

AEGRIDADE ANALÜÜS

I

LOENGUTEEMAD

1. Aegrea mõiste, momentrida ja perioodrida
2. Keskmised tasemed
3. Kronoloogiline keskmine
4. Aegridade silumine
5. Libisev keskmine
6. Eksponentsilumine
7. Silumine regressioonjoonega
8. Prognoosimismeetodite võrdlus

RISTANDMED JA AEGREAD

Ristandmed: erinevad objektid ühel ja samal ajaperioodil.

Töötuse määr ja keskmine brutokuupalk 2024. aastal Eesti maakondades.

Maakond	Töötuse määr, %	Keskmine palk, €
Harju	7,2	2218
Ida-Viru	13,5	1576
Lääne-Viru	8,3	1559
Rapla	7,0	1593
Tartu	5,2	1995

Aegrida: üks ja sama objekt erinevatel ajaperioodidel.

Töötuse määr ja keskmine palk Ida-Viru maakonnas aastatel 2020 – 2024.

Aasta	Töötuse määr, %	Keskmine palk, €
2020	12,3	1161
2021	11,5	1145
2022	10,7	1270
2023	10,1	1437
2024	13,5	1576

RISTANDMEID VÕIB SORTEEERIDA

Ristandmeid võime sorteerida erinevate tunnuste järgi.

Järjestus pole oluline:
analüüsimiseks kasutatavad
meetodid ei sõltu järjestusest.

Maakond	Töötuse määr, %	Keskmine palk, €
Harju	7,2	2218
Ida-Viru	13,5	1576
Lääne-Viru	8,3	1559
Rapla	7,0	1593
Tartu	5,2	1995



Maakond	Töötuse määr, %	Keskmine palk, €
Ida-Viru	13,5	1576
Lääne-Viru	8,3	1559
Harju	7,2	2218
Rapla	7,0	1593
Tartu	5,2	1995



Maakond	Töötuse määr, %	Keskmine palk, €
Harju	7,2	2218
Tartu	5,2	1995
Rapla	7,0	1593
Ida-Viru	13,5	1576
Lääne-Viru	8,3	1559

AEGRIDA ÜMBER SORTEERIDA EI TOHI

Aegrida on sorteeritud alati aja järgi.

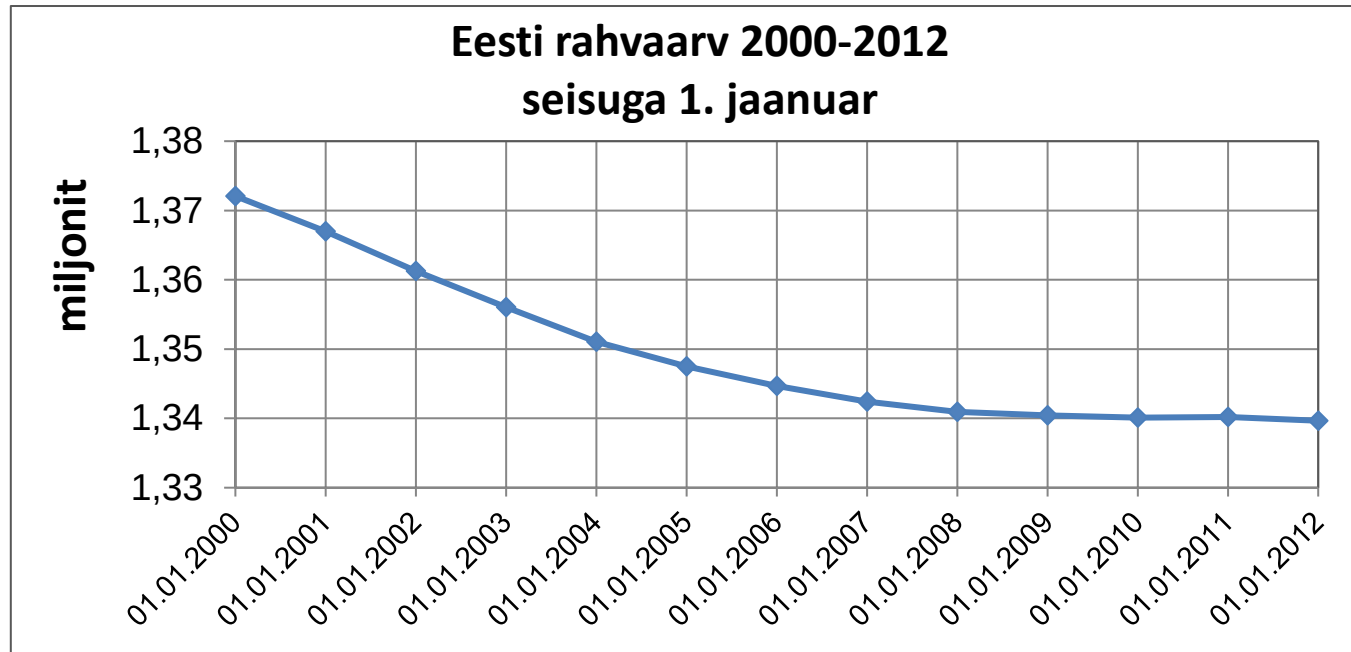
Järjestus on oluline:
analüüsimiseks kasutatavad
meetodid sõltuvad järjestusest.

