine ja lahutamine

- Liitmine – $A+B$
- Lahutamine läbi pöördarvu – $A-B = A+(-B)$

$$\begin{array}{r} 23 \quad 00010111 \\ + 13 \quad 00001101 \\ \hline 36 \quad 00100100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -23 \quad 11101001 \\ + 13 \quad 00001101 \\ \hline -10 \quad 11110110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \quad 00010111 \\ + 12 \quad 00001100 \\ \hline 35 \quad 00100011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -23 \quad 11101001 \\ + (-13) \quad 11110011 \\ \hline -36 \quad 11011100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \quad 00010111 \\ + (-13) \quad 11110011 \\ \hline 10 \quad 00001010 \end{array}$$

Ületäitumine?

- Täiendkood

- 8 bitti: -128...+127
- 125+5=? [130]

```
125  01111101
+  5  00000101
[130] 10000010 == -126
```

- Arvude skaala

```
-1  11111111
    .....
-128 10000000
+127  01111111
    .....
  0  00000000
```

- Ekstra märgibitt

- 00 või 11 – OK

```
  75  001001011
+  15  000001111
[ 90]  001011010
```

```
 125  001111101
+   5  000000101
[130]  010000010
```

```
 -75  110110101
+ -15  111110001
[-90]  110100110
```

```
 -125  110000011
+   -5  111111011
[-130]  101111110
```

Korrutamine

- Liitmine & nihutamine

- $12 * 5 = 60$

```
      00001100 * 00000101
      -----
1.           00000000
2.           00000000.
3.           00000101..
4.           00000101...
5.           00000000....
6.           00000000.....
7.           00000000.....
8.           00000000.....
      -----
           000000000111100
```

- Kõik arhitektuuri põhinevad sellel algoritmil

- summaator
- nihutaja
 - register
 - tulemuse nihutamine
 - operandi nihutamine
- kontrollor

Korrutamine

- Korrutamine & täiendkood?

12 == 00001100 / -12 == 11110100

5 == 00000101 / -5 == 11111011

12 * 5 == 00001100*00000101 = 00111100 == 60

(-12) * (-5) == 11110100*11111011 = 1110111100111100 ?!

või 111111110100*111111111011 =

111111101111000000111100

12 * (-5) == 00001100*11111011 = 101111000100 == -60

- Korrutamisel peab õige tulemuse saamiseks olema piisavalt bitte
- Erinevad algoritmid käsitlevad negatiivseid arve erinevalt

Jagamine

- Lahutamine, kontroll ja nihutamine
- Kõik arhitektuurid põhinevad sellel algoritmil

$$23/5=4 \text{ j } 3$$

$$\begin{array}{r} 00010111 / 00000101 == 100 \text{ j } 11 \\ -0101 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$20/3=6 \text{ j } 2$$

$$\begin{array}{r} 00010100 / 00000011 == 110 \text{ j } 10 \\ -011 \\ \hline 1000 \\ -011 \\ \hline 10 \end{array}$$

Jagamine

- Jagamine ja täiendkood?
 - Jagamisel on oluline alustada “õigest” kohast
 - Erinevad algoritmid käsitlevad negatiivseid arve erinevalt

$$\begin{array}{r} 23 / -5 = -4 \text{ j } 3 \\ \phantom{23 / -5 = -4 \text{ j } 3} 00010111 \text{ / } 11011011 == 100 \text{ jääk } 11 \\ \phantom{23 / -5 = -4 \text{ j } 3} + 11011011 \\ \phantom{23 / -5 = -4 \text{ j } 3} \text{-----} \\ \phantom{23 / -5 = -4 \text{ j } 3} 11 \end{array}$$

- Jääk vs. moodul?
 - moodul (mod) – $7 / -2 = -4 \text{ j } -1$ -- $A = B * N + (A \text{ mod } B)$
 - $A=7, B=-2, (A \text{ mod } B)=-1, N=-4 \rightarrow 7 = -2 * (-4) + (-1)$
 - jääk (rem) – $7 / -2 = -3 \text{ j } +1$ -- $A = (A/B) * B + (A \text{ rem } B)$
 - $A=7, B=-2, (A \text{ rem } B)=1, N=-3 \rightarrow 7 = -2 * (-3) + 1$

Simulaatorid

- Võimaldavad simuleerida erinevaid tehteid
 - bc – an arbitrary precision calculator
 - https://www.gnu.org/software/bc/manual/html_mono/bc.html
 - Aritmeetikaoperatsioonide simulaator
 - <https://pld.ttu.ee/~kruus/Aritmeetika/>
 - Arvutiaritmeetika simulaator
 - <https://pld.ttu.ee/~kruus/Simulaator/>
 - Aritmeetika-algoritmide simulaator
 - <http://www.ecs.umass.edu/ece/koren/arith/simulator/>
 - Aegajalt ei tööta?

Nihutamine

- Loogiline, aritmeetiline ja ringnihe

```
<< == *2  [ 13<<1 ] 00001101 -> 00011010 [ 26 ]
           [ -13<<1 ] 11110011 -> 11100110 [ -26 ]
```

```
>> == /2  [ 13>>1 ] 00001101 -> 00000110 [ 6 ]
loogil.    [ -13>>1 ] 11110011 -> 01111001 [ 121 ]
aritm.     [ -13>>1 ] 11110011 -> 11111001 [ -7 ]
```

```
ringnihe < [ 13 ] 00001101 -> 00011010
           [ -13 ] 11110011 -> 11100111
ringnihe > [ 13 ] 00001101 -> 10000110
           [ -13 ] 11110011 -> 11111001
```

Ümardamine

- 10-arvud – 0,026 $\rightarrow$ 0,03 / 0,024 $\rightarrow$ 0,02
- 2-arvud – piiriks $0,0\dots5_{10}$ asemel $0,0\dots1_2$
- Mõjutab teisenduste täpsust!
 - $2,6_{10} = 10,10011001\textcolor{brown}{1}00110\dots_2$
 - $10,10011001_2 = 2,59765625_{10}$
 - $10,10011010_2 = 2,6015625_{10}$
- Negatiivsed arvud?
 - $-2,6_{10} = 11101,01100110\textcolor{brown}{0}11001\dots_2$
 - $11101,01100110_2 \rightarrow -10,10011010_2 = -2,601562_{10}$
 - $11101,01100111_2 \rightarrow -10,10011001_2 = -2,59765625_{10}$