# HÜPOTEESIDE STATISTILINE KONTROLLIMINE I

# LOENGUTEEMAD

- Nullhüpotees, sisukas hüpotees ja statistiline kriteerium.
- Keskväärtuse testimine suure valimi korral.
- Olulisuse nivoo ja kahte liiki vead.
- Kahepoolne ja ühepoolne hüpotees.
- Olulisuse tõenäosus.
- Väike valim ja keskväärtuse testimine *t*-testiga.
- Kahe kogumi keskväärtuse võrdlemine ja sõltumatud valimid.
- Kahe kogumi keskväärtuse võrdlemine ja sõltuvad valimid.

# NÄIDE BAKALAUREUSETÖÖST, 1

Uuring: töötajate hinnang ettevõtte tugevusele.

10 väidet, mida paluti hinnata 5-palli süsteemis:

1. Kolleegid on omavahel konkurendid.
2. Omavaheline suhtlemine on lihtne.
3. Organisatsiooni liikmed jagavad sarnaseid uskumusi ja väärtushinnanguid.
4. Inimesed mõtlevad rohkem organisatsiooni eesmärkidele kui oma vajadustele.
5. Kolleegid on omavahel meeskonnaliikmed.
6. …..

# NÄIDE BAKALAUREUSETÖÖST, 2

## UURINGU TULEMUSED

| Firma tugevus HINNANGUTE KESKMISED | | |
|---|---|---|
| Noored | Keskealised | Vanemad |
| 2,50 | 2,79 | 2,75 |
| 4,42 | 3,84 | 4,25 |
| 3,50 | 3,26 | 3,56 |
| 3,00 | 2,47 | 2,75 |
| 4,33 | 3,84 | 3,56 |
| 3,75 | 2,84 | 3,06 |
| 4,17 | 3,89 | 4,00 |
| 4,17 | 3,58 | 4,00 |
| 3,67 | 3,47 | 3,06 |
| **3,72** | **3,33** | **3,44** |

Aritmeetiline keskmine

Üliõpilase väide:
Kuna erinevate vanusegruppide keskmised on erinevad, siis: hinnang firma tugevusele sõltub vanusest.

# NÄIDE BAKALAUREUSETÖÖST, 3

JAOTAME
JUHUSLIKULT
KOLME
GRUPPI

| Firma tugevus HINNANGUTE KESKMISED | | |
|---|---|---|
| Grupp A | Grupp B | Grupp C |
| 2,50 | 2,75 | 2,79 |
| 4,25 | 4,42 | 3,84 |
| 3,26 | 3,56 | 3,50 |
| 2,75 | 2,47 | 3,00 |
| 3,84 | 4,33 | 3,56 |
| 3,75 | 3,06 | 2,84 |
| 4,17 | 3,89 | 4,00 |
| 4,00 | 3,58 | 4,17 |
| 3,67 | 3,47 | 3,06 |
| **Aritmeetiline keskmine:** 3,58 | 3,50 | 3,42 |

on erinevad

# NÄIDE BAKALAUREUSETÖÖST, 4

Gruppide keskmised

| | | | |
|---|---|---|---|
| Juhuslik grupeerimine | **3,58** | **3,50** | **3,42** |
| Vanuse järgi grupeerimine | **3,72** | **3,33** | **3,44** |

Kui palju peavad keskmised erinema, et võiksime öelda:
erinevus ei ole tingitud juhuslikkusest,
erinevus on tingitud vanusest?

**VAJA KRITEERIUMI !**

# TURUNDAJA: RAHA TULEB KULUTADA ÕIGESTI

Rahvusvaheline digiturunduse guru Rob Thomas.
Foto: Eero Vabamägi / Postimees

Postimees. Majandus. 1.04.2016

"Palju raha kulutatakse siiani igasugustele kampaaniatele, aga mitte nende tulemuste mõõtmisele. Võiks isegi öelda, et paljud ettevõtted kulutavad 95 protsenti eelarvest kampaaniatele, aga vaid viis protsenti selle **tulemuslikkuse mõõtmisele**. …"

Kas turunduskampaania tulemusena müük suurenes?
Võib-olla oli suurenemine tingitud muudest juhuslikest põhjustest?
Kui palju peab müük suurenema, et saaks öelda: turunduskampaania mõjus?

**VAJA KRITEERIUMI !**

# OTSUSTAMISE KRITEERIUM

KRITEERIUMI annab hüpoteeside statistilise kontrollimise meetod.

Meetod võimaldab kindlaks teha, kas ERINEVUS ON PIISAV väitmaks, et see on põhjustatud ühe **olulise teguri** poolt.

Alternatiiv: erinevus võib olla seletatav mõõdetava tunnuse **juhusliku** varieerumisega.

Demo: otsustamise kriteerium hüpoteesi testimisel

# NÄITED

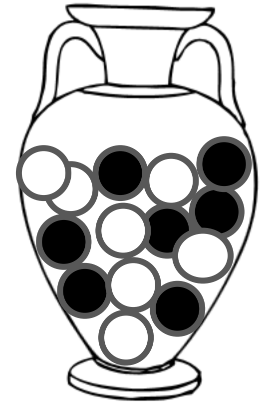
- Ka emapalk suurendas sündimust?
- Ka euro tulek mõjutas hindasid?
- Kas kõrg- ja keskharidusega inimeste hulgas on töötute osakaal erinev?
- Kas erinevate sotsiaalsete gruppide suhtumine progressiivsesse tulumaksu on erinev?
- Kas erinevate pensionifondide volatiilsus (risk) on erinev?
- Kas eksporditoetust saanud ettevõtted on ekspordis edukamad?
- Kas toetus valitsusele on kasvanud?

# KUIDAS LEITAKSE KRITEERIUM?

LÄHTUTAKSE TÕENÄOSUSEST!

# NÄIDE: KUULID URNIS

Valgeid kuule 50
Musti kuule 50



Võetakse välja 10 kuuli (juhuvalim).

Kui palju on nende 10 hulgas valgeid, kui palju musti?

Erinevad võimalused:

| Valgeid | Musti | Tõenäosus |
|---|---|---|
| 5 | 5 | 0,26 |
| 4 | 6 | 0,21 |
| 3 | 7 | 0,11 |
| 2 | 8 | 0,038 |
| 1 | 9 | 0,0072 |
| 0 | 10 | 0,00059 |

Tõenäosus leitakse hüpergeomeetrilise jaotuse põhjal.

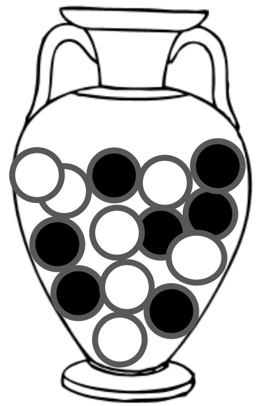
KRITEERIUM

0,046 < 0,05

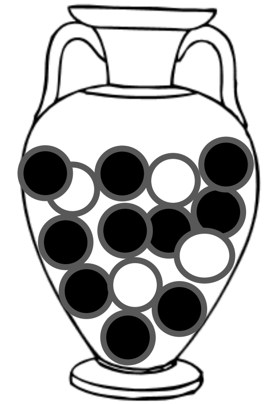
See on väike tõenäosus

# NÄIDE: 2 URNI

A



B



Urnis A kuule võrdselt
Valgeid 50
Musti 50

Urnis B
valgeid
vähem

Ühest urnist (**ei tea, kummast**) võetakse välja 10 kuuli.
Loetakse üle, palju on valgeid, palju musti.

Kas võeti urnist A?

| Valgeid | Musti | Tõenäosus |
|---:|---:|---:|
| 5 | 5 | 0,26 |
| 4 | 6 | 0,21 |
| 3 | 7 | 0,11 |
| 2 | 8 | 0,038 |
| 1 | 9 | 0,0072 |
| 0 | 10 | 0,00059 |

Tõenäoliselt võeti urnist A.

Vähetõenäoline, et võeti urnist A.

# NULLHÜPOTEES JA SISUKAS HÜPOTEES

Nullhüpotees: juhuvalim võeti urnist A.

NULLHÜPOTEES $H_0$

Sisukas hüpotees: juhuvalim ei võetud urnist A.

SISUKAS HÜPOTEES $H_1$

Tõenäosusjaotus leitakse nullhüpoteesist lähtudes

| Valgeid | Musti | Tõenäosus |
|---|---|---|
| 5 | 5 | 0,26 |
| 4 | 6 | 0,21 |
| 3 | 7 | 0,11 |
| 2 | 8 | 0,038 |
| 1 | 9 | 0,0072 |
| 0 | 10 | 0,00059 |

Võtta vastu nullhüpotees.