Ida-Virumaa

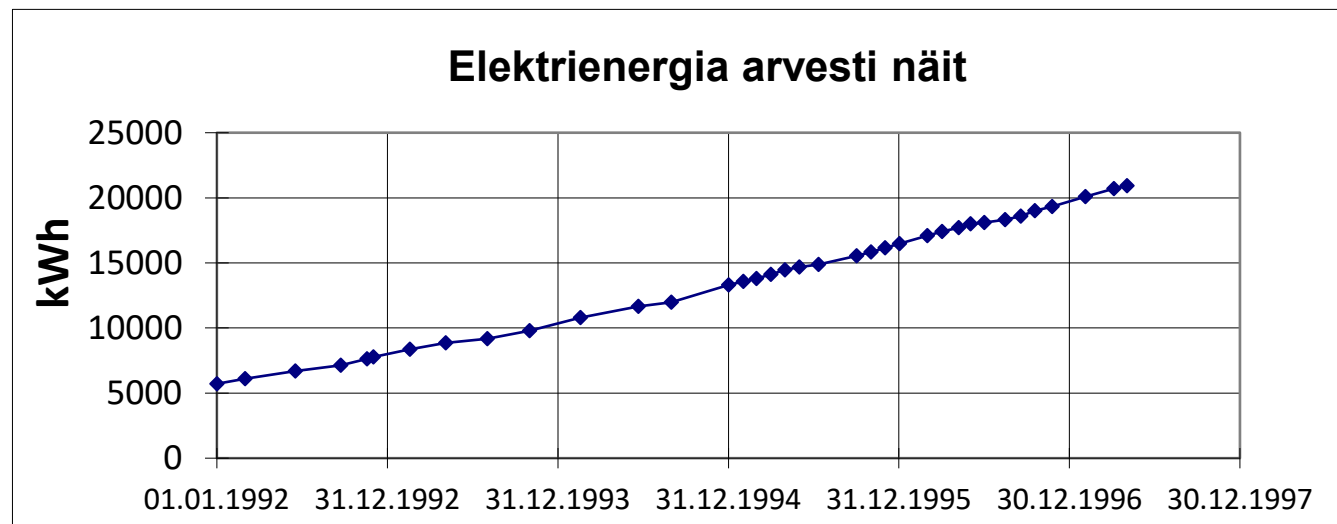
Aasta	Töötuse määr, %	Keskmine palk, €
2020	12,3	1161
2021	11,5	1145
2022	10,7	1270
2023	10,1	1437
2024	13,5	1576

Aasta	Töötuse määr, %	Keskmine palk, €
2024	13,5	1576
2020	12,3	1161
2021	11,5	1145
2022	10,7	1270
2023	10,1	1437

