

TÕENÄOSUSTEORIA ALUSED

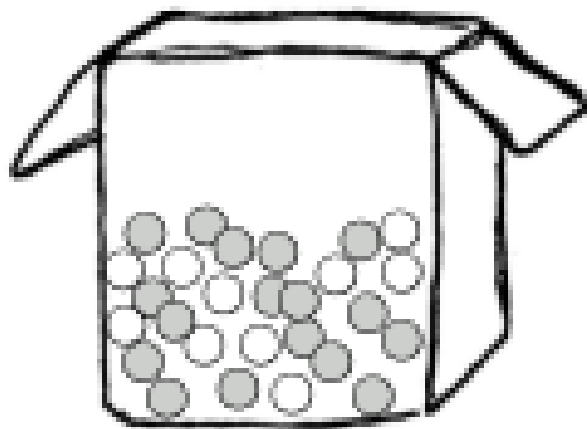
JAOTUSSEADUSED I

LOENGU TEEMAD

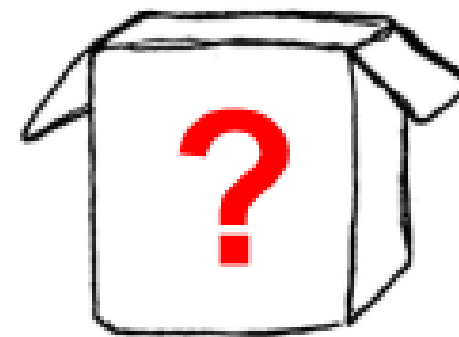
- Tõenäosusteooria alused
 - Katse ja sündmus
 - Tõenäosuse mõiste ja selle leidmine
 - Tehted tõenäosustega
- Jaotusseadused I
 - Diskreetne ja pidev juhuslik suurus
 - Jaotusseadus
 - Jaotusfunktsioon
 - Keskväärtus
 - Jaotustihedus
 - Teoreetilised jaotusseadused
 - Diskreetne ja pidev ühtlane jaotus
 - Binoomjaotus

TÕENÄOSUSTEORIA JA STATISTIKA

Tõenäosusteooria



Statistika



KATSE

Katse on protsess, mille käigus toimub teatud juhuslik valik etteantud katsetulemuste hulgast.

- Katse on suvaline arv korratav.
- Katse teostamisel esineb üks ja ainult üks katsetulemus.

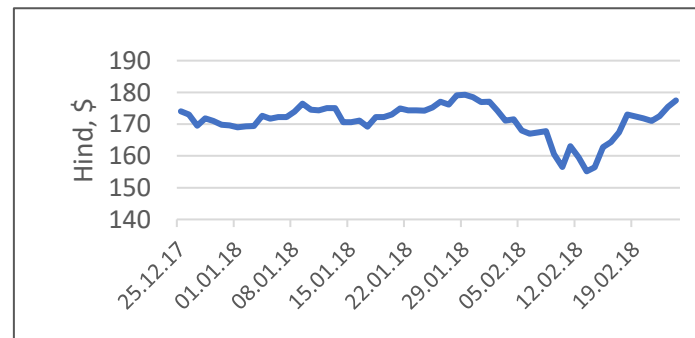
Täringuvise



Mündivise



Mitu külastajat siseneb poodi järgmise minuti jooksul?



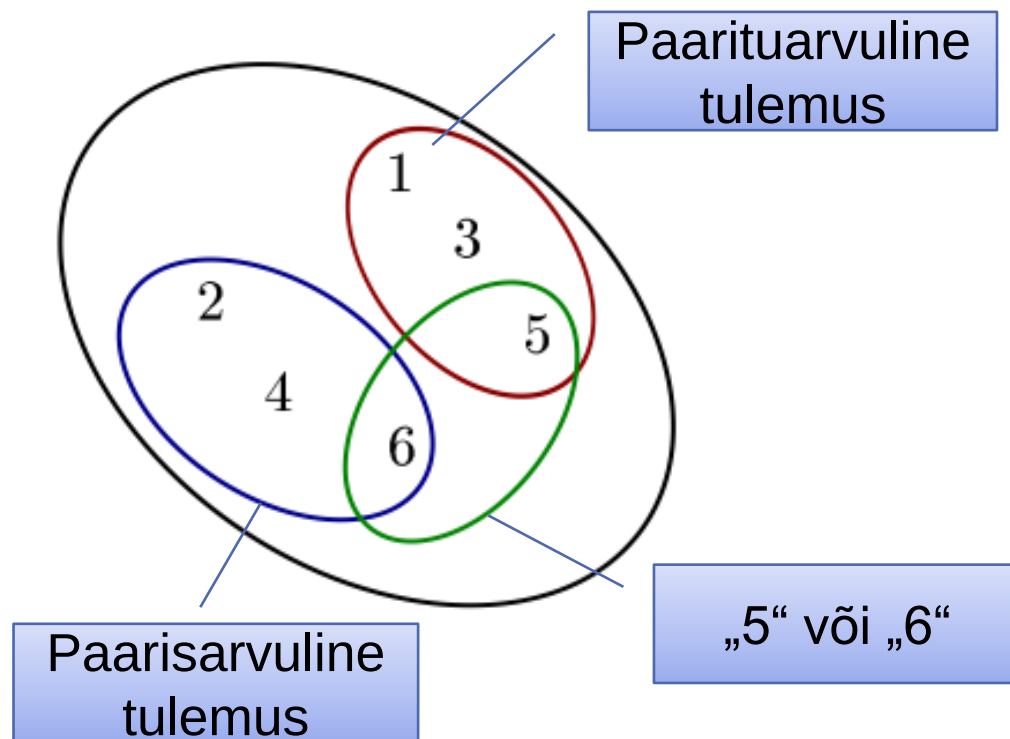
Milline on Apple aktsia hind nädala pärast?

SÜNDMUS

Sündmus on teatud katsetulemuste hulk.

Sündmuses sisalduvad katsetulemused on vastava katse jaoks **soodsad**.

Täringuviskel
saadud silmade arv



Järgmise minuti jooksul poodi
sisenevate külastajate arv on:

- A täpselt 3
- B täpselt 4
- C 0 kuni 4
- D suurem kui 4

TÕENÄOSUSE MÕISTE JA TÕENÄOSUSE LEIDMINE

probability

- Ühe ja sama katse tulemuste põhjal määratletud sündmustel võib olla erinev võimalikkus.
- Sündmusel, mille soodsate katsetulemuste hulk on suurem, on rohkem võimalusi toimuda.
- Seda võimalikkust väljendab tõenäosus.

Tõenäosuse leidmiseks võib kasutada kolme erinevat meetodit:

- teoreetiline,
- statistiline,
- subjektiivne.

TEOREETILINE TÕENÄOSUS

classical probability

Olgu katsel n katsetulemust. Eeldame, et

- 1) arvesse on võetud kõikvõimalikud katsetulemused;
- 2) kõik katsetulemused on üksteist paarikaupa välistavad;
- 3) kõik katsetulemused on **võrdvõimalikud**.

Klassikaline ehk **teoreetiline** tõenäosus.

Sündmuse A tõenäosus $P(A)$ on sündmuse jaoks soodsate katsetulemuste arvu m ja kõigi katsetulemuste arvu n suhe.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{soodsad katsetulemused}}{\text{kõik katsetulemused}}$$

NÄIDE: MÜNDI VISE



Viskame münti.

Kui suure tõenäosusega tuleb "kull" ?

Soodsaid katsetulemusi $m = 1$

Kõiki katsetulemusi $n = 2$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2} = 50\%$$

NÄIDE: TÄRINGU VISE



Viskame täringut.

Kui suure tõenäosusega on silmade arv suurem kui 4?

Soodsaid katsetulemusi (5 ja 6) $m = 2$

Kõiki katsetulemusi $n = 6$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

???

Kui suure tõenäosusega sünnib laps nädalavahetusel (laupäeval või pühapäeval)?

Soodsaid katsetulemusi

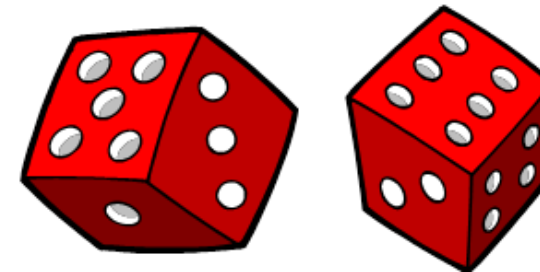
$$m = 2$$

Kõiki katsetulemusi

$$n = 7$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{7}$$

NÄIDE: KAHE TÄRINGU VISE



Visatakse korraga 2 täringut. Kui suur on tõenäosus, et silmade arvu summa on 10?

Kõikide katsetulemuste arv $n=?$

Täring 1	Täring 2
1	1
1	2
1	3
1	4
1	5
1	6
2	1
...	...

$$n = 36$$

Soodsate katsetulemuste arv $m=?$

Täring 1	Täring 2
4	6
5	5
6	4

$$m = 3$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

TÕENÄOSUSE OMADUSED

Suvalise juhusliku sündmuse toimumise tõenäosus $0 \leq P(A) \leq 1$

Kindla sündmuse toimumise tõenäosus $P(\Omega) = 1$

Võimatu sündmuse toimumise tõenäosus $P(\emptyset) = 0$

VASTANDSÜNDMUSE TÕENÄOSUS

complement probability

Sündmuse A vastandsündmuse $\bar{A}$ toimumise tõenäosus

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Näide

Olgu kaardi tõmbamisel kaardipakist sündmus A "poti mast".