Nullhüpotees on ümber lükatud, võtta vastu sisukas hüpotees.

# KRIITILINE PIIRKOND

Nullhüpotees: juhuvalim võeti urnist A.

NULLHÜPOTEES $H_0$

Sisukas hüpotees: juhuvalim ei võetud urnist A.

SISUKAS HÜPOTEES $H_1$

| Valgeid | Musti | Tõenäosus |
|---|---|---|
| 5 | 5 | 0,26 |
| 4 | 6 | 0,21 |
| 3 | 7 | 0,11 |
| 2 | 8 | 0,038 |
| 1 | 9 | 0,0072 |
| 0 | 10 | 0,00059 |

KRIITILINE PIIRKOND

Võtta vastu nullhüpotees.

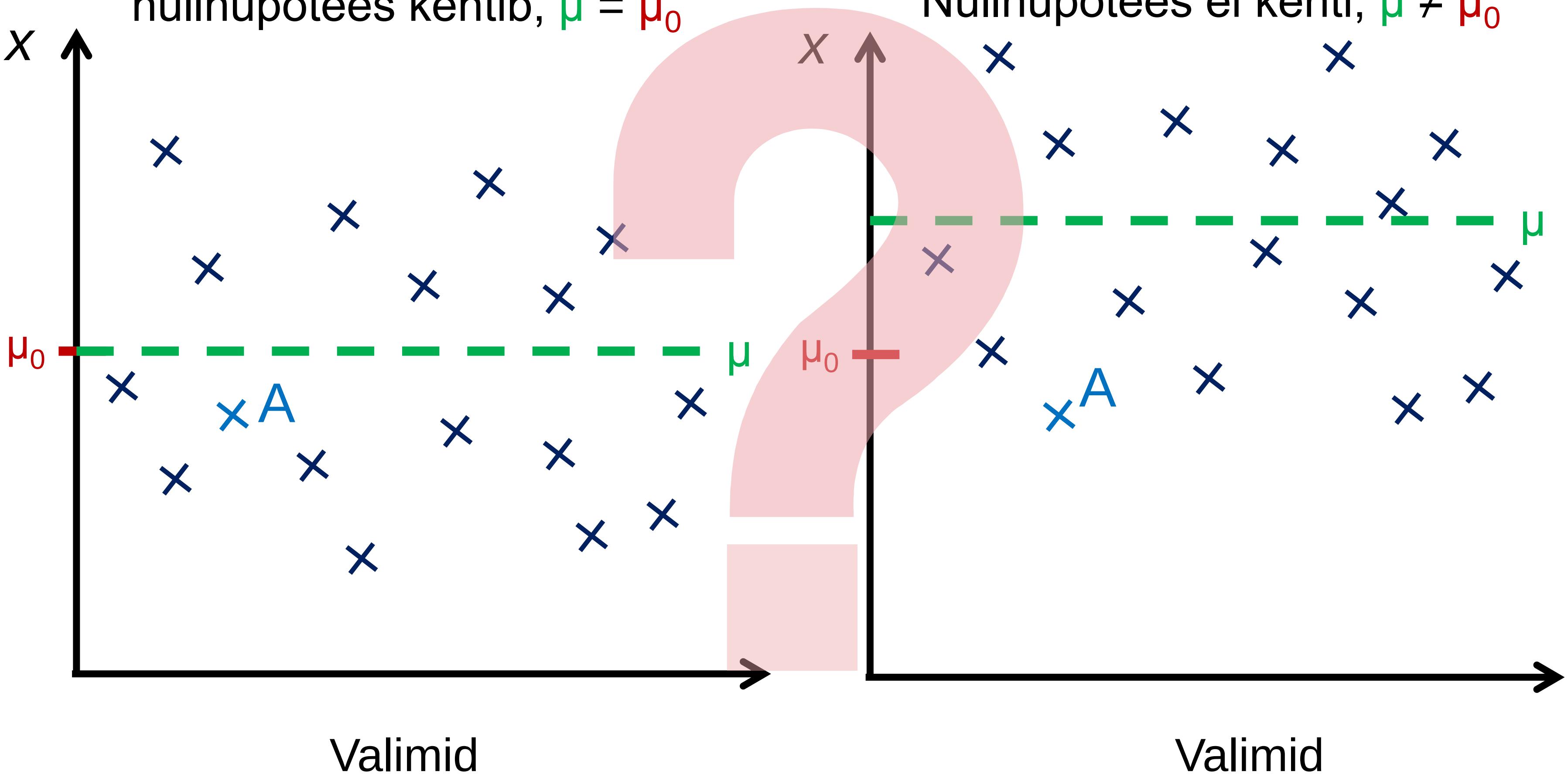
**Kriitiline piirkond** on see, kus nullhüpotees on ümber lükatud.

# KUMMAST KOGUMIST?

Nullhüpoteesile vastav väärtus $\mu_0$. Kogumi keskväärtus $\mu$.

Kogum 1:
nullhüpotees kehtib, $\mu = \mu_0$

Kogum 2:
Nullhüpotees ei kehti, $\mu \neq \mu_0$



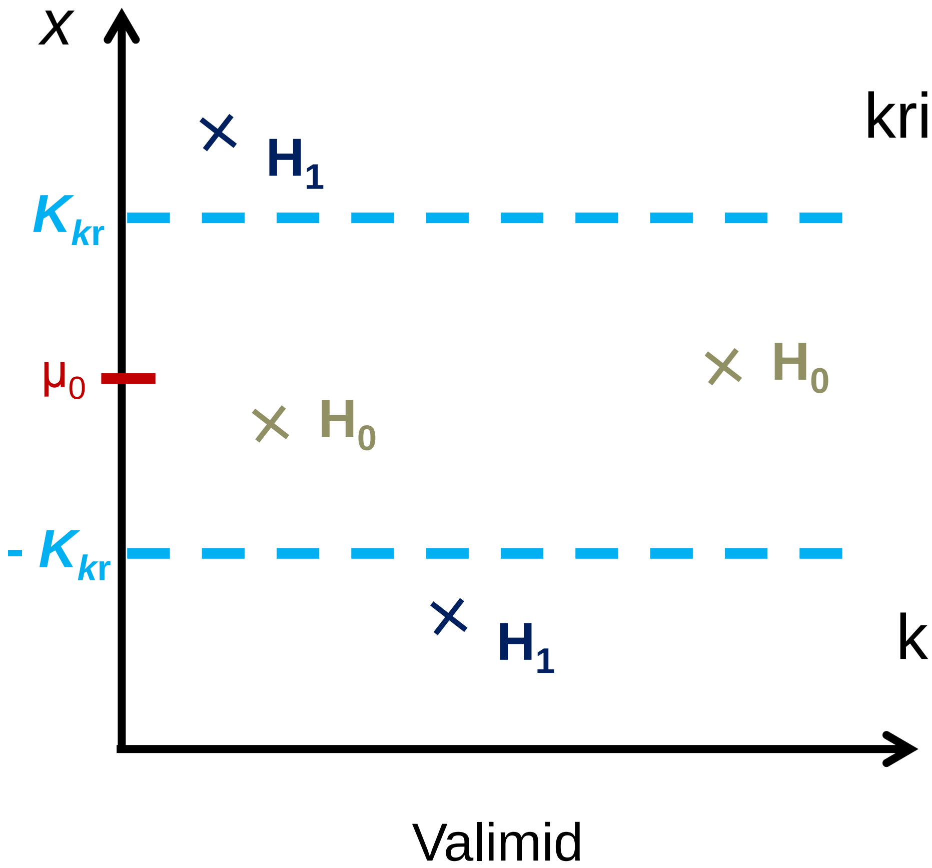

Kummast kogumist võeti valim A?

# OTSUSTAMINE

Nullhüpoteesile vastav väärtus $\mu_0$.

Leiame nullhüpoteesile vastavad kriitilised väärtused.