MOMENTREAD

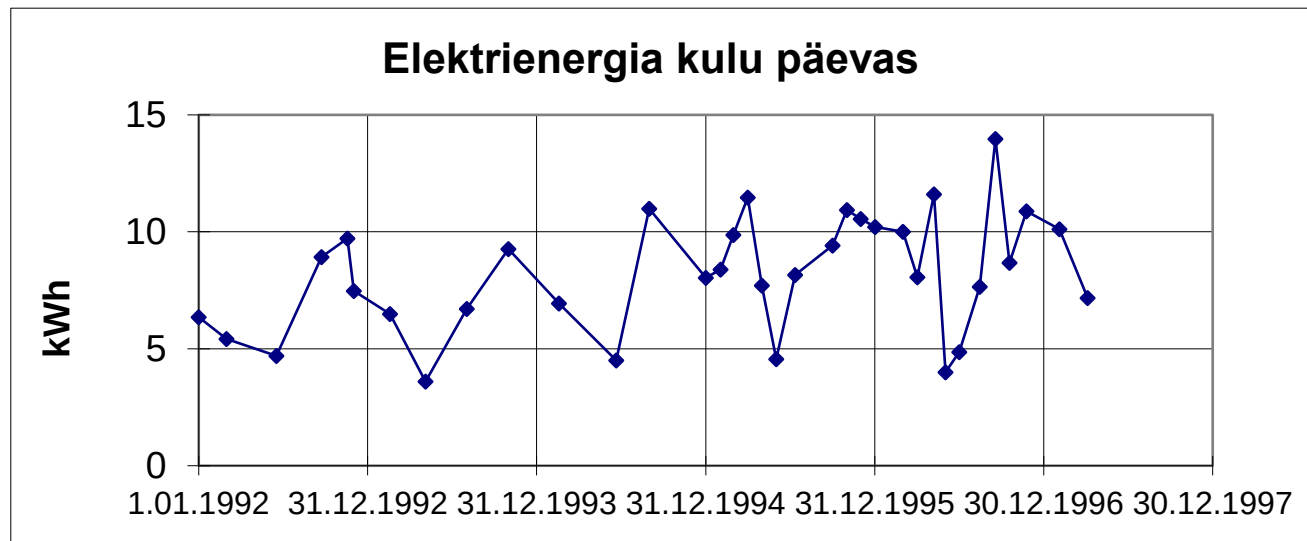
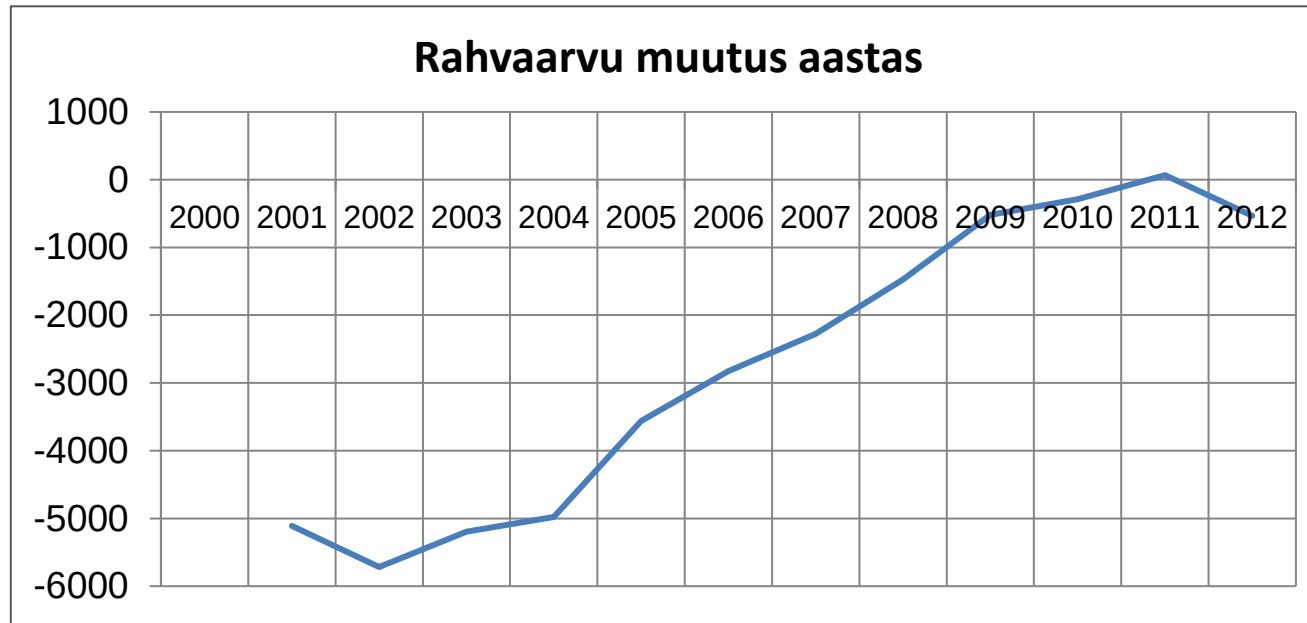


Võrdperioodne
momentrida.



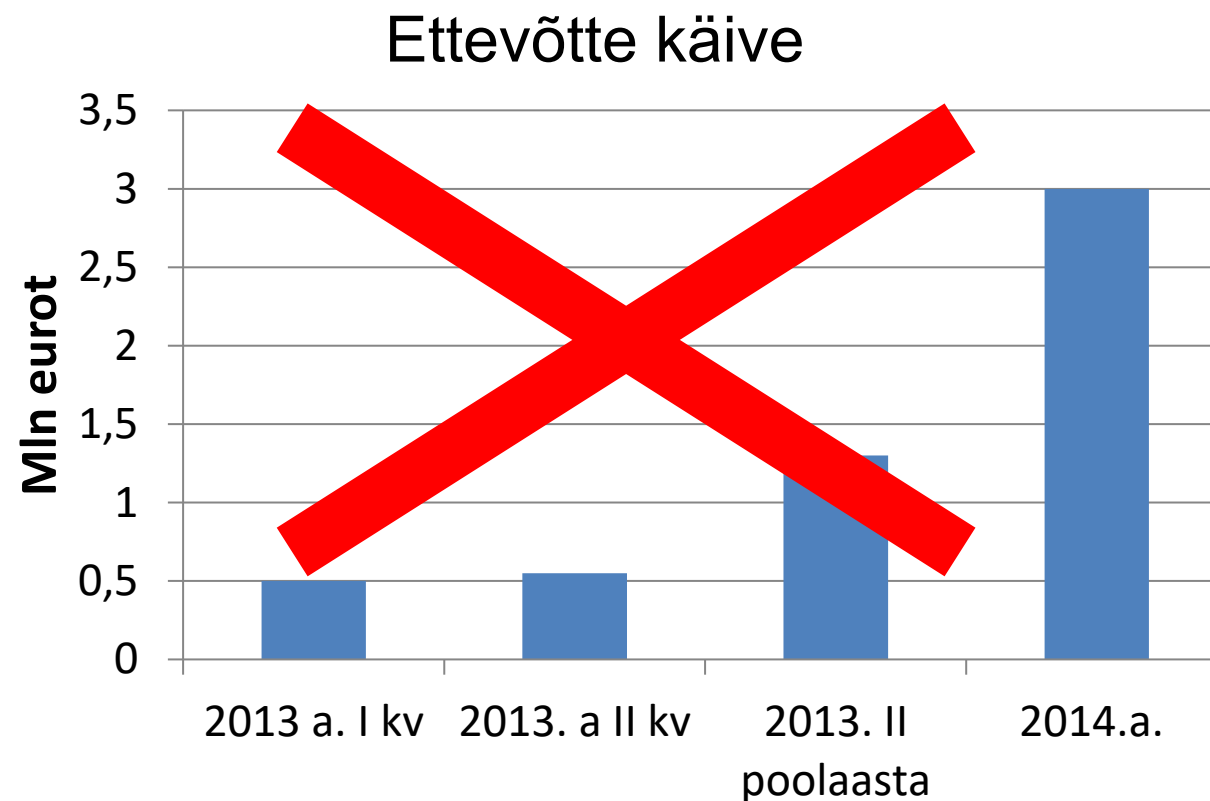
Mittevõrdperioodne
momentrida.