Tõenäosus, et on „poti“

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

Tõenäosus, et ei ole „poti“

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

NÄIDE: JUHUSLIKULT VALITUD ETTEVÕTTE TÖÖTAJATE ARV

Kui suur on tõenäosus, et mingis juhuslikult valitud Eesti ettevõttes on töötajate arv väiksem kui 10?

Kas saab leida teoreetilist tõenäosust?

STATISTILINE TÕENÄOSUS

Kui k on katsete arv ja f sündmuse A esinemissagedus nendes katsetes, siis sündmuse A toimumise **suhteline sagedus** ehk **statistiline tõenäosus**.

$$P^*(A) = \frac{f}{k} = \frac{\text{sündmuse esinemissagedus}}{\text{katsete arv}}$$

NÄIDE: JUHUSLIKULT VALITUD ETTEVÕTTE TÖÖTAJATE ARV

Kui suur on tõenäosus, et mingis juhuslikult valitud Eesti ettevõttes on töötajate arv väiksem kui 10?

Kasutame statistilist tõenäosust.

Töötajate arv	Ettevõtete arv	Statistiline tõenäosus
vähem kui 10	101 189	$101\,189 : 108\,884 = 92,9\%$
10 - 49	5 705	$5\,705 : 108\,884 = 5,2\%$
50 - 249	1 115	$1\,115 : 108\,884 = 1,0\%$
250 ja enam	173	$173 : 108\,884 = 0,2 \%$
KOKKU	108 884	

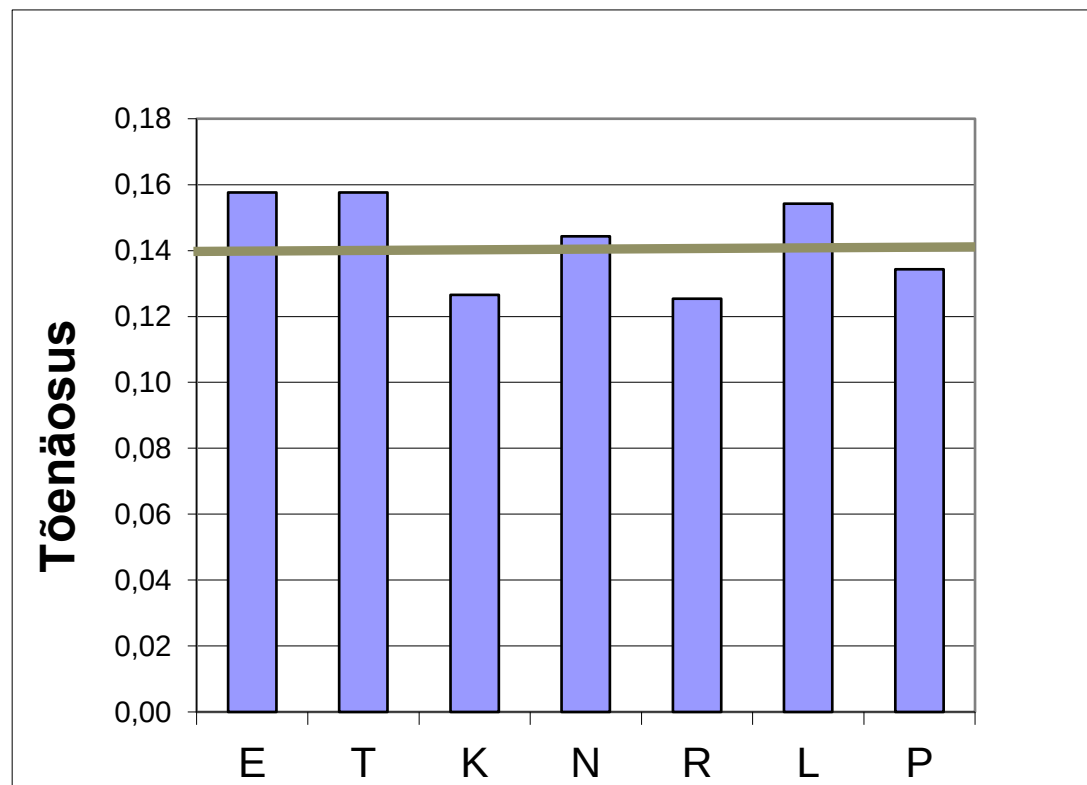
NÄIDE: SÜNNI NÄDALAPÄEV JA STATISTILINE TÕENÄOSUS

Teoreetiline tõenäosus, et laps sünnib mingil konkreetsel nädalapäeval:

$$\frac{1}{7} \approx 0,14$$

Statistilised tõenäosused
900 inimese andmete põhjal:

Demo: statistiline ja
teoreetiline tõenäosus



SUURTE ARVUDE SEADUS

Katsete arvu k suurenedes läheneb sündmuse esinemise statistiline tõenäosus P^* sündmuse esinemise tõenäosusele üksikul katsel.

$$P^*(A) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} P(A)$$

SUBJEKTIIVNE TÕENÄOSUS



Tõenäosuse **subjektiivset** hindamist kasutatakse, kui teoreetilist ega statistilist tõenäosust leida ei saa.

Sa arvad, et 80% tõenäosusega su parim sõber helistab sulle täna, kuna ta auto on katki ja ta vajab küüti.

Sa arvad, et selle töökoha saamise tõenäosus on 50%, kuna teine kandidaat on sama hea kui sina.

Müügijuht arvab, et selle lepingu saamise tõenäosus on 40%.

NÄIDE: STSENAARIUMID JA SUBJEKTIIVNE TÕENÄOSUS

Swedbanki majandusprognoos 26. august 2014.

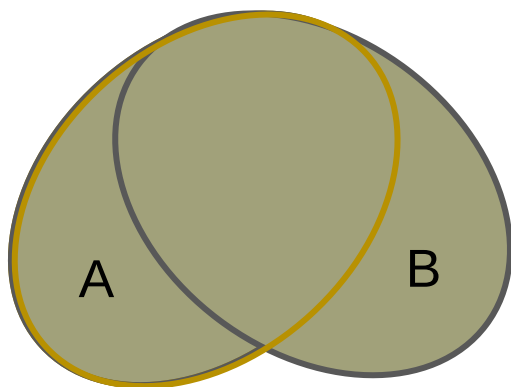
Vene-Ukraina kriisi ja Lääne sanktsioonide mõju võimalikud stsenaariumid.

	Tõenäosus
Positiivne stsenaarium: pooled jõuavad poliitilise kompromissini ja sanktsioone vähendatakse	20%
Põhistsenaarium: raskuste jätkumine, võimalikud täiendavad sanktsioonid.	60%
Negatiivne stsenaarium: pingete kuhjumine, sanktsioonide laiendamine mõlema poole poolt.	20%
KOKKU	100%

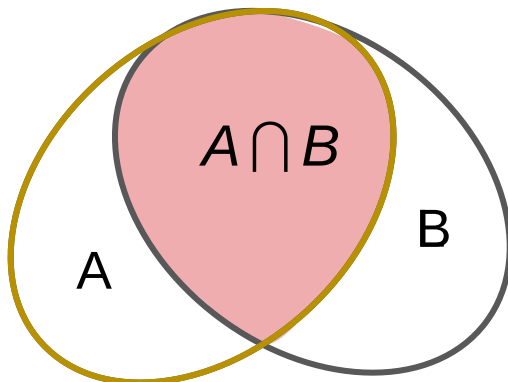
TEHTED TÕENÄOSUSTEGA

Tehted sündmustega

Sündmuste summa $A \cup B$



Sündmuste korrutis



Tehted tõenäosustega

Sündmuste summa tõenäosus

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sündmuste korrutise tõenäosus

$$P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B)$$

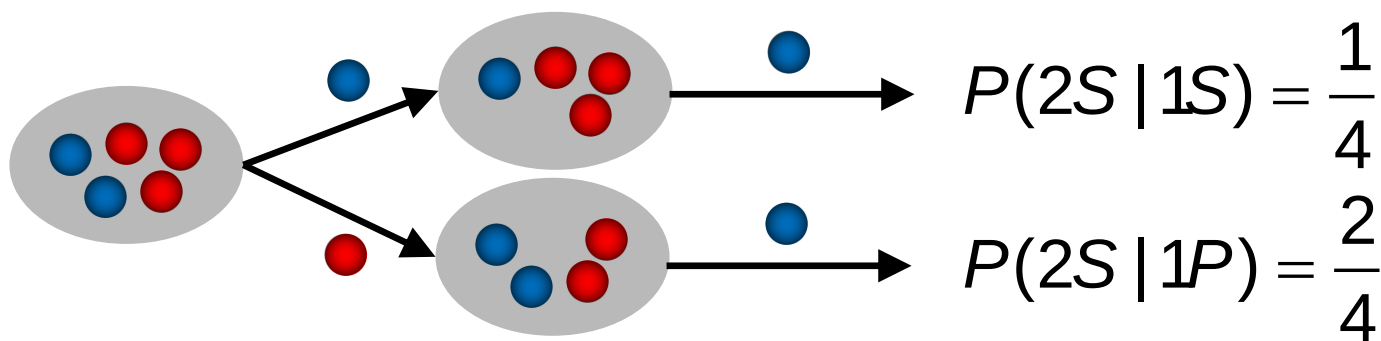
Tinglik
tõenäosus

NÄIDE: KUULID JA TINGLIK TÕENÄOSUS

2 sinist ja 3 punast kuuli. Võtame järjest kaks kuuli. Kui suur on tõenäosus, et teine kuul on sinine?