Iga valimi korral otsustame, kas võtta vastu nullhüpotees $H_0$ või sisukas $H_1$




kriitiline piirkond

Tõenäosus, et kehtiva nullhüpoteesi korral satub kriitilisse piirkonda, on < $\boxed{0,05}$

kriitiline piirkond

olulisuse nivoo

# ÜKS TULEMUS KAHEST VÕIMALIKUST

Püstitatud hüpoteesi statistilisel kontrollimisel võib tulemus olla üks kahest:

- nullhüpotees lükatakse tagasi ja vastu võetakse sisukas hüpotees.
    - Seda juhul, kui erinevus nullhüpoteesist on nii suur, et on tõenäoline: nullhüpotees ei kehti.
- tuleb jääda nullhüpoteesi juurde.
    - Erinevus nullhüpoteesist on nii väike, et on tõenäoline: nullhüpotees kehtib.

# ERINEVAD TESTID

- Erinevate situatsioonide korral erinevad testid.
- Mingi situatsiooni korral on konstrueeritud valimi põhjal arvutatav teststatistik.
- Teststatistik konstrueeritakse nii, et see alluks mingile juhusliku suuruse jaotusseadusele.
- Sellest jaotusseadusest leitakse teststatistiku kriitilised väärtused.

- *z*-test
- *t*-test
- märgitest
- $\chi^2$ -test (hii-ruut test)
- Mann-Whitney test
- Wilcoxoni test
- ühefaktoriline dispersioonanalüüs
- kahefaktoriline dispersioonanalüüs
- …..

# ÜHTNE METOODIKA

1. Otsusta, millist testi kasutad.
2. Püstita hüpoteesipaar:

   $H_0$ : nullhüpotees;

   $H_1$: alternatiivne ehk sisukas hüpotees.
3. Kasutades vaatlusandmeid, arvuta valitud testile vastava statistilise parameetri empiiriline väärtus $K$.
4. Võta ette olulisuse nivoo (tavaliselt 5% või 1%) ja leia jaotusseadusest sama parameetri kriitiline väärtus $K_{\mathrm{kr}}$ .
5. Võrdle, kas parameetri empiiriline väärtus $K$ langeb väärtusega $K_{kr}$ määratud kriitilisse piirkonda või ei lange.

6. Tee järeldus:

   kui $K$ langeb kriitilisse piirkonda võta vastu sisukas hüpotees $H_1$;

   kui $K$ ei lange kriitilisse piirkonda võta vastu nullhüpotees $H_0$.

# ???

Teststatistiku kriitiline väärtus leitakse sobivast jaotusseadusest eeldades, et kehtib

V A. nullhüpotees
B. sisukas hüpotees

## ???

Et otsustada, kas tuleb vastu võtta nullhüpotees või sisukas hüpotees, tuleb teststatistiku empiirilist väärtust võrrelda kriitilise väärtusega. Kriitiline väärtus on teststatistiku selline väärtus, mille esinemise tõenäosus

A. nullhüpoteesi kehtimise korral on suurem kui 0,05
v B. nullhüpoteesi kehtimise korral on väiksem kui 0,05
C. sisuka hüpoteesi kehtimise korral on suurem kui 0,05
D. sisuka hüpoteesi kehtimise korral on väiksem kui 0,05

# KESKVÄÄRTUSE TESTIMINE

# KESKVÄÄRTUSE TESTIMINE SUURTE VALIMITE KORRAL, 1

Tsentraalne piirteoreem:
Suurte valimite korral alluvad valimite keskväärtused normaaljaotusele.

Nullhüpotees: kogumi keskväärtus μ võrdub mingi arvuga $\mu_0$
$H_0$: $\mu = \mu_0$
Sisukas hüpotees: kogumi keskväärtus μ ei võrdu arvuga $\mu_0$
$H_1$: $\mu \neq \mu_0$

Tehakse juhuvalim.
Leitakse:

valimi keskmine $\bar{x}$
valimi standardhälve $s$

# KESKVÄÄRTUSE TESTIMINE SUURTE VALIMITE KORRAL, 2

Testimiseks z-test. Teststatistiku empiiriline väärtus

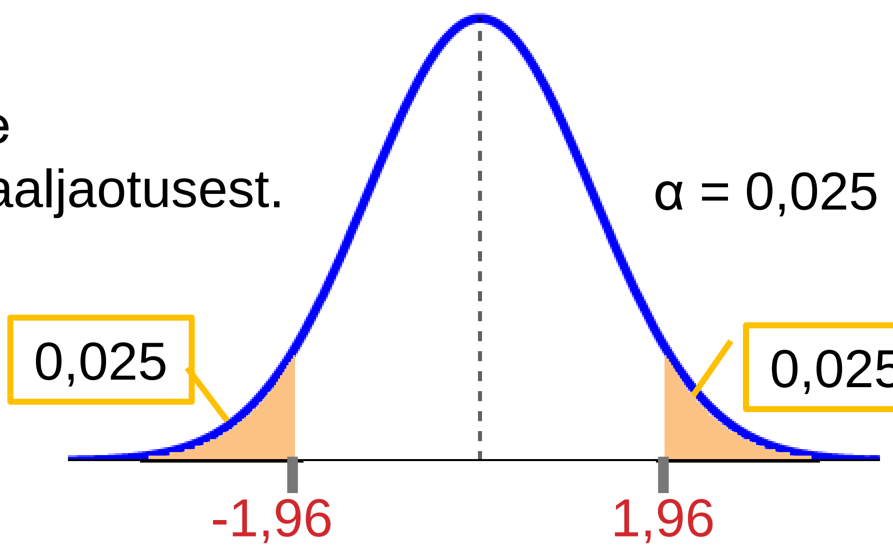
$$\boxed{z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{se}}$$

See on valimi keskmise standardiseeritud väärtus, allub standardiseeritud normaaljaotusele.

Standardviga $se = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Kriitiline väärtus leitakse standardiseeritud normaaljaotusest.

α = 0,025 +0,025 = 0,05




Demo: kriitilise väärtuse leidmine z-testi korral

# KESKVÄÄRTUSE TESTIMINE SUURTE VALIMITE KORRAL, 3

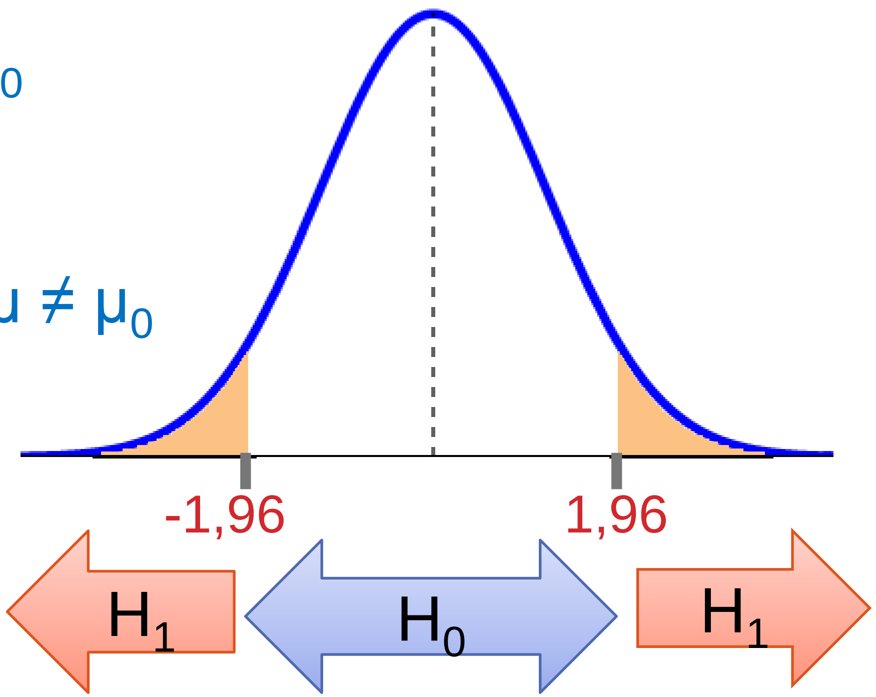
Teststatistiku kriitilised väärtused

| | | |
|---|---|---|
| olulisuse nivool 5% | -1,96 | 1,96 |

Otsustamine

Kui $-1{,}96 \le z \le 1{,}96$
võtta vastu nullhüpotees, $\mu = \mu_0$

Kui $z < -1{,}96$ või $z > 1{,}96$
võtta vastu sisukas hüpotees, $\mu \neq \mu_0$




Demo: Empiiriline ja kriitiline

# NÄIDE: PATAREIDE PIKKUSE TESTIMINE

Tehnilistes tingimustes: Duracelli patareide pikkus on 44 mm.

$$H_0: \quad \mu = 44 \quad H_1: \quad \mu \neq 44$$

Valimi maht $n = 50$

Valimi keskmine $\overline{x} = 44,25$

Valimi standardhälve $s = 1,5$

Statistiku empiiriline väärtus $$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{44,25 - 44}{\frac{1,5}{\sqrt{50}}} \approx 0,17$$

Kriitilised väärtused olulisuse nivool 5% on -1,96 ja 1,96.