PERIOODREAD



Momentrea alusel
saab leida perioodrea.

NÄIDE: MITTEVÕRDPERIOODNE



Perioodrea diagramm peab olema alati võrdperioodne.

VÕRDPERIOODSUS: PROBLEEMID

Perioodrida kuude kaupa.

Kas kuud on ühepikkused?

Keskmised

Tööpäevade arv kuus: 21,17.

Töötundide arv kuus: 168,58.

Tööpäevade arv kvartalis 63,5.

Olulisi majandusnäitajaid korrigeeritakse
tööpäevade arvuga, et oleks võrreldavus.

2024. a kalendaarse tööajafondi arvestus

Kuud, kvartalid	Tööpäevad	Töötunnid
Jaanuar	22	176
Veebruar	21	165
Märts	20	160
I kvartal	63	501
Aprill	22	176
Mai	22	176
Juuni	19	152
II kvartal	63	504
Juuli	23	184
August	21	168
September	21	168
III kvartal	65	520
Oktoober	23	184
November	21	168
Detsember	19	146
IV kvartal	63	498
Aasta	254	2023

NÄIDE: KORRIGEERIMINE TÖÖPÄEVADE ARVUGA

Eesti SKP jooksevhindades (miljonit eurot).

			Tööpäevi	
2024 II kvartal	9791,0		63	
2024 III kvartal	10088,8	Suurenes?	65	Kuidas korrigeerida?

Keskmine tööpäevade arv 2024. aasta kvartalis oli 63,5 ehk keskmine kvartal.

		Keskmiselt tööpäeva kohta	Keskmise kvartali kohta	
Korrigeerimine tööpäevade arvuga	II kvartal	$\frac{9791}{63} \approx 155,41$	$155,41 \cdot 63,5 \approx 9868,7$	
	III kvartal	$\frac{10088,8}{65} \approx 155,21$	$155,21 \cdot 63,5 \approx 9856,0$	Vähenes!

NÄIDE: KORRIGEERITUD TÖÖPÄEVADE ARVUGA

Tööstustoodangu mahuindeksi muutus 2024. a novembris võrreldes 2023. a novembriga.

2023.a. november: 30 päeva, 22 tööpäeva

2024.a. november: 30 päeva, 21 tööpäeva

Tegevusala	Korrigeerimata andmetel, %	Tööpäevade arvuga korrigeeritud andmetel, %
KOKKU	-2,0	0,4
Energeetika	-15,3	-15,3
Mäetööstus	-1,3	-1,3
Töötlev tööstus	-0,1	2,6

Allikas: Eesti Statistikaameti andmebaas. Tabel T00053: tööstustoodangu mahuindeks tegevusala järgi (kuud).

AEGRIDADE ANALÜÜSI EESMÄRGID

1. Aegrea omaduste kirjeldamine, parameetrite hindamine.
2. Aegrea mudeli koostamine.
3. Prognoosimine.
4. Aegrida genereeriva protsessi mõjutamine.

AEGRIDADE ANALÜÜSI KAKS TASET

1. Elementaaranalüüs:

Sellel loengul

- keskmiste tasemete leidmine (kui on);
- muutlikkuse iseloomustamine;
- silumine;
- arengutrendide leidmine.

2. Kompleksanalüüs:

Järgmisel loengul

- trend;
- perioodiline komponent;
- juhuslik komponent.

KESKMISED TASEMED

AEGREA KESKMISED TASEMED

Võrdperioodsete ridade korral
lihtne aritmeetiline keskmine

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Mittevõrdperioodsete ridade korral
kaalutud aritmeetiline keskmine

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

NÄIDE: KESKMISE LEIDMINE MITTEVÕRDPERIOODSE AEGREA KORRAL

Keskmine kvartalikäive perioodil 2013-2014?