Sõltub sellest, milline oli esimene kuul!

1S esimene kuul sinine,
2S teine kuul sinine,
1P esimene kuul punane.



Tinglikud tõenäosused

TINGLIK TÕENÄOSUS

conditional probability

Sündmuse A toimumise **tinglik tõenäosus** sündmuse B suhtes on sündmuse A tõenäosus juhul, kui on toimunud sündmus B.

$P(A|B)$

On toimunud

NÄIDE: ÕPPEAINE STATISTIKA TULEMUSED

Kevadsemestrid 2014-2017, kokku 383 üliõpilast.

Defineerime järgmised sündmused:

POS positiivne tulemus õppeaines Statistika;

JTV50 jooksva töö eest (testid, kontrolltööd) punkte vähem kui 50% võimalikust.

$$P(\text{POS}) = 82\%$$

$$P(\text{POS} \mid \text{JTV50}) = 39\%$$

NÄIDE: EDUTAMINE 1

Ettevõttes on 1200 töötajat, kahe aasta jooksul on edutatud 324 töötajat.

	Edutati	Ei edutatud	Kokku
Mees	288	672	960
Naine	36	204	240
Kokku	324	876	1200

Tõenäosus, et on mees $P(M) = \frac{960}{1200}$

NÄIDE: EDUTAMINE 2

Ettevõttes on 1200 töötajat, kahe aasta jooksul on edutatud 324 töötajat.

	Edutati	Ei edutatud	Kokku
Mees	288	672	960
Naine	36	204	240
Kokku	324	876	1200

Tõenäosus, et on edutatud $P(E) = \frac{324}{1200}$

NÄIDE: EDUTAMINE 3

Ettevõttes on 1200 töötajat, kahe aasta jooksul on edutatud 324 töötajat.

	Edutati	Ei edutatud	Kokku
Mees	288	672	960
Naine	36	204	240
Kokku	324	876	1200

Tõenäosus, et
meest on edutatud

$$P(E | M) = \frac{288}{960} = \frac{288}{\frac{1200}{960}} = \frac{P(M \cap E)}{P(M)}$$

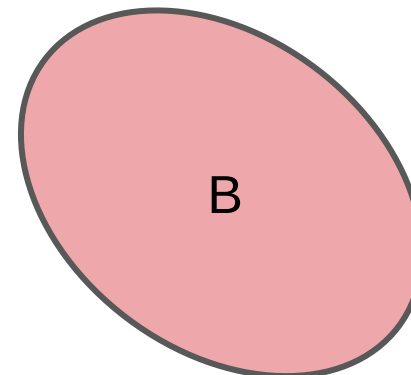
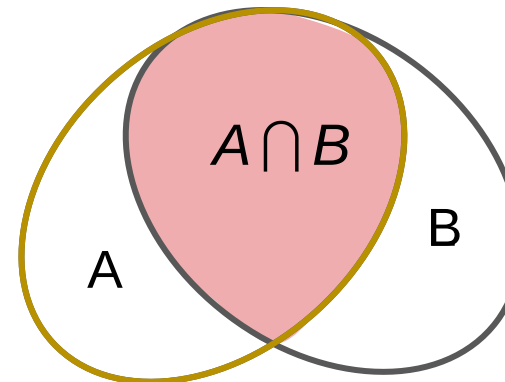
Tõenäosus, et
on mees JA on
edutatud.

Tõenäosus, et
on mees.

TINGLIKU TÕENÄOSUSE LEIDMINE

Sündmuse A **tinglik tõenäosus** sündmuse B suhtes on leitav järgmiselt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$$



SÜNDMUSTE KORRUTISE TÕENÄOSUS

joint probability

Kahe sündmuse A ja B korrutise tõenäosus (ehk ühistõenäosus) leitakse tingliku tõenäosuse abil

$$P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B)$$

Kuna $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

võib leida ka nii $P(B \cap A) = P(B | A) \cdot P(A)$

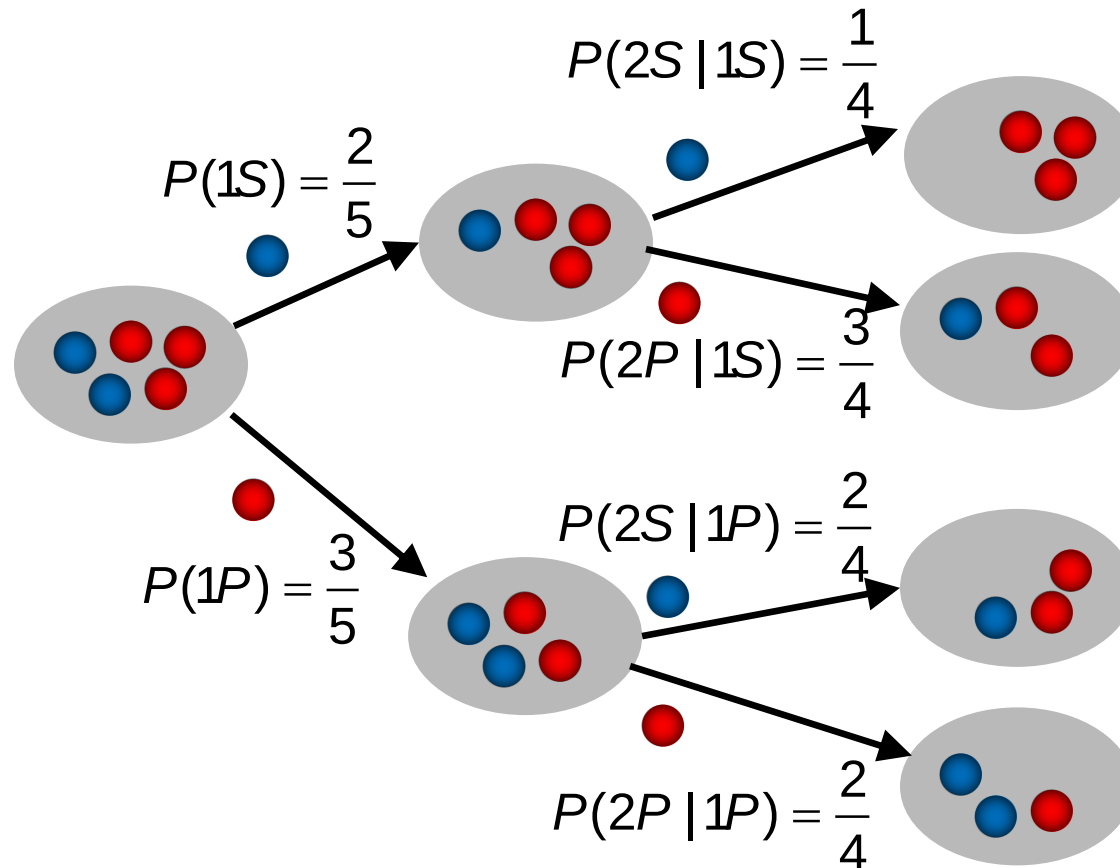
Sõltuvalt sellest, kumb tinglik tõenäosus on antud, kas $P(A|B)$ või $P(B|A)$.

NÄIDE: SÜNDMUSTE KORRUTISE TÕENÄOSUS

Võtame juhuslikult kuule. Sündmused:

1S	esimene kuul sinine,	2S	teine kuul sinine,
1P	esimene kuul punane,	2P	teine kuul punane.

$$P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B)$$



Mõlemad kuulid sinised

$$P(1S \cap 2S) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = P(1S) \cdot P(2S | 1S)$$

1. kuul sinine, 2. punane.

$$P(1S \cap 2P) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = P(1S) \cdot P(2P | 1S)$$

SÕLTUMATUD SÜNDMUSED

independent events

Kui sündmuse B toimumine ei mõjuta sündmuse A toimumist, siis

$$P(A|B) = P(A)$$

Siis A ja B on sõltumatud sündmused.

SÕLTUMATUTE SÜNDMUSTE KORRUTISE TÕENÄOSUS

$$P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B)$$

Kui A ja B on **sõltumatud** sündmused, siis

$$P(A | B) = P(A)$$

Nüüd $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Kahe teineteisest **sõltumatu** sündmuse korrutise tõenäosus võrdub nende sündmuste tõenäosuste korrutisega.

JAOTUS-
SEADUSED I

JUHUSLIK SUURUS

random number

Juhuslik suurus on suurus, mis katse tulemusel omandab juhuslikult ühe ja ainult ühe oma võimalikest väärtustest.

- Täringuviskel saadud silmade arv.
- Loengut külastavate üliõpilaste arv.
- Viie minuti jooksul poodi astuvate külastajate arv.
- Ühe ostja teenindamiseks kulunud aeg.
- Teatud kauba nõudlus mingil kuul.
- Aktsia keskmine hind päevas.

DISKREETNE JA PIDEV JUHUSLIK SUURUS

Diskreetne – väärtused on isoleeritud, erinevad üksteisest mingi lõpliku arvu võrra.

Pidev – väärtused täidavad mingi vahemiku täielikult ära.

Diskreetne või pidev?

- | | |
|---|------------|
| a) Täringuviskel saadud silmade arv. | Diskreetne |
| b) Viie minuti jooksul poodi astuvate küllastajate arv. | Diskreetne |
| c) Ühe ostja teenindamiseks kulunud aeg. | Pidev |
| d) Maisihelveste paki kaal täppismõõtmisel. | Pidev |
| e) Aktsia keskmine hind päevas. | Pidev |

NÄIDE: JAOTUSSEADUS

Kaebuste arv nädalas x_i	0	1	2	3	4	KOKKU
Nädalate arv ehk sagedus f_i	10	18	15	6	1	50

Kasutame tõenäosusi

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_j f_j}$$

Kaebuste arv nädalas x_i	0	1	2	3	4	KOKKU
Väärtuse x_i tõenäosus p_i	0,2	0,36	0,30	0,12	0,02	1

Igale väärtusele on vastavusse seatud selle esinemise tõenäosus.
Nüüd on antud kaebuste arvu [jaotusseadus](#).

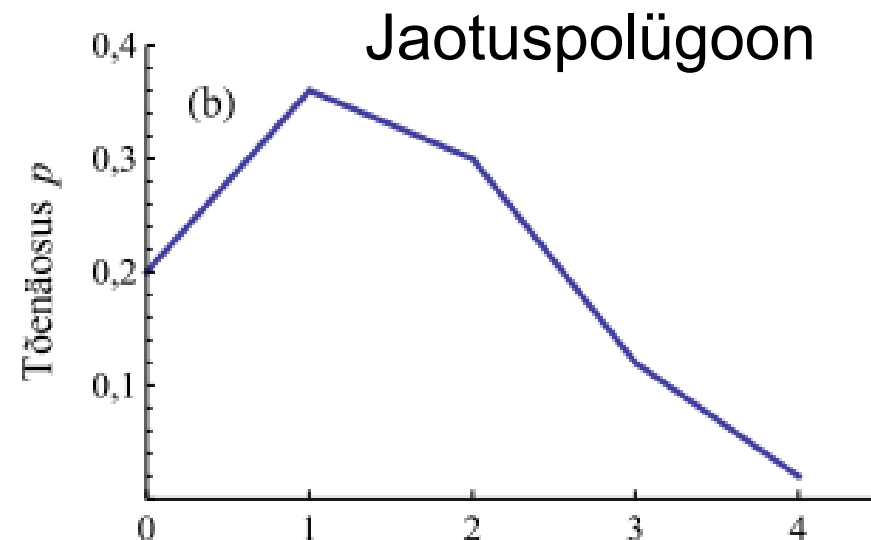
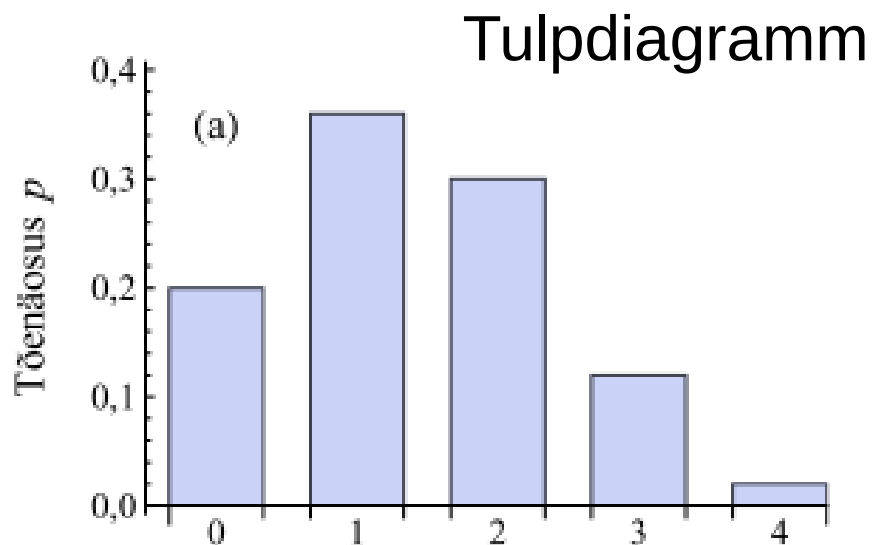
JAOTUSSEADUS

distribution law

Diskreetse juhusliku suuruse X jaotusseaduseks nimetatakse vastavust suuruse kõikvõimalike väärtuste x_i ja nende tõenäosuste p_i vahel.

Jaotustabel

Väärtus	x_1	x_2	...	x_k
Tõenäosus	p_1	p_2	...	p_k



NORMEERIMISTINGIMUS

Kaebuste arv nädalas x_i	0	1	2	3	4	KOKKU
Väärtuse x_i tõenäosus p_i	0,2	0,36	0,30	0,12	0,02	1

$$\sum_i p_i = 1$$

Summeerimine toimub üle kõigi juhusliku suuruse väärtuste.

NÄIDE: TÕENÄOSUS, ET VÄIKSEM-VÖRDNE

Kaebuste arv nädalas x_i	0	1	2	3	4	KOKKU
Väärtuse x_i tõenäosus p_i	0,2	0,36	0,30	0,12	0,02	1

Kui suur on tõenäosus, et kaebuste arv nädalas on kuni 2?

$$P(X \leq 2) = 0,2 + 0,36 + 0,3 = 0,86$$

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

Üldiselt

$$P(X \leq a) = \sum_{x_i \leq a} P(X = x_i)$$

NÄIDE: TÕENÄOSUS, ET SUUREM

Kaebuste arv nädalas x_i	0	1	2	3	4	KOKKU
Väärtuse x_i tõenäosus p_i	0,2	0,36	0,30	0,12	0,02	1

Kui suur on tõenäosus, et kaebuste arv nädalas on suurem kui 2?

1. võimalus arvutamiseks $P(X > 2) = 0,12 + 0,02 = 0,14$

2. võimalus: kasutame $P(X \leq 2) + P(X > 2) = 1$

normeerimistingimust

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$$

$$P(X > 2) = 1 - 0,86 = 0,14$$

Üldiselt

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a)$$

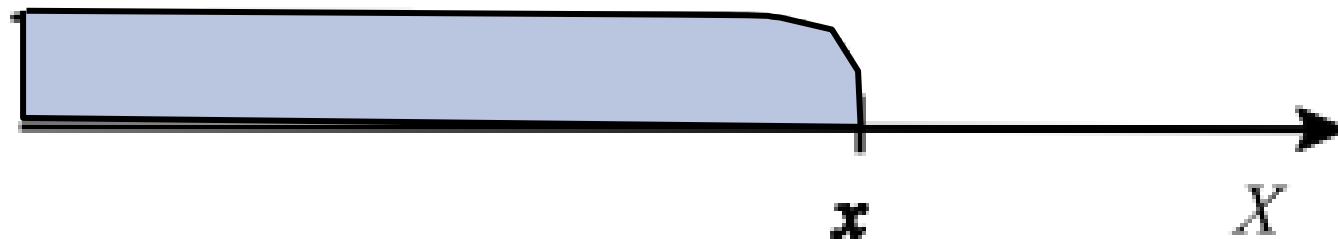
JAOTUSFUNKTSIOON

*cumulative distribution function,
CDF*

Juhusliku suuruse X **jaotusfunktsioon** $F(x)$ on tõenäosus, et juhusliku suuruse X väärtus on väiksem-võrdne mingist reaalarvust x :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Jaotusfunktsioon annab tõenäosuse, et X väärtus on selles piirkonnas.



NÄIDE: JAOTUSFUNKTSIOONI KASUTAMINE

Võimekuse testil saadud punktide arvu jaotus.

Punktid	Sagedus	Kumulatiivne sagedus	Kumulatiivne suhteline sagedus ehk jaotusfunktsioon
20	24	24	0,16
25	42	66	0,43
30	45	111	0,73
35	32	143	0,94
40	7	150	0,99
50	2	152	1,00

$$P(X \leq 25) = \dots = F(25) = 0,43$$

$$P(X > 25) = \dots = 1 - F(25) = 1 - 0,43 = 0,57$$

$$P(30 < X \leq 40) = \dots = F(40) - F(30) = 0,99 - 0,73 = 0,26$$

JAOTUSFUNKTSIOONI KASUTAMINE

Teades jaotusfunktsiooni $F(a)$, on võimalik leida järgmised tõenäosused. Juhusliku suuruse väärtus on

väiksem-võrdne mingist arvust a

$$P(X \leq a) = F(a)$$

suurem mingist arvust a

$$P(X > a) = 1 - F(a)$$

mingis vahemikus a kuni b

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

???

114169 Eestis registreeritud veoauto võimsuse jaotusfunktsioon.

Mootori võimsuse ülemine piir, kW	Jaotus- funktsioon F
100	0,53
200	0,82
300	0,87
400	0,99
>400	1

Allikas: Eesti avaandmed,
Sõidukite staatused Eestis.

1. Kui suur on tõenäosus, et juhuslikult valitud veoauto võimsus on kuni 200 kW?

$$P(X \leq 200) = \dots = F(200) = 0,82$$

2. Kui suur on tõenäosus, et juhuslikult valitud veoauto võimsus on vahemikus 200-300 kW?

$$P(200 < X \leq 300) = \dots = F(300) - F(200) = 0,87 - 0,82 = 0,05$$

NÄIDE: KESKVÄÄRTUS

Kaebuste arv nädalas x_i	0	1	2	3	4	KOKKU
Nädalate arv ehk sagedus f_i	10	18	15	6	1	50
$f_i x_i$	0	18	30	18	4	70

Keskmine kaebuste arv nädalas $\bar{x} = \frac{\sum_i f_i x_i}{\sum_i f_i} = \frac{70}{50} = 1,4$

Kaalutud aritmeetiline keskmine

Kasutame tõenäosusi $p_i = \frac{f_i}{\sum_j f_j}$

Kaebuste arv nädalas x_i	0	1	2	3	4	KOKKU
Väärtuse x_i tõenäosus p_i	0,2	0,36	0,30	0,12	0,02	1
$p_i x_i$	0	0,36	0,60	0,36	0,08	1,4

$$\bar{x} = \sum_i p_i x_i = 1,4$$

Keskväärtaus

KESKVÄÄRTUS EHK OODATAV VÄÄRTUS

expected value

Kui juhusliku suuruse X väärtuse x_i esinemise tõenäosus on p_i , siis selle juhusliku suuruse **keskväärtus** ehk **oodatav väärtus**

$$\mu = E[X] = \sum_i p_i x_i$$

NÄIDE: KASUMI OODATAV VÄÄRTUS

Milline ettevõtte rajada?