-1,96 < 0,17 < 1,96 => võtame vastu nullhüpoteesi.

Valimvaatluse tulemus on kooskõlas etteantud väärtusega 44 mm ja tootmisliin on korrektselt seadistatud.

# ???

2013. aastal oli üheliikmeliste perede keskmine sissetulek Poolas 5360 eurot aastas. Eestis küsitletud 500 üheliikmelise pere korral saadi keskmiseks 5246 eurot standardhälbega 3993 eurot.
Kas on tõestatud, et Eestis oli 2013. aastal üheliikmeliste perede keskmine sissetulek erinev Poola üheliikmeliste perede keskmisest?
Vastav *z*-statistik

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{5246 - 5360}{\frac{3993}{\sqrt{500}}} \approx -0,64$$

Kriitilised väärtused nivool 0,05 on -1,96 ja 1,96.

V A. Erinevus ei ole tõestatud
B. Erinevus on tõestatud

$H_0: \mu = 5360$

$H_1: \mu \neq 5360$

$-1,96 < -0,64 < 1,96$

# MILLEST SÕLTUB z EMPIIRILINE VÄÄRTUS?

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{se}$$

1

$\bar{x} - \mu_0$ Valimi keskmise erinevus nullhüpoteesiga püstitatud väärtusest.

Kui $\bar{x} - \mu_0 = 0$ siis $z = 0$

Mida suurem on $|\bar{x} - \mu_0|$, seda kaugemal on valimi keskmine nullhüpoteesile vastavast väärtusest.

# MILLEST SÕLTUB z EMPIIRILINE VÄÄRTUS?

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{se}$$

2

$$se = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Standardviga, mis omakorda sõltub valimi standardhälbest *s* ja valimi mahust *n.*

Mida suurem on valimi standardhälve *s* , seda väiksem on z, st seda "kergemini" tuleb vastuseks nullhüpotees.

Mida suurem on valimi maht *n* , seda suurem on z, st seda "kergemini" on võimalik nullhüpoteesi ümber lükata.

Demo: Keskväärtuse testimine

# KAHTE LIIKI VEAD

# KAHTE LIIKI VEAD

| | Võtan $H_0$ vastu | Lükkan $H_0$ tagasi |
|---|---|---|
| $H_0$ kehtib | Otsus õige | I liiki viga |
| $H_0$ ei kehti | II liiki viga | Otsus õige |

I liiki viga: kehtiva nullhüpoteesi tagasilükkamine
II liiki viga: mittekehtiva nullhüpoteesi vastuvõtmine

Olulisuse nivoo: I liiki vea ülempiir, tõke. Määratakse uurija poolt.

# NÄIDE: RAVIMI TESTIMINE

$H_0$: ravim ei toimi (ravimit saanute ja kontrollgrupi vahel erinevus puudub).

| | Võtan $H_0$ vastu, st järeldan, et ravim ei toimi, ravimit müüki ei lase | Lükkan $H_0$ tagasi, st järeldan, et ravim toimib, lasen müüki |
|---|---|---|
| $H_0$ kehtib, ravim ei toimi | Otsus õige | I liiki viga |
| $H_0$ ei kehti, ravim toimib | II liiki viga | Otsus õige |

Kumb viga on raskemate tagajärgedega?

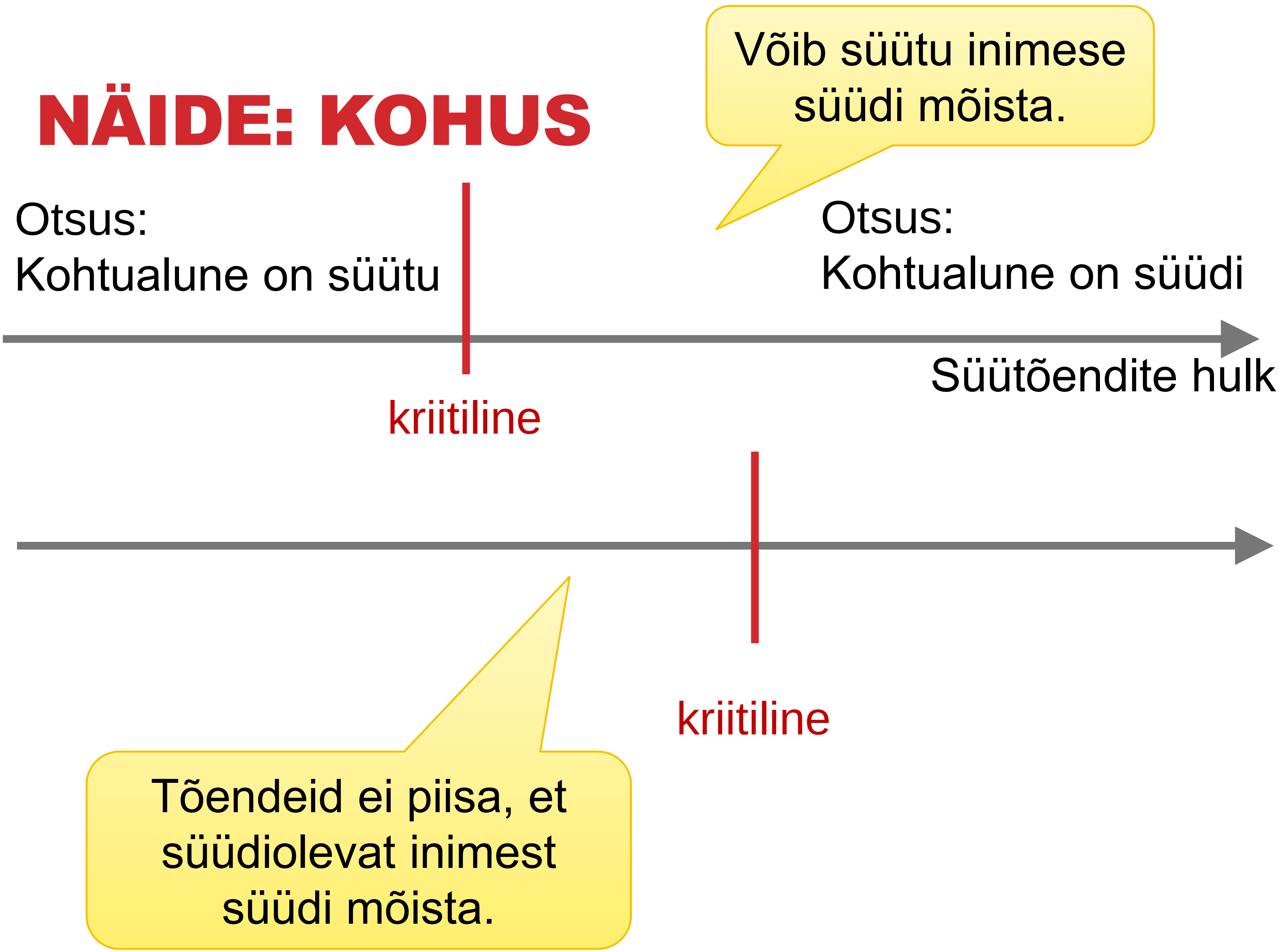
# NÄIDE: KOHUS

$H_0$: kohtualune on süütu.

| | Kohus: $H_0$ Kohtualune on süütu | Kohus lükkab $H_0$ tagasi. Kohtualune on süüdi |
|---|---|---|
| $H_0$ kehtib, on süütu | Otsus õige | I liiki viga |
| $H_0$ ei kehti, on süüdi | II liiki viga | Otsus õige |

Kumb viga on raskemate tagajärgedega?

# NÄIDE: KOHUS


Võib süütu inimese süüdi mõista.
Otsus:
Kohtualune on süütu
Otsus:
Kohtualune on süüdi
Süütõendite hulk
kriitiline
kriitiline
Tõendeid ei piisa, et süüdiolevat inimest süüdi mõista.

# OLULISUSE NIVOO VALIK

Olulisuse nivoo vähendamine

- vähendab I liiki vea tõenäosust;
- suurendab II liiki vea tõenäosust.

Korraga mõlema vea tõenäosust vähendada ei saa!

| Enamkasutatavad väärtused | 0,1 | 0,05 | 0,01 |
|---|---|---|---|

Valik sõltub sellest, kumb on ohtlikum, kas

- kehtiva nullhüpoteesi tagasilükkamine (I liiki viga);
- mittekehtiva nullhüpoteesi vastuvõtmine (II liiki viga).