Periood	Käive perioodil, mln €	Keskmine kvartalikäive antud perioodil x_i , mln €
2013.a. I kv	0,5	
2013.a. II kv	0,55	
2013. a. II poolaasta	1,3	
2014. a		0,75

NÄIDE: KESKMISE LEIDMINE MITTEVÕRDPERIOODSE AEGREA KORRAL

Keskmine kvartalikäive perioodil 2013-2014?

Period	Käive perioodil, mln €	Keskmine kvartalikäive antud perioodil x_i , mln €
2013.a. I kv	0,5	0,5
2013.a. II kv	0,55	0,55
2013. a. II poolaasta	1,3	$1,3 / 2 = 0,65$
2014. a		0,75

NÄIDE: KESKMISE LEIDMINE MITTEVÕRDPERIOODSE AEGREA KORRAL

Keskmine kvartalikäive perioodil 2013-2014?

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

Periood	Käive perioodil, mln €	Keskmine kvartalikäive antud perioodil x_i , mln €	Kaal f_i	Korrutised $f_i x_i$
2013.a. I kv	0,5	0,5	1	0,5
2013.a. II kv	0,55	0,55	1	0,55
2013. a. II poolaasta	1,3	$1,3 / 2 = 0,65$	2	1,3
2014. a		0,75	4	3

NÄIDE: KESKMISE LEIDMINE MITTEVÕRDPERIOODSE AEGREA KORRAL

Keskmine kvartalikäive perioodil 2013-2014?

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

Periood	Käive perioodil, mln €	Keskmine kvartalikäive antud perioodil x_i , mln €	Kaal f_i	Korrutised $f_i x_i$
2013.a. I kv	0,5	0,5	1	0,5
2013.a. II kv	0,55	0,55	1	0,55
2013. a. II poolaasta	1,3	$1,3 / 2 = 0,65$	2	1,3
2014. a		0,75	4	3
		KOKKU	8	5,35

$$\bar{x} = \frac{5,35}{8} = 0,67 \quad \text{miljonit eurot}$$

NÄIDE: KESKMISE TASEME LEIDMINE MOMENTREA KORRAL, 1

Antud on ettevõtte kassaseis iga kuu algul.

Leida poolaasta keskmine kassaseis.

Kuupäev	1. jaan	1. veebr	1. märts	1. apr	1. mai	1. juuni	1. juuli
Kassaseis, tuh €	40	190	30	660	580	420	620

NÄIDE: KESKMISE TASEME LEIDMINE MOMENTREA KORRAL, 2

Antud on ettevõtte kassaseis iga kuu algul.

Leida poolaasta keskmine kassaseis.

Kuupäev	1. jaan	1. veebr	1. märts	1. apr	1. mai	1. juuni	1.juuli
Kassaseis, tuh €	40	190	30	660	580	420	620

Kuu	jaan	veebr	märts	apr	mai	juuni
keskmine kassaseis	$\frac{40 + 190}{2} = 115$					

NÄIDE: KESKMISE TASEME LEIDMINE MOMENTREA KORRAL, 3

Antud on ettevõtte kassaseis iga kuu algul.

Leida poolaasta keskmine kassaseis.

Kuupäev	1. jaan	1. veebr	1. märts	1. apr	1. mai	1. juuni	1.juuli
Kassaseis, tuh €	40	190	30	660	580	420	620

Kuu	jaan	veebr	märts	apr	mai	juuni
keskmine kassaseis	$\frac{40 + 190}{2} = 115$	$\frac{190 + 30}{2} = 110$				

NÄIDE: KESKMISE TASEME LEIDMINE MOMENTREA KORRAL, 4

Antud on ettevõtte kassaseis iga kuu algul.

Leida poolaasta keskmine kassaseis.

Kuupäev	1. jaan	1. veebr	1. märts	1. apr	1. mai	1. juuni	1.juuli
Kassaseis, tuh €	40	190	30	660	580	420	620

Kuu	jaan	veebr	märts	apr	mai	juuni
keskmine kassaseis	$\frac{40 + 190}{2} = 115$	$\frac{190 + 30}{2} = 110$	345	620	500	520

NÄIDE: KESKMISE TASEME LEIDMINE MOMENTREA KORRAL, 5

Antud on ettevõtte kassaseis iga kuu algul.
Leida poolaasta keskmine kassaseis.

Kuupäev	1. jaan	1. veebr	1. märts	1. apr	1. mai	1. juuni	1.juuli
Kassaseis, tuh €	40	190	30	660	580	420	620

Kuu keskmine kassaseis	jaan	veebr	märts	apr	mai	juuni
	115	110	345	620	500	520

Kvartali keskmine kassaseis	I kvartal $\frac{115 + 110 + 345}{3} = 190$			II kvartal $\frac{620 + 500 + 520}{3} = 546,7$		
-----------------------------	--	--	--	---	--	--

NÄIDE: KESKMISE TASEME LEIDMINE MOMENTREA KORRAL, 6

Antud on ettevõtte kassaseis iga kuu algul.
Leida poolaasta keskmine kassaseis.