Alternatiiv	Kasum		Oodatav kasum
	Suur nõudlus, tõenäosus 0,5	Väike nõudlus, tõenäosus 0,5	
Väike ettevõtte	8	7	7,5
Keskmine ettevõtte	14	5	9,5
Suur ettevõtte	20	-9	5,5

Oodatava kasumi arvutus

Väike ettevõtte $0,5 \cdot 8 + 0,5 \cdot 7 = 7,5$

Keskmine ettevõtte $0,5 \cdot 14 + 0,5 \cdot 5 = 9,5$

Suur ettevõtte $0,5 \cdot 20 + 0,5 \cdot (-9) = 5,5$

Suurim oodatav kasum

Vt ka otsustamise puu https://www.sauga.pri.ee/qme/otsustamise_puu.html

OODATAVA VÄÄRTUSE KASUTAMINE

Oodatav väärtus on otsustamisel **kriteeriumiks**.

Valitakse see alternatiiv, mille korral oodatav väärtus on **ekstreemne**.

Näiteks

- oodatav kasum maksimaalne;
- oodatav kulu minimaalne.

Oodatav väärtus tegelikult ei pruugi realiseeruda.

Näiteks keskmise ettevõtte valimisel realiseerub kasum 14 või 5.

Alternatiiv	Kasum		Oodatav kasum
	Suur nõudlus, tõenäosus 0,5	Väike nõudlus, tõenäosus 0,5	
Väike ettevõte	8	7	7,5
Keskmine ettevõte	14	5	9,5
Suur ettevõte	20	-9	5,5

NÄIDE: DISKREETNE JA PIDEV JUHUSLIK SUURUS

Arvuhulk $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Tuleb valida juhuslikult üks arv. Valitud arv vastab **diskreetsele** juhuslikule suurusele X .

Näiteks tõenäosus

$$P(X = 2) = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$$

Reaalarvude vahemik $[0, 1]$

Tuleb valida juhuslikult üks arv. Valitud arv võib olla 0,243, $1/3$, $\pi/4$. Valitud arv vastab **pidevale** juhuslikule suurusele X . Erinevaid võimalusi lõpmatu arv.

Kui suur on tõenäosus, et valitakse arv 0,3?

$$P(X = 0,3) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Aga mingi arv valitakse. $\sum_i p_i = 1$ $p_i = 0$ Vastuolu?

PIDEV JUHUSLIK SUURUS JA TÕENÄOSUS

Pideva juhusliku suuruse korral ei saa rääkida mingi üksiku konkreetse väärtuse esinemise tõenäosusest.

Pideva juhusliku suuruse korral on konkreetse üksiku väärtuse esinemise tõenäosus 0.

Nullist erinev on mingisse **vahemikku** jäämise tõenäosus

Näiteks kui tuleb valida arv vahemikust $[0, 1]$, siis tõenäosus, et valitud arv jääb vahemikku $[0,5, 1]$, on 0,5.

JAOTUSTIHEDUS

*probability density function,
PDF*

Tõenäosus, et pidev juhuslik suurus X langeks vahemikku $(x, x + \Delta x)$ pikkusega Δx , on

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F$$

Suhteline sagedustihedus $f^* = \frac{\Delta F}{\Delta x}$

Tõenäosus
ühiku kohta

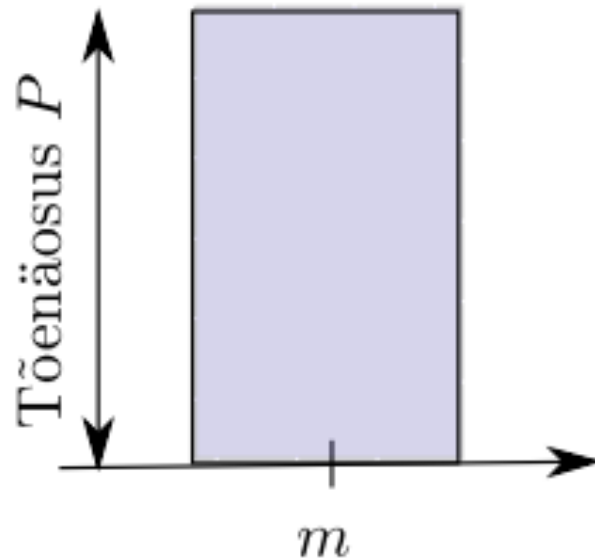
$$\Delta x \rightarrow 0$$

Jaotustihedus on
jaotusfunktsiooni tuletis:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(x)$$

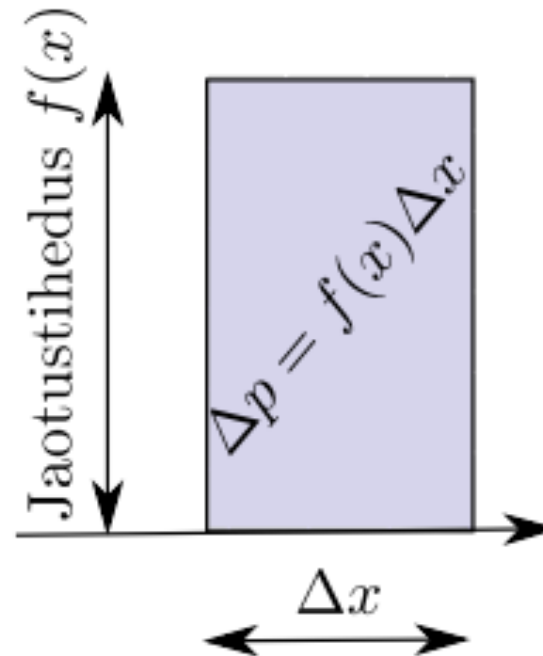
TÕENÄOSUSE VISUAALNE KUJUTAMINE

Diskreetne suurus



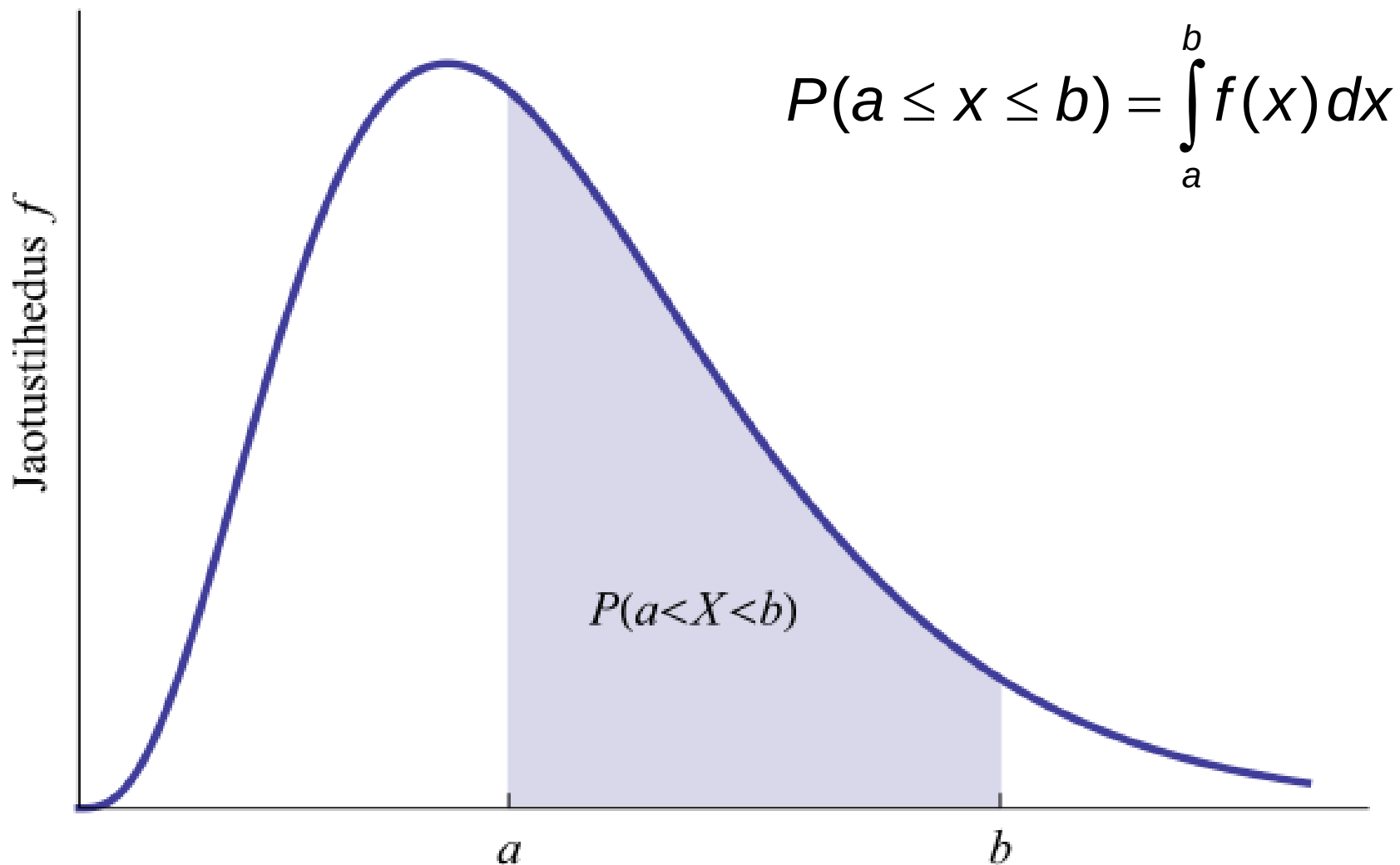
Tõenäosus on
tulba kõrgus

Pidev suurus

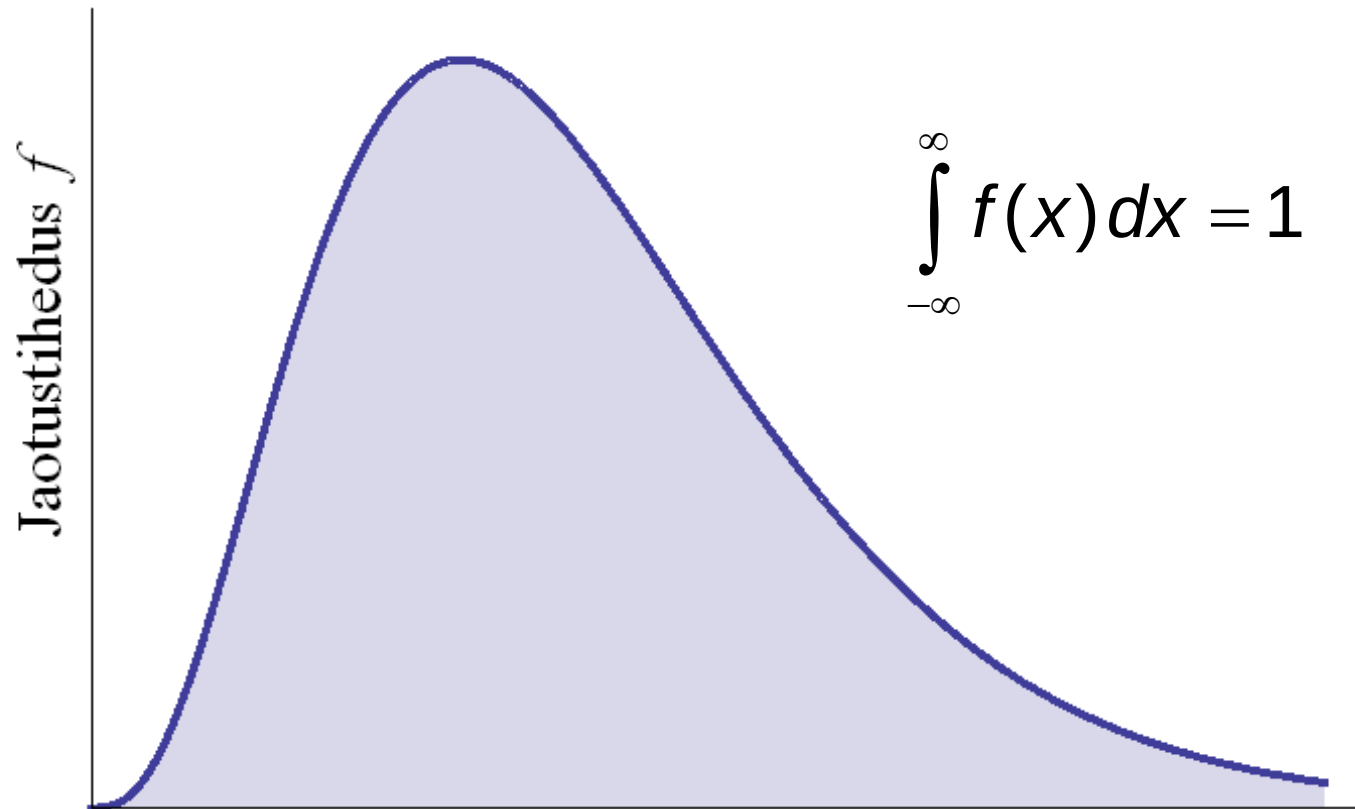


Tõenäosus on
tulba pindala

JAOTUSTIHEDUSE GRAAFIK JA TÕENÄOSUS



JAOTUSTIHEDUSE NORMEERIMISTINGIMUS



Jaotustiheduse kõvera alla jääv pindala on alati 1.

KESKVÄÄRTUS JA DISPERSIOON PIDEVAL JUHUL

Keskväärtus
diskreetsel juhul

$$\mu = \sum_i p_i x_i$$

$$p_i \rightarrow dp = f(x)dx$$

$$\sum \rightarrow \int$$

Keskväärtus
pideval juhul

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

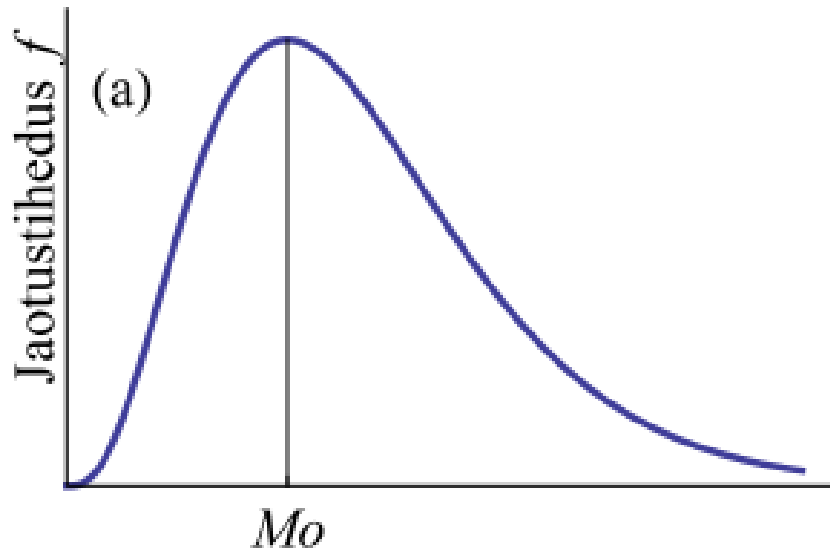
Dispersioon
diskreetsel juhul

$$\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 p_i$$

Dispersioon
pideval juhul

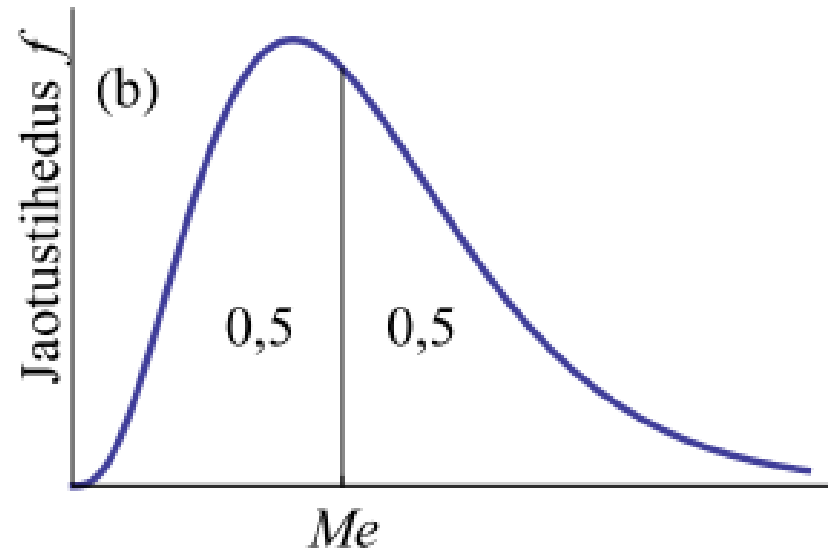
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

MOOD JA MEDIAAN PIDEVAL JUHUL



Mood on jaotustiheduse maksimumkoht

$$f(Mo) = \max[f(x)]$$



Mediaan on defineeritud nii, et

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x) dx = 0,5$$

EMPIIRILISED JAOTUSED

Teostame mingit katset palju kordi, iga kord registreerime juhusliku suuruse väärtuse ja leiame statistilised tõenäosused.

Saame **empiirilise jaotuse**.

Empiirilise jaotuse saab anda vaid tabeli või diagrammina.

Väärtus	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	KOKKU
Tõenäosus	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	1

TEOREETILISED JAOTUSED

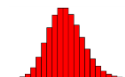
Teatud teoreetilistest printsiipidest tuletatud jaotusseadus on **teoreetiline jaotus**.

- Diskreetse juhusliku suuruse korral: valem **tõenäosuste** leidmiseks.
- Pideva juhusliku suuruse korral: valem **jaotustiheduse** leidmiseks.
- Tuntakse üle 100 erineva teoreetilise jaotuse.
- Erinevad juhuslikud suurused alluvad erinevatele jaotusseadustele.

TÄHTSAMAD TEOREETILISED JAOTUSED

Diskreetsed jaotused

- Ühtlane jaotus
- Bernoulli jaotus
- Binoomjaotus
- Poissoni jaotus

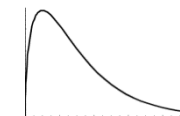
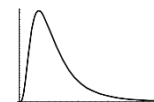
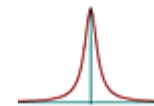
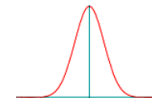
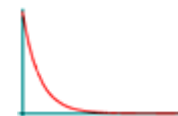


.....

.

Pidevad jaotused

- Ühtlane ehk ristkülikjaotus
- Eksponentjaotus
- Normaaljaotus
- t - jaotus
- F - jaotus
- χ^2 -jaotus (hii-ruut jaotus)



.....

EMPIIRILINE JA TEOREETILINE JAOTUS

1. Juhusliku suuruse iseloomu ja empiirilise jaotuse järgi leitakse sobiv teoreetiline jaotus.
2. Vaatlusandmete põhjal leitakse teoreetilise jaotuse parameetrid.
3. Teoreetilist jaotust kasutatakse tõenäosuste arvutamisel.

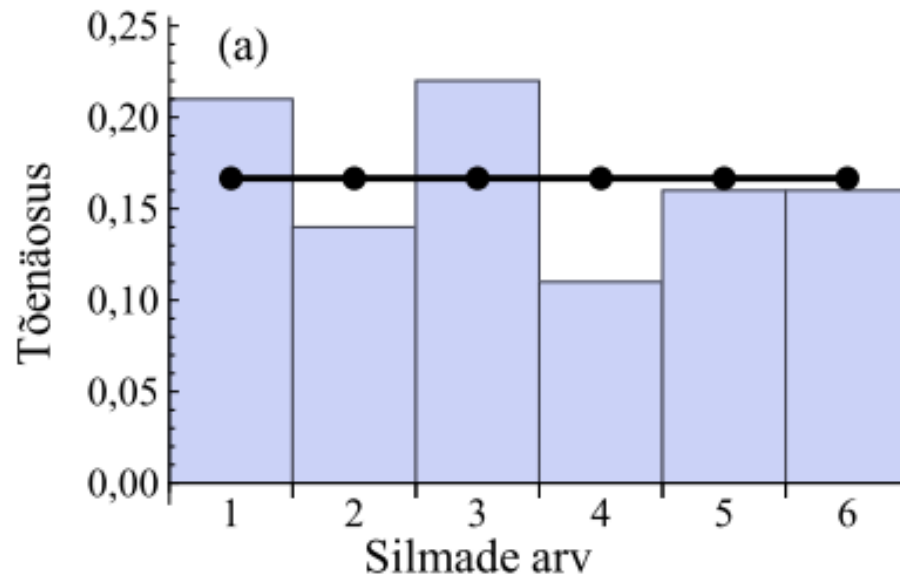
Seda, kas valitud teoreetiline jaotus sobib, saab testida jaotuse sobivuse χ^2 testiga.

DISKREETNE ÜHTLANE JAOTUS

Kui juhuslikul suurusel X on n erinevat väärtust, siis diskreetse ühtlase jaotuse korral

$$p_i = \frac{1}{n}$$

Tuntuim: täringuviskel saadud silmade arv



$p(1) = p(2) = \dots = p(6) = \frac{1}{6}$

Tulbad: 100 viske korral saadud
empiiriline jaotus

Demo: täring

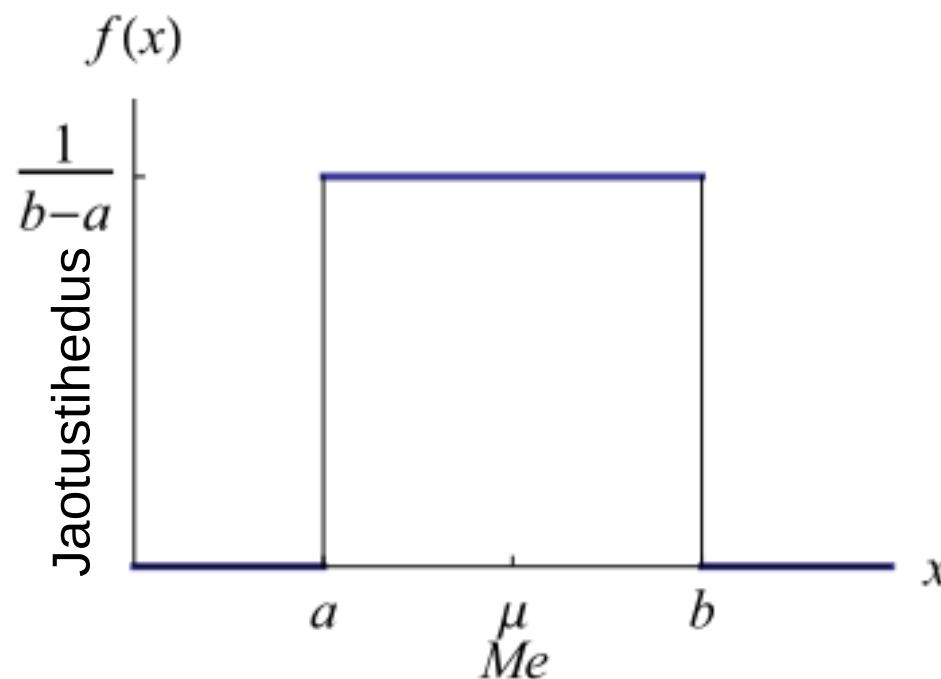
PIDEV ÜHTLANE JAOTUS

Pidev ühtlane ehk **ristkülikjaotus** lõigul $[a, b]$

Jaotustihedus $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{kui } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{kui } x > b \end{cases}$

Keskväärtus $\mu = \frac{1}{2}(a + b),$

Mediaan $Me = \frac{1}{2}(a + b).$



Demo: ristikülikjaotus

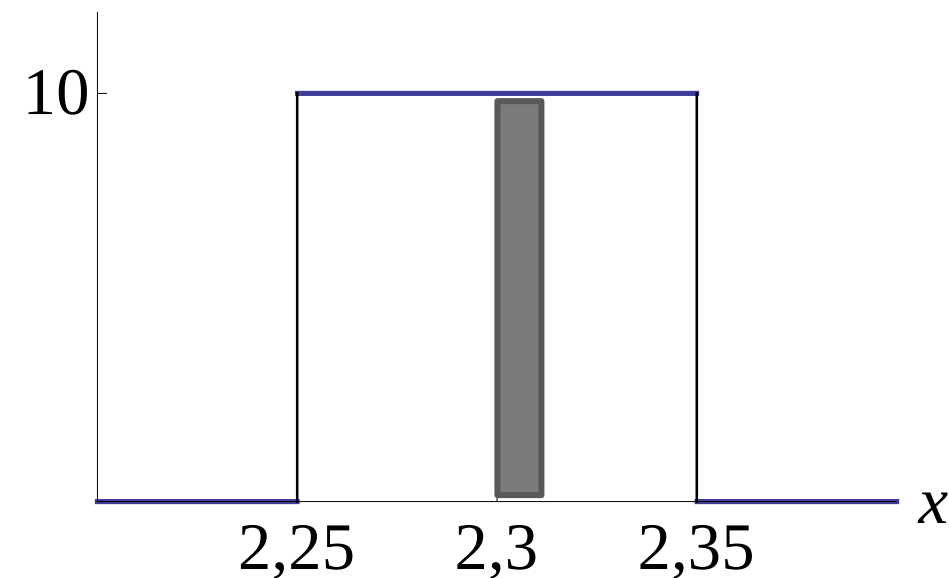
NÄIDE: RISTKÜLIKJAOTUSE ESINEMINE

Ümardamisvea jaotus.

Eesti ettevõtted investeerisid 2015. aastal **2,3** mld €.

See on on ümardatud väärtus. Tegelik väärtus on vahemikus $2,3 \pm 0,05$ mld € ehk vahemikus 2,25 kuni 2,35 mld €.

$$f(x) = \frac{1}{2,35 - 2,25} = 10 \quad \text{kui } 2,25 \leq x \leq 2,35$$



Kui suure tõenäosusega
2,30 ja 2,31 mld € vahel?

$$\begin{aligned} P &= f(x) \Delta x = \\ &= 10 \cdot (2,31 - 2,30) = 0,1 \end{aligned}$$

Halli ristküliku pindala.

POSITIIVNE JA NEGATIIVNE TULEMUS

Viskame täringut ja ootame silmade arvu „6“.

„6“ kas tuleb (katse tulemus positiivne) või ei tule (katse tulemus negatiivne).

Positiivse tulemuse tõenäosus on $1/6$.



Teeme 10 viset. Kui suur on tõenäosus, et 10-st viskest tuleb „6“

- a) mitte ühelgi juhul;
- b) ühel juhul;
- c) viiel juhul?

Panga laenuportfelli kuulub 150 ettevõtet krediidireitinguga Baa. Reiting Baa tähendab, et viie aasta jooksul on maksejõuetuse tekkimise tõenäosus ligikaudu 2%.

Kui suur on tõenäosus, et viie aasta jooksul muutub maksejõetuks

- a) mitte ükski ettevõtte;
- b) maksimaalselt viis ettevõtet;
- c) üle viie ettevõtte?



BINOOMJAOTUS

binomial distribution

Binoomjaotusega on tegemist, kui

- katse tulemus võib olla positiivne või negatiivne;
- katset korraldatakse n korda, registreerides positiivsete tulemuste arvu m ;
- katsed on sõltumatud, st eelneva katse tulemus ei mõjuta järgnevate katsete tulemust;
- positiivse tulemuse esinemise tõenäosus p on kõikide katsete korral ühesugune.

Positiivsete tulemuste arv on juhuslik suurus, mis allub binoomjaotusele

$$X \sim B(n, p)$$

BERNOULLI VALEM

Olgu katse tulemus tõenäosusega p positiivne ja tõenäosusega $1-p$ negatiivne.

Katset n korda korrates võib saada m positiivset ja $n-m$ negatiivset tulemust.

Positiivsete tulemuste arv m on diskreetne juhuslik suurus, mille tõenäosus arvutatakse Bernoulli valemiga

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

Kombinatsioonide arv n elemendist m kaupa

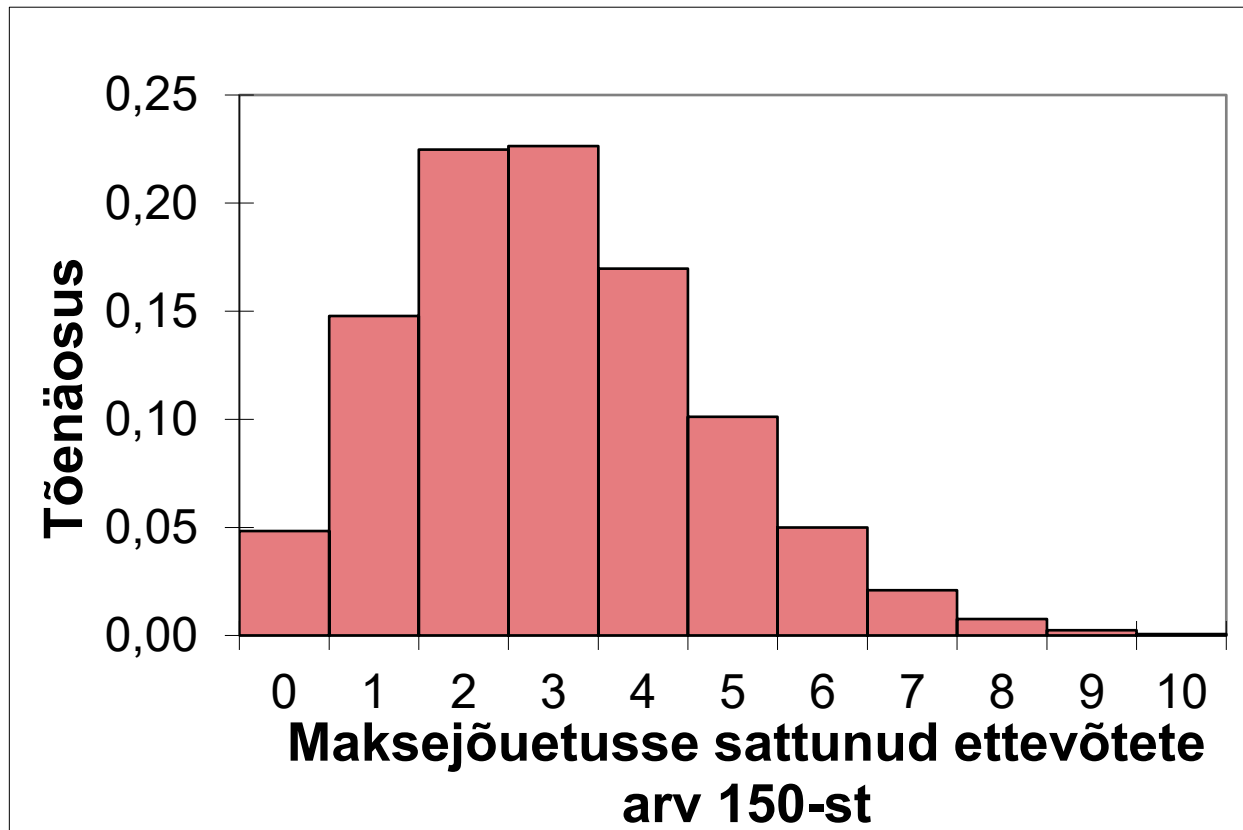
$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

NÄIDE: MAKSEJÕUETUSE TEKKIMINE

Tõenäosus, et ettevõttel tekib viie aasta jooksul maksejõuetus, on $p=0,02$.

Selliste ettevõtete arv $n=150$.

Binoomjaotus $B(150, 0,02)$



Tõenäosus, et viie aasta jooksul muutub maksejõetuks

a) mitte ükski ettevõtte $P(X = 0) = 0,048$;

b) üks ettevõtte $P(X = 1) = 0,148$;

c) kaks ettevõtet $P(X = 2) = 0,225$.

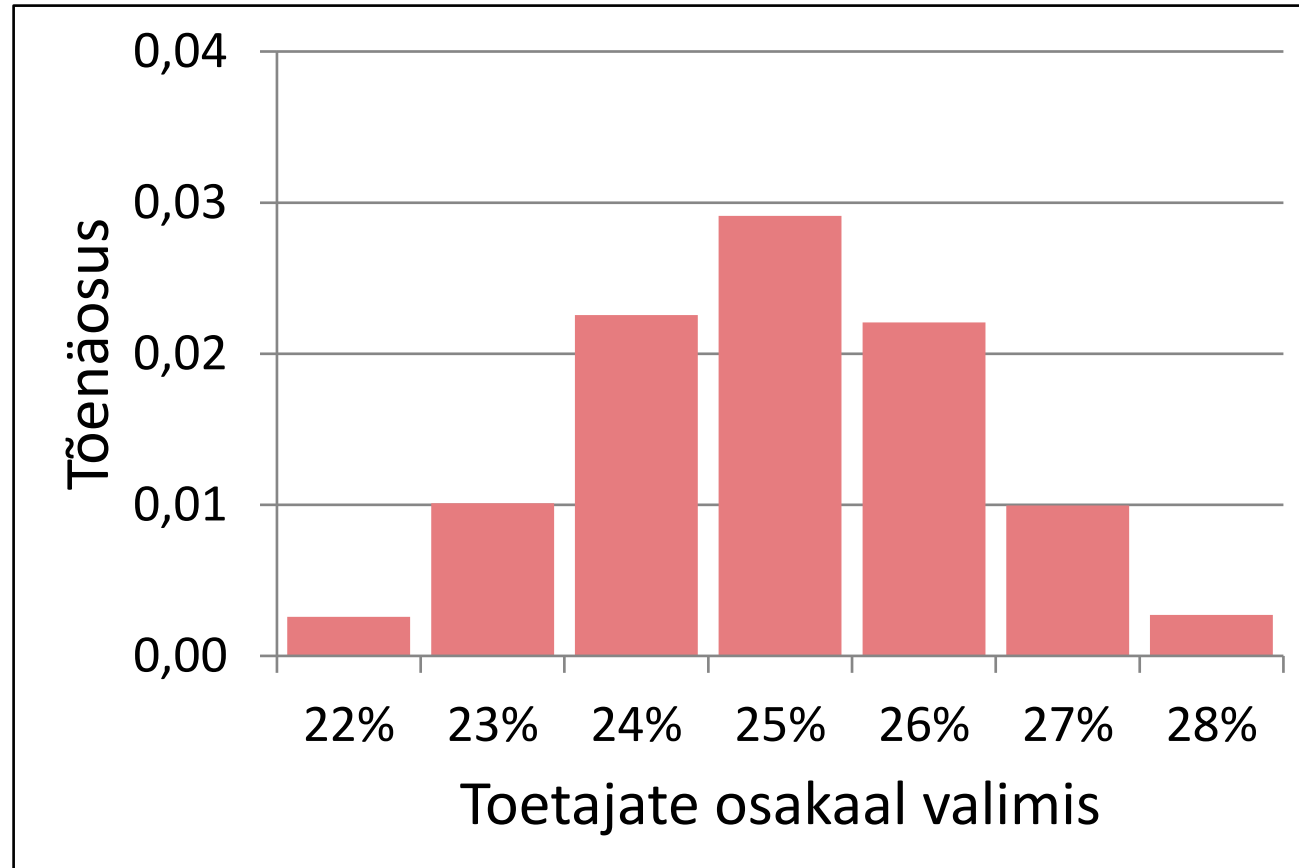
Demo: binoomjaotus

NÄIDE: "KAS TOETATE ERAKONDA A?"

Kogum: erakonda toetab 25%, ei toeta 75%.

Positiivse sündmuse tõenäosus $p=0,25$.

Juhuvalim,
vastajaid $n=1000$.
Toetajate arv valimis
allub binoomjaotusele
 $B(1000, 0,25)$



???

Milliste tõenäosuste leidmisel saab kasutada binoomjaotust?

- A. Töötuse määr Eestis aastal 2024 oli 7,4%. Kui suure tõenäosusega on 10 juhuslikult valitud inimese hulgas 5 töötut?
- B. Kui suure tõenäosusega tuleb järgmise viie minuti jooksul poodi rohkem kui 10 inimest?
- C. Norstati küsitlus: erakonda Isamaa toetab 31,2% elanikkonnast (19. veebr 2025). Kui suure tõenäosusega juhuslikult valitud 5 inimese seas kõik toetavad erakonda Isamaa?
- D. Kui suure tõenäosusega jääb Harju Elektri aktsia hind järgmisel nädalal vahemikku 5,00-5,10 eurot?

Binoomjaotus

Binoomjaotus

Jaotusseadustega
jätkame järgmisel loengul