Demo: kahte liiki vead

Demo: I ja II liiki viga

# NÄIDE: OLULISUSE NIVOO VALIK

$H_0$: $\mu = \mu_0$

$H_1$: $\mu \neq \mu_0$

Valimvaatlusest arvutame parameetri $z = 2,2$

Kriitilised väärtused

| | | | |
|---|---|---|---|
| Olulisuse nivool 5% | -1,96 | 1,96 | Võtta vastu $H_1$ |
| Olulisuse nivool 1% | -2,58 | 2,58 | Võtta vastu $H_0$ |

Kumba nivood kasutada?
Statistika vastust ei anna.

# ÜHEPOOLNE HÜPOTEES

# NÄIDE: ÜHEPOOLNE HÜPOTEES

Patareide tootja on kindlaks teinud, et patarei keskmine kasutusaeg on 299 tundi.
Peale tehnoloogiliste muudatuste tegemist patareide täitmisel soovib tootja kontrollida, kas kasutusaeg on pikenenud. Selleks valitakse juhuslikult välja 200 patareid ja testitakse neid.

Hüpoteesi püstitamine

Kas on õige?

$H_0 \quad \mu = 299$

$H_1 \quad \mu \neq 299$

EI

Õige on

$H_0 \quad \mu \leq 299$

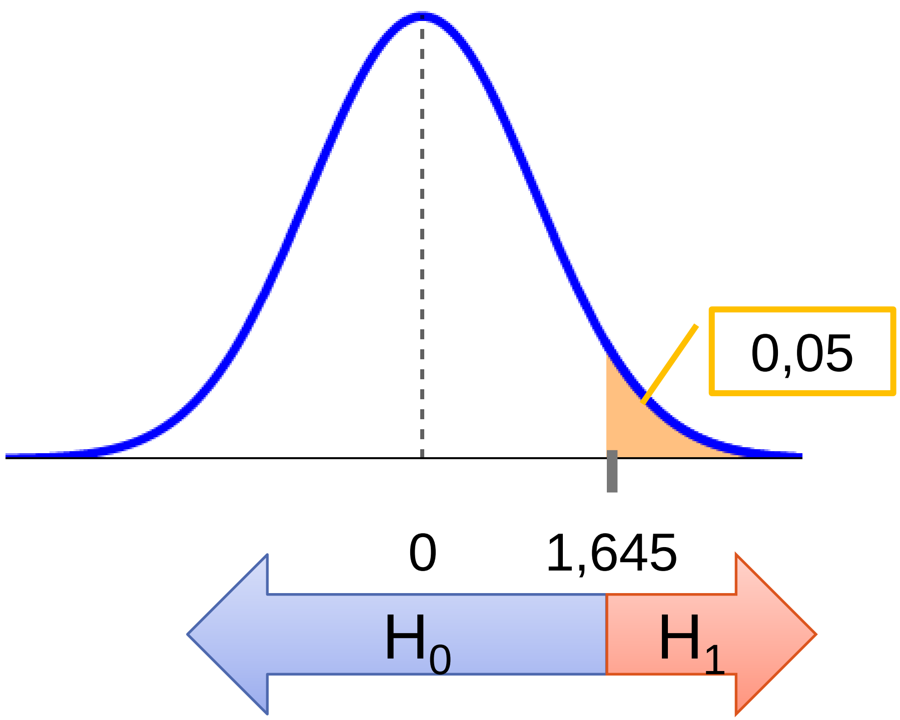
$H_1 \quad \mu > 299$

Ühepoolne hüpotees

# ÜHEPOOLSE HÜPOTEESI KRIITILISED VÄÄRTUSED

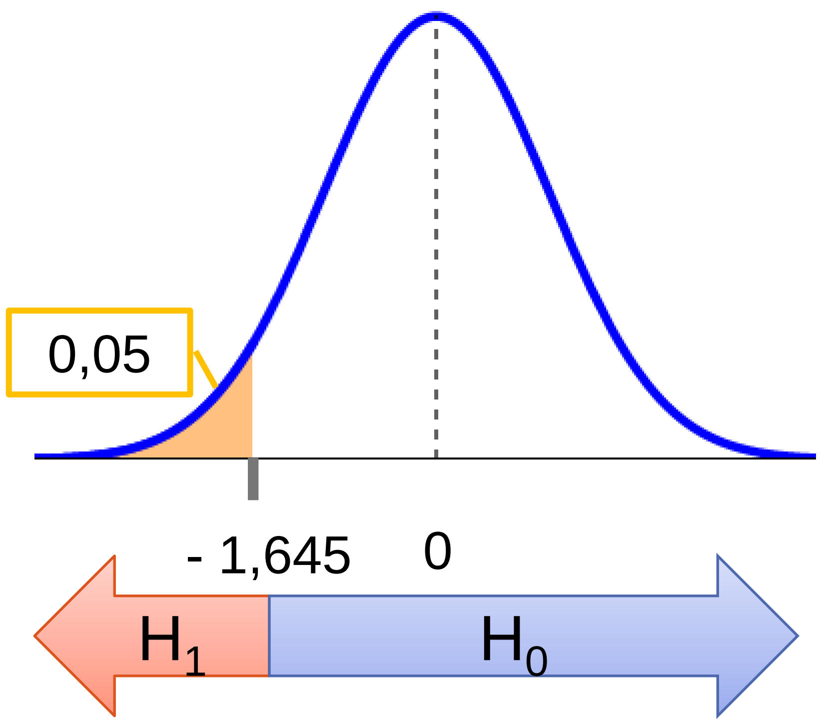
$H_0$ $\mu \le \mu_0$
$H_1$ $\mu > \mu_0$

Parempoolne kriitiline piirkond




$H_0$ $\mu \ge \mu_0$
$H_1$ $\mu < \mu_0$

Vasakpoolne kriitiline piirkond




Demo: Empiiriline ja kriitiline

# NÄIDE: TOOTJA RISK VS TARBIJA RISK


Maisihelveste pakil kirjas 250 g.
Kas tegelik kogus on sellest erinev?

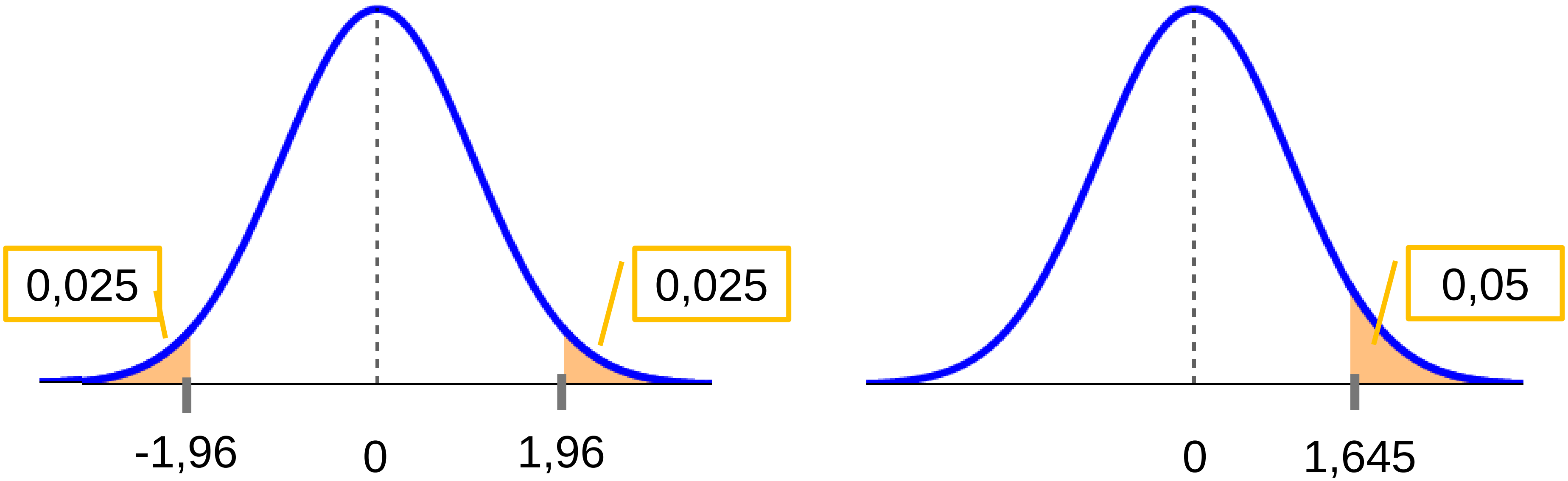
Valimvaatlus, hüpoteesi testimine.

Ühepoolse hüpoteesi püstitamiseks kaks võimalust:

| A | | B | |
|---|---|---|---|
| $H_0$ | $\mu \leq 250$ | $H_0$ | $\mu \geq 250$ |
| $H_1$ | $\mu > 250$ | $H_1$ | $\mu < 250$ |
| | TOOTJA | | TARBIJA |

Kumba võimalust peab kasutama tootja,
kumba võimalust tarbija?

# KAHEPOOLNE VS ÜHEPOOLNE HÜPOTEES




Ühepoolse hüpoteesi korral on kriitiline väärtus nullile lähemal. Järelikult sisukat hüpoteesi on nö lihtsam tõestada.

Võimaluse korral kasuta ühepoolset hüpoteesi!

# ???

Kas keskmine tootlikkus ühe töötaja kohta on väike- ja suurettevõtetes erinev?

V A. Kahepoolne hüpotees
B. Ühepoolne hüpotees

Kas madalama haridustasemega tarbijad kulutavad riietele vähem kui kõrgema haridustasemega tarbijad?

A. Kahepoolne hüpotees
V B. Ühepoolne hüpotees

# OLULISUSE TÕENÄOSUS

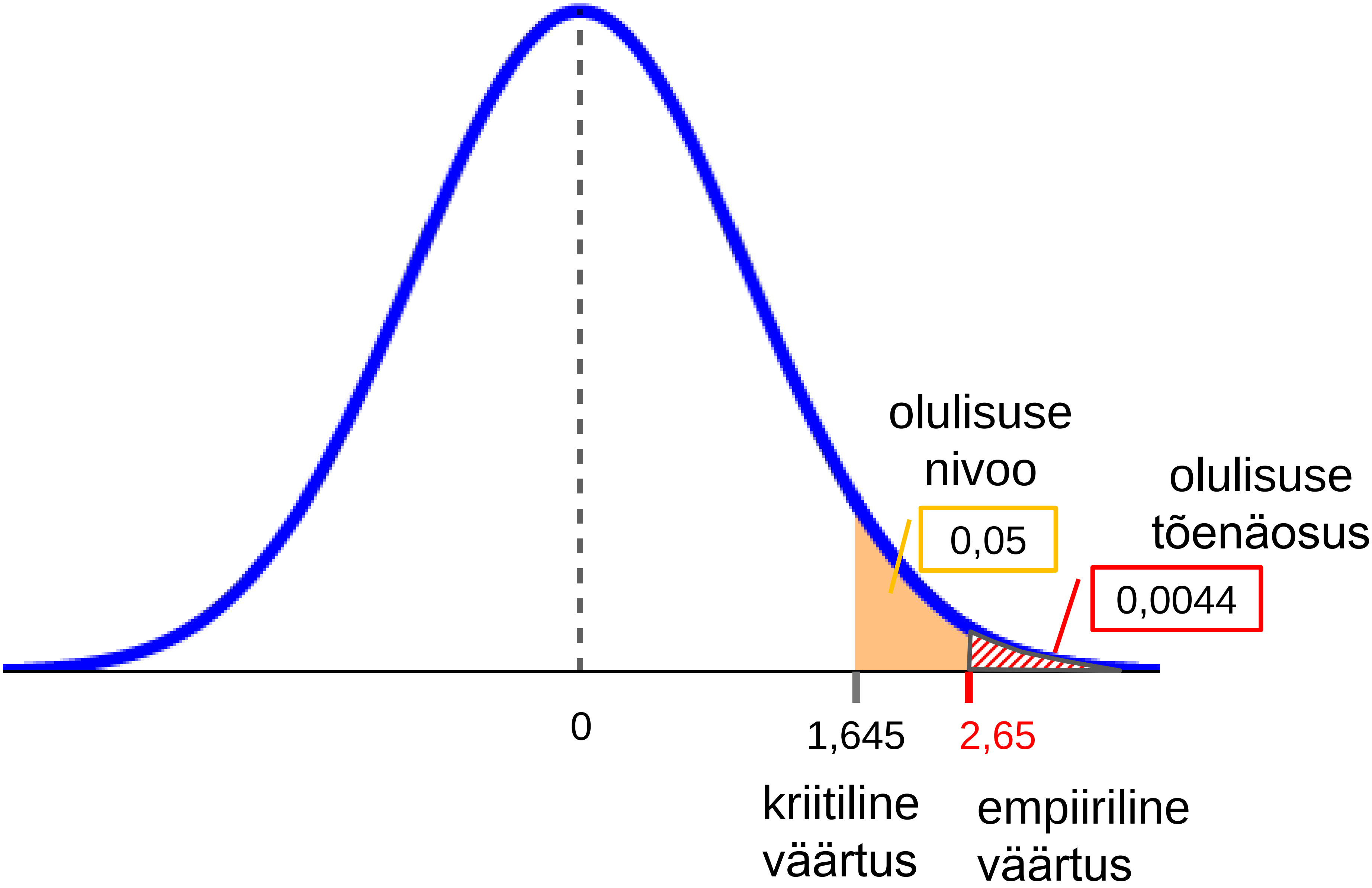
# NÄIDE: MILLINE OLULISUSE NIVOO VASTAB EMPIIRILISELE VÄÄRTUSELE?

Näide patareide testimise kohta. z-test, ühepoolne hüpotees.

| Tõenäosus | Teststatistik |
|---|---|
| olulisuse nivoo 0,05 | kriitiline väärtus 1,645 |
| ? | empiiriline väärtus 2,65 |

Kui madal võib olla olulisuse nivoo, et **antud andmete** korral saaks veel vastu võtta **sisuka hüpoteesi**?

Milline olulisuse nivoo vastab väärtusele 2,65?


olulisuse
nivoo
0,05
olulisuse
tõenäosus
0,0044
0
1,645
2,65
kriitiline
väärtus
empiiriline
väärtus

# OLULISUSE TÕENÄOSUS

Olulisuse tõenäosus on väikseim olulisuse nivoo, mis antud valimi põhjal lubab vastu võtta sisuka hüpoteesi.

- Näitab, kui hästi valim sobib nullhüpoteesiga.
- Mida väiksem on olulisuse tõenäosus, seda vähem valim sobib nullhüpoteesiga.
- Kui on väiksem, kui olulisuse nivoo, lükatakse $H_0$ tagasi.

| Teststatistiku väärtus | Tõenäosus |
|---|---|
| kriitiline | olulisuse nivoo $\alpha$ |
| empiiriline | olulisuse tõenäosus $p$ |

# OTSUSE VASTUVÕTT OLULISUSE TÕENÄOSUSE JÄRGI

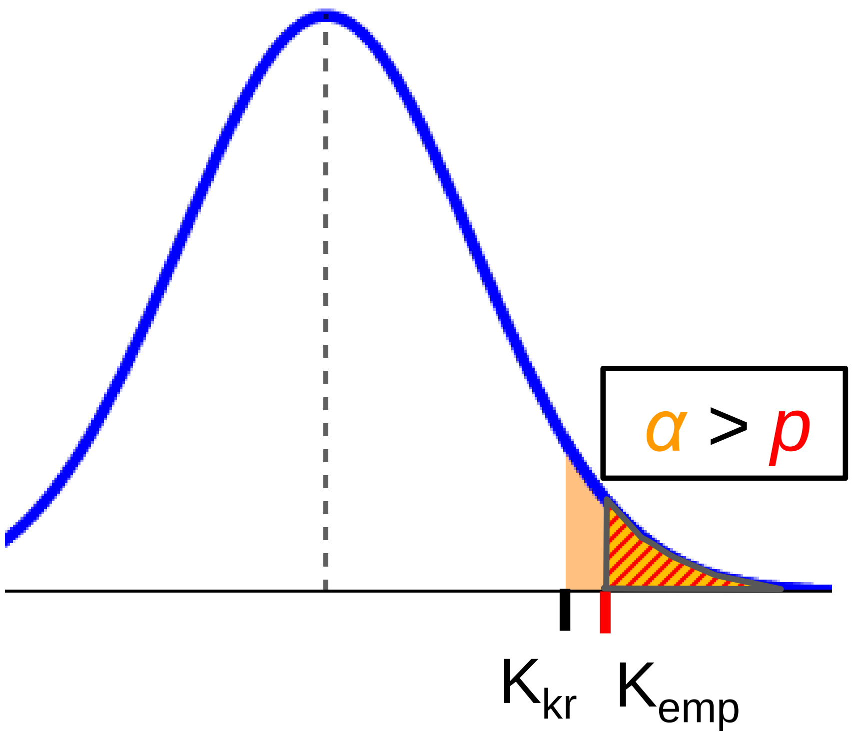
| olulisuse tõenäosus | | olulisuse nivoo | |
|---|---|---|---|
| $p$ | $<$ | $\alpha$ | sisukas hüpotees $H_1$ |
| $p$ | $>$ | $\alpha$ | nullhüpotees $H_0$ |

Näide. Olulisuse nivoo α = 0,05

$p = 0{,}012$ sisukas hüpotees $H_1$

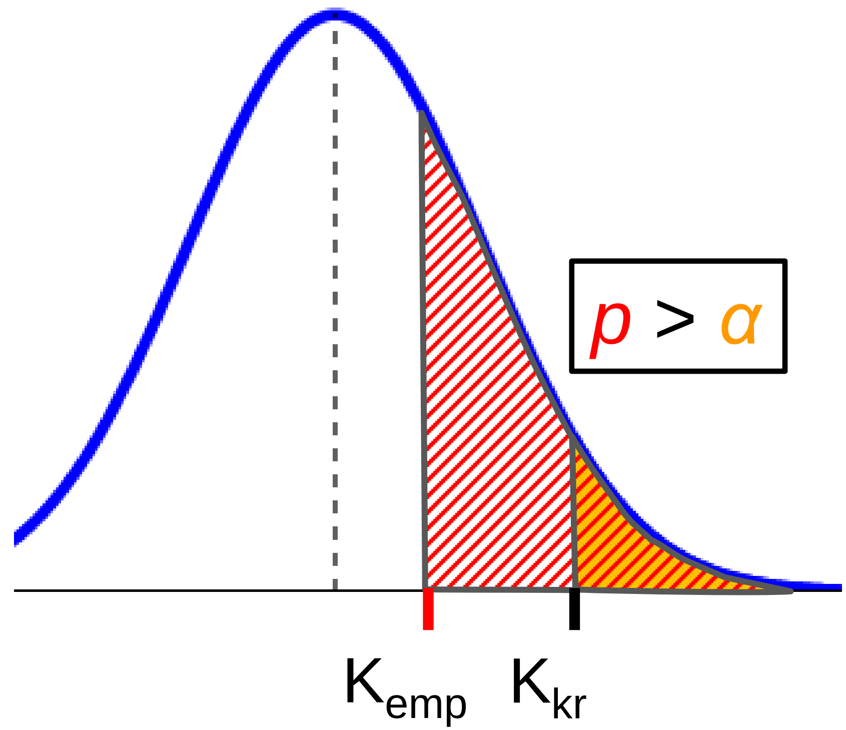
$p = 0{,}068$ nullhüpotees $H_0$

# KAKS MEETODIT ON EKVIVALENTSED




$K_{kr} < K_{emp}$

SISUKAS HÜPOTEES




$K_{emp} < K_{kr}$

NULLHÜPOTEES

Demo: olulisuse tõenäosus

# KUMBA MEETODIT KASUTADA?

Meetodid on ekvivalentsed => tulemus on sama.

Kasutatakse seda, kumb on mugavam.

- Kui valimi põhjal arvutatakse statistiku empiiriline väärtus: võrdleme statistiku empiirilist ja kriitilist väärtust.
- Kui valimi põhjal leitakse tarkvara abil lisaks statistiku empiirilisele väärtusele ka vastav olulisuse tõenäosus *p:* võrdleme seda olulisuse nivooga $\alpha$ ja statistiku kriitilist väärtust leida pole vaja.

Näiteks Exceli funktsioon Z.TEST leiab olulisuse tõenäosuse *p* ühepoolse hüpoteesi jaoks. Seda tuleb võrrelda olulisuse nivooga.

# OLULISUSE TÕENÄOSUS ANNAB LISAINFOT

Olulisuse tõenäosuse esitamine annab lisainformatsiooni.

- Kui tugevasti on nullhüpotees ümber lükatud?

Mõlemal juhul võetakse olulisuse nivool 0,05 korral vastu $H_1$.

Test A: $p$=0,04
Test B: $p$=0,0001

- Kui palju jäi nullhüpoteesi ümberlükkamisest puudu?

Mõlemal juhul võetakse olulisuse nivool 0,05 vastu $H_0$.

Test C: $p$=0,06
Test D: $p$=0,5

# NÄIDE: KAS HAIGLA EFEKTIIVSUS SÕLTUB OMANDIVORMIST?

Uuring Floridas (USA) 2001-2004, kokku 435 haiglat

100–249 voodiga haiglad

| | **Valimi keskmine (standardhälve)** | | ***t*-statistik** | **Olulisuse tõenäosus *p*** |
|---|---|---|---|---|
| | **Kasumit mittetaotlevad** | **Kasumit taotlevad** | | |
| Teenuste arv | 21,71 (6,46) | 23,35 (5,71) | -1,654 | 0,100 |
| Tööjõud | 755,79 (343,07) | 614,74 (207,10) | 3,293 | $\boxed{0{,}001}$ |
| Kulud | 81 025 212 (30 031 708) | 73 428 725 (32 486 589) | 1,245 | 0,215 |
| Haigusjuhtude arv | 8390 | 8765 | 0,260 | 0,795 |
| Ambulatoorsete visiitide arv | 101 309 (49097) | 63 467 (27 628) | 6,364 | $\boxed{0{,}000}$ |
| Internide arv | 3,87 (4,98) | 0,83 (1,20) | 6,196 | $\boxed{0{,}000}$ |

Allikas: Lee, K.-H.; Yang, S.-B. & Choi, M. (2009), *Journal of Medical Systems, Springer Netherlands,* Vol. 33 , 307-315

# ???

Hüpoteesipaari testimiseks viidi läbi valimvaatlus, leiti valimile vastav teststatistik ning sellele vastav olulisuse tõenäosus
$p$=0,035

Kumb hüpotees tuleb vastu võtta, kui kasutada olulisuse nivood 0,05?

0,035 < 0,05

A. Nullhüpotees
V B. Sisukas hüpotees

# VÄIKESED VALIMID JA t-TEST

Väikeste valimite keskväärtused alluvad $t(v)$- jaotusele.

Teststatistiku empiiriline väärtus $\boxed{t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{se}}$

Standardviga $se = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Empiirilise väärtuse arvutusvalem sama, mis z-testi korral.

Erinevus ainult kriitiliste väärtuste leidmisel.
Kriitilised väärtused leitakse $t(v)$-jaotusest.

Edaspidi räägime vaid *t*-testist.

# KAHE KOGUMI KESKVÄÄRTUSE VÕRDLEMINE

# KAHE KOGUMI KESKVÄÄRTUSE TESTIMINE

2 valimi korral põhimõtteliselt kaks võimalust

Valim 1

| Isik | Väärtus |
|---|---|
| Ants | 2,9 |
| Mari | 1,5 |
| Pille | 1,0 |
| Jüri | 5,9 |

Valim 2

| Isik | Väärtus |
|---|---|
| Kalle | 4,6 |
| Tiit | 3,1 |
| Eha | 4,3 |
| Anu | 0,0 |

SÕLTUMATUD VALIMID

| | Valim 1 | Valim 2 |
|---|---|---|
| **Objekt** | **Väärtus 1** | **Väärtus 2** |
| Ants | 1,6 | 2,5 |
| Mari | 3,9 | 4,2 |
| Pille | 3,2 | 3,8 |
| Jüri | 2,1 | 1,9 |

SÕLTUVAD VALIMID

# NÄIDE: SÕLTUMATUD VALIMID

50 vaataja küsitlus näitas, et keskmiselt vaadati televisioonisaateid 3,1 tundi ööpäevas standardhälbega 2,12 tundi.

Peale muudatuste tegemist televisiooni saatekavas viidi läbi uus küsitlus. Seekord küsitleti 30 juhuslikult valitud inimest. Keskmiseks ajaks saadi 3,6 tundi ööpäevas standardhälbega 2,13 tundi.

Kummaski valimis on ERINEVAD isikud.

SÕLTUMATUD VALIMID

# NÄIDE: SÕLTUVAD VALIMID

Sooviti uurida füüsilise pingutuse mõju üliõpilase tähelepanuvõimele. Selleks valiti juhuslikult 10 katsealust ja korraldati neile spetsiaalselt väljatöötatud test.

Pärast tunniajalist kehalist koormust tuli uuesti täita analoogiline test.

Kummaski valimis on SAMAD isikud.

SÕLTUVAD VALIMID

# KESKVÄÄRTUSTE TESTIMINE, SÕLTUMATUD VALIMID, 1

Valim 1

| Objekt | Väärtus |
|---|---|
| A | $x_A$ |
| B | $x_B$ |
| C | $x_C$ |
| D | $x_D$ |

Valim 2

| Objekt | Väärtus |
|---|---|
| E | $x_E$ |
| F | $x_F$ |
| G | $x_G$ |
| H | $x_H$ |
| J | $x_J$ |

| | | |
|---|---|---|
| keskmine | $\overline{X}_1$ | $\overline{X}_2$ |
| standardhälve | $s_1$ | $s_2$ |
| valimi maht | $n_1$ | $n_2$ |

# KESKVÄÄRTUSTE TESTIMINE, SÕLTUMATUD VALIMID, 2

Nullhüpotees: kahe kogumi keskväärtused on võrdsed

$H_0$: $\mu_1 = \mu_2$

Sisukas hüpotees: keskväärtused on erinevad

$H_0$: $\mu_1 \neq \mu_2$

*t*-test

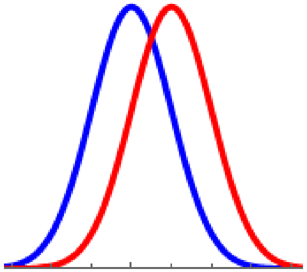
Parameetri empiiriline väärtus

$$\boxed{t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{se}}$$

Standardviga *se* sõltub sellest, kas kogumites on dispersioon ühesugune või mitte.

# KESKVÄÄRTUSTE TESTIMINE, SÕLTUMATUD VALIMID, 3

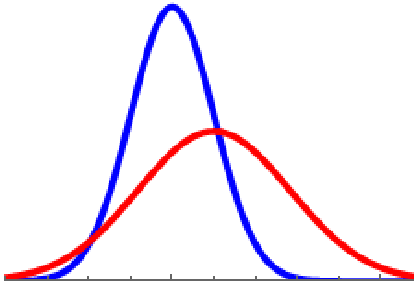
Ühesugune dispersioon



Studenti test

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \qquad s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Erinev dispersioon



Welchi test

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Dispersioonide testimiseks *F*-test (vaatame hiljem).
Kui ei tea, kasutada **erinevate** dispersioonide metoodikat.

# NÄIDE: MEESTE JA NAISTE SISSETULEK

Kas meestel on suurem sissetulek kui naistel?

$$H_0: \quad \mu_1 \leq \mu_2$$

$$H_1: \quad \mu_1 > \mu_2$$

Andmed: Eesti Sotsiaaluuring 2013.

Excelis analüüsikomplekt *Data Analysis.*

Kahe kogumi keskväärtuse testimine, sõltumatud valimid, erinev dispersioon

**t-Test: Two-Sample Assuming Unequal Variances**

| | *Mehed* | *Naised* |
|---|---|---|
| Mean | 9337,23 | 6757,73 |
| Variance | 43292030 | 12846605 |
| Observations | 28 | 71 |
| Hypothesized Mean Difference | 0 | |
| df | 34 | |
| t Stat | $\boxed{1,963}$ | |
| P(T<=t) one-tail | $\boxed{0,029}$ | |
| t Critical one-tail | $\boxed{1,691}$ | |
| P(T<=t) two-tail | 0,058 | |
| t Critical two-tail | 2,032 | |

Võtta vastu $H_1$

# KESKVÄÄRTUSTE TESTIMINE, SÕLTUVAD VALIMID, 1

| Objekt | Väärtus $x$ | Väärtus $y$ | Erinevus $d$ |
|---|---|---|---|
| A | $x_A$ | $y_A$ | $y_A - x_A$ |
| B | $x_B$ | $y_B$ | $y_B - x_B$ |
| C | $x_C$ | $y_C$ | $y_C - x_C$ |
| D | $x_D$ | $y_D$ | $y_D - x_D$ |

keskmine $\bar{d}$

standardhälve $s_d$

valimi maht $n$

# KESKVÄÄRTUSTE TESTIMINE, SÕLTUVAD VALIMID, 2

Nullhüpotees: erinevuste keskväärtus on null

$H_0 \quad \bar{d} = 0$

Sisukas hüpotees: erinevuste keskväärtus erineb nullist

$H_1 \quad \bar{d} \neq 0$

*t*-test

Parameetri empiiriline väärtus

$$\boxed{t = \frac{\bar{d}}{se}}$$

Standardviga

$$\boxed{se = \frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

Kriitilised väärtused *t*-jaotusest (väikesed valimid) või normaaljaotusest (suured valimid).

# NÄIDE: KAS MAJANDUSKRIIS MÕJUTAS MÜÜGITULU?

Juhuslikult valitud 10 veondus- ja laondusettevõtte müügitulu ühe töötaja kohta (tuh eurot) 2008 ja 2009.

$$H_0: \quad D \geq 0$$

$$H_1: \quad D < 0$$

| Ettevõtte ID | 2008 | 2009 | Erinevus d |
|---|---|---|---|
| 1 | 112,6 | 115,3 | 2,7 |
| 2 | 147,2 | 145,5 | -1,7 |
| 3 | 60,9 | 52,6 | -8,3 |
| 4 | 111,7 | 89,1 | -22,6 |
| 5 | 186,5 | 180,8 | -5,7 |
| 6 | 164,2 | 130,7 | -33,5 |
| 7 | 73,3 | 55,6 | -17,7 |
| 8 | 28,7 | 37,4 | 8,7 |
| 9 | 60,9 | 38,7 | -22,2 |
| 10 | 405,3 | 310,9 | -94,4 |

# NÄIDE: KAS MAJANDUSKRIIS MÕJUTAS MÜÜGITULU?

Excelis analüüsikomplekt *Data Analysis.*
Kahe kogumi keskväärtuse testimine, sõltuvad valimid.

| **t-Test: Paired Two Sample for Means** | | |
|---|---|---|
| | | |
| | 2009 | 2008 |
| Mean | 115,66 | 135,13 |
| Variance | 7091 | 11539 |
| Observations | 10 | 10 |
| Pearson Correlation | 0,982 | |
| Hypothesized Mean Difference | 0 | |
| df | 9 | |
| t Stat | -2,10 | |
| P(T<=t) one-tail | 0,033 | |
| t Critical one-tail | 1,83 | |
| P(T<=t) two-tail | 0,065 | |
| t Critical two-tail | 2,26 | |

Võtta vastu H1

# NÄIDE: KASUTAME VALE MEETODIT

Mis juhtub, kui sõltuvate valimite korral kasutame sõltumatute valimite meetodit?

Kas majanduskriis mõjutas müügitulu? 10 veondus- ja laondusettevõtte müügitulu ühe töötaja kohta (tuh eurot) 2008. ja 2009. aastal.

| | | Sõltuvad valimid (õige) | Sõltumatud valimid (vale) |
|---|---|---|---|
| t-statistik | t Stat | -2,10 | -0,451 |
| Olulisuse tõenäosus ühepoolse hüpoteesi korral | P(T<=t) one-tail | 0,033 | 0,329 |
| Kriitiline väärtus ühepoolse hüpoteesi korral | t Critical one-tail | 1,83 | 1,740 |

Võtta vastu $H_1$

Võtta vastu $H_0$

Vale lähenemise korral võime teha vale järelduse: müügitulu ei muutunud.

# ???

Kas abielumehed kulutavad riietele rohkem kui poissmehed?

Küsitletakse 100 abielumeest ja 100 poissmeest.

v A. Sõltumatud valimid
B. Sõltuvad valimid

Küsitletakse 50 poissmeest ja uuesti küsitletakse neid teatud aeg peale abiellumist.

A. Sõltumatud valimid
v B. Sõltuvad valimid

# TEE KINDLAKS, KAS

- Ühe kogumi keskväärtuse testimine (üks valim)
- Kahe kogumi keskväärtuse testimine (kaks valimit)
    - sõltumatud valimid
        - erinev dispersioon
        - ühesugune dispersioon
    - sõltuvad valimid

Testimise suund

- kahepoolne hüpotees
- ühepoolne hüpotees
    - parempoolne
    - vasakpoolne