Kuupäev	1. jaan	1. veebr	1. märts	1. apr	1. mai	1. juuni	1.juuli
Kassaseis, tuh €	40	190	30	660	580	420	620

Kuu keskmine kassaseis	jaan	veebr	märts	apr	mai	juuni
	115	110	345	620	500	520
Kvartali keskmine kassaseis	I kvartal 190			II kvartal 564,7		
Poolaasta keskmine kassaseis	$\frac{190 + 546,7}{2} = 368,3$					

KRONOLOOGILINE KESKMINE

Kronoloogiline keskmine on momentrea andmete põhjal leitud perioodrea perioodide keskmiste aritmeetiline keskmine.

Momentrida	Kuupäev	1. jaan	1. veebr	1. märts	1. apr
	x	x_1	x_2	x_3	x_4
Perioodrea perioodide keskmised	Kuude keskmised	jaan $\bar{x}_{jaan} = \frac{x_1 + x_2}{2}$	veebr $\bar{x}_{veebr} = \frac{x_2 + x_3}{2}$	märts $\bar{x}_{märts} = \frac{x_3 + x_4}{2}$	
Perioodrea perioodide keskmiste keskmine	Kvartali keskmine	I kvartal $\bar{x}_{1kv} = \frac{\bar{x}_{jaan} + \bar{x}_{veebr} + \bar{x}_{märts}}{3}$			

KRONOLOOGILINE KESKMINE, TEINE ARVUTUSVIIS

Antud on ettevõtte kassaseis iga kuu algul.

Leida poolaasta keskmine kassaseis.

Kuupäev	1. jaan	1. veebr	1. märts	1. apr	1. mai	1. juuni	1.juuli
Kassaseis, tuh €	40	190	30	660	580	420	620

$$\frac{40 + 2 \cdot 190 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 660 + 2 \cdot 580 + 2 \cdot 420 + 620}{12} = 368,3$$

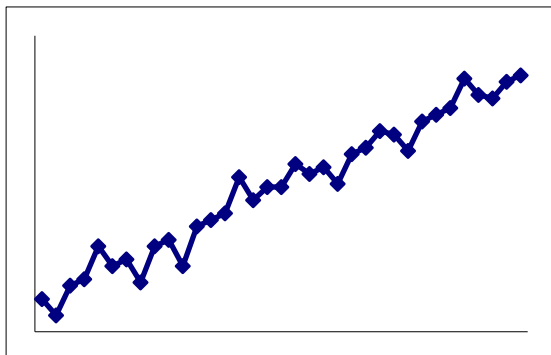
Kaalutud aritmeetiline
keskmine

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 40 + 190 + 30 + 660 + 580 + 420 + \frac{1}{2} \cdot 620}{6} = 368,3$$

Üldvalem

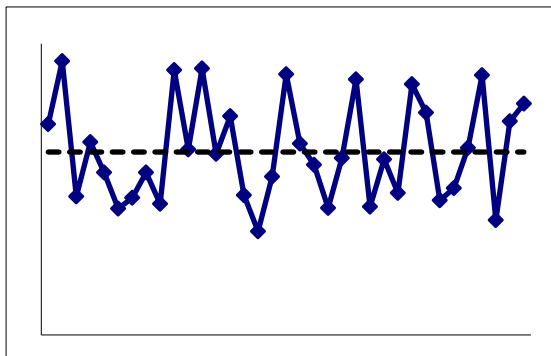
$$\bar{x}_{kron} = \frac{\frac{x_1}{2} + x_2 + \dots + x_{T-1} + \frac{x_T}{2}}{T-1}.$$

ERINEVAD AEGREAD

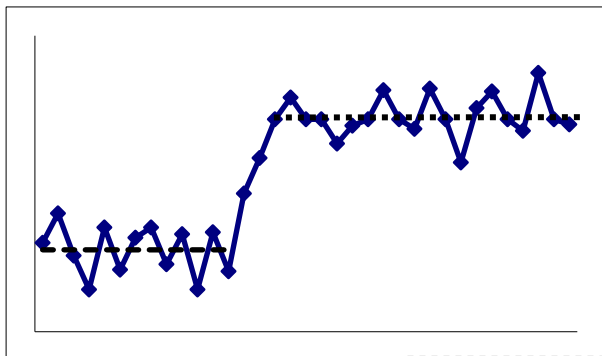


Keskmine tase puudub.

Saab leida keskmise juurdekasvu.



Keskmine tase on olemas.

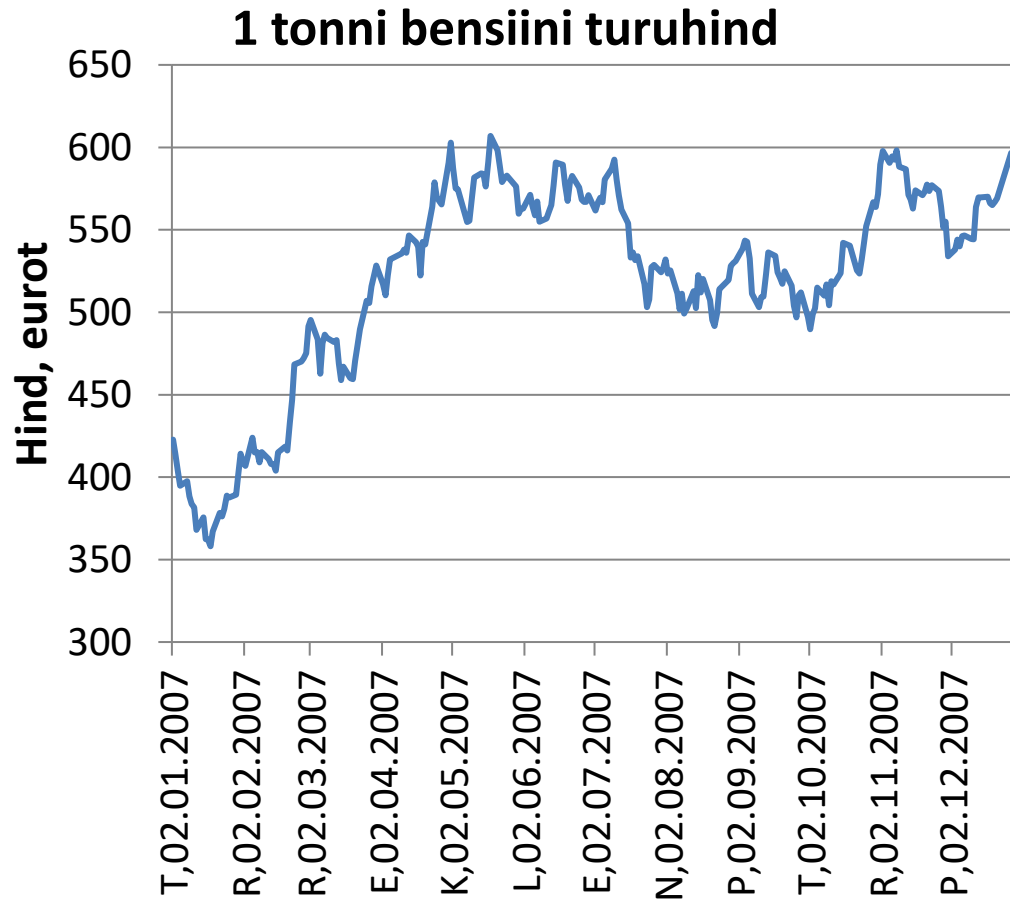


On kaks keskmist taset.

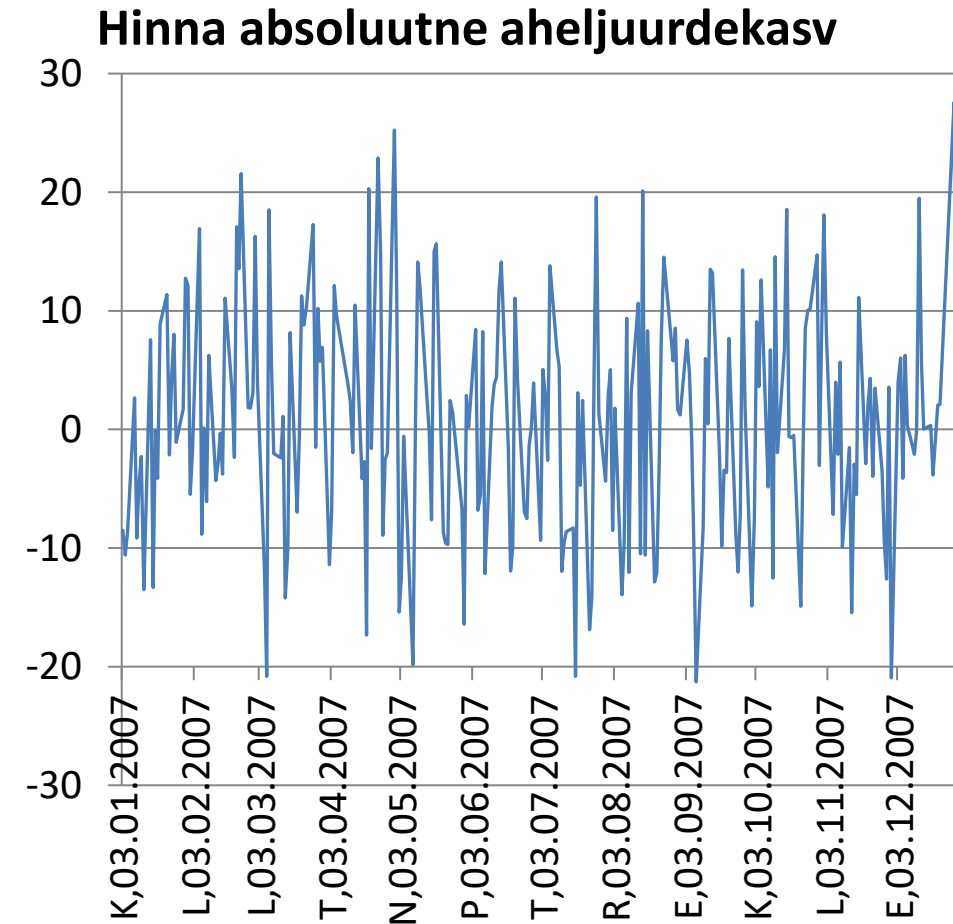
NÄIDE: BENSIINI MAAILMATURU HIND, 1

2.01.-28.12.2007

Keskmist ei ole.

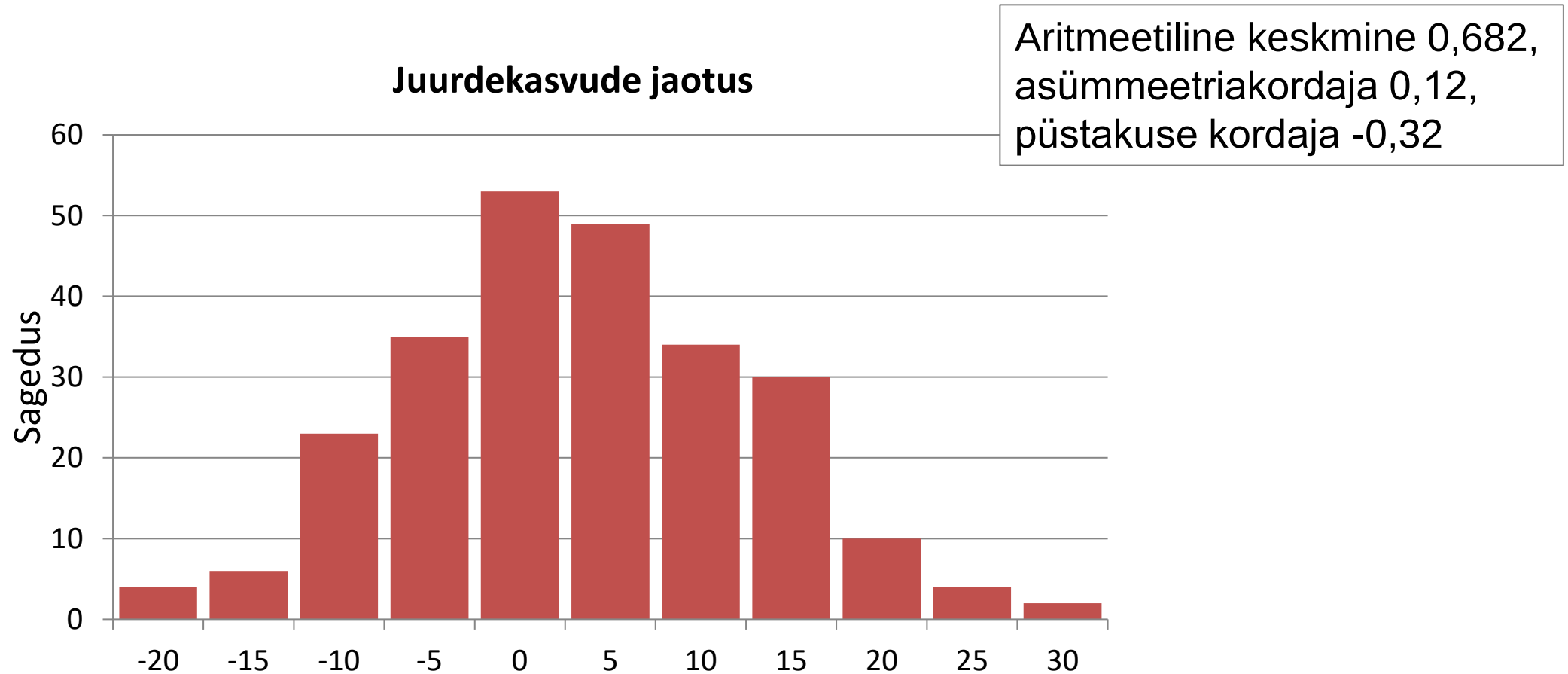


Keskmine on.



NÄIDE: BENSIINI MAAILMATURU HIND, 2

2.01.-28.12.2007



JUURDEKASVUD

Vaatlesime indekseid
teema juures.

- **Absoluutsed juurdekasvud**
 - Absoluutne aheljuurdekasv
 - Absoluutne alusjuurdekasv
- **Suhtelised juurdekasvud ehk juurdekasvutempod**
 - Aheljuurdekasvutempo
 - Alusjuurdekasvutempo
- **Kasvutempod ehk indeksid**
 - Ahelkasvutempo ehk ahelindeks
 - Aluskasvutempo ehk alusindeks
- **Keskmised juurdekasvud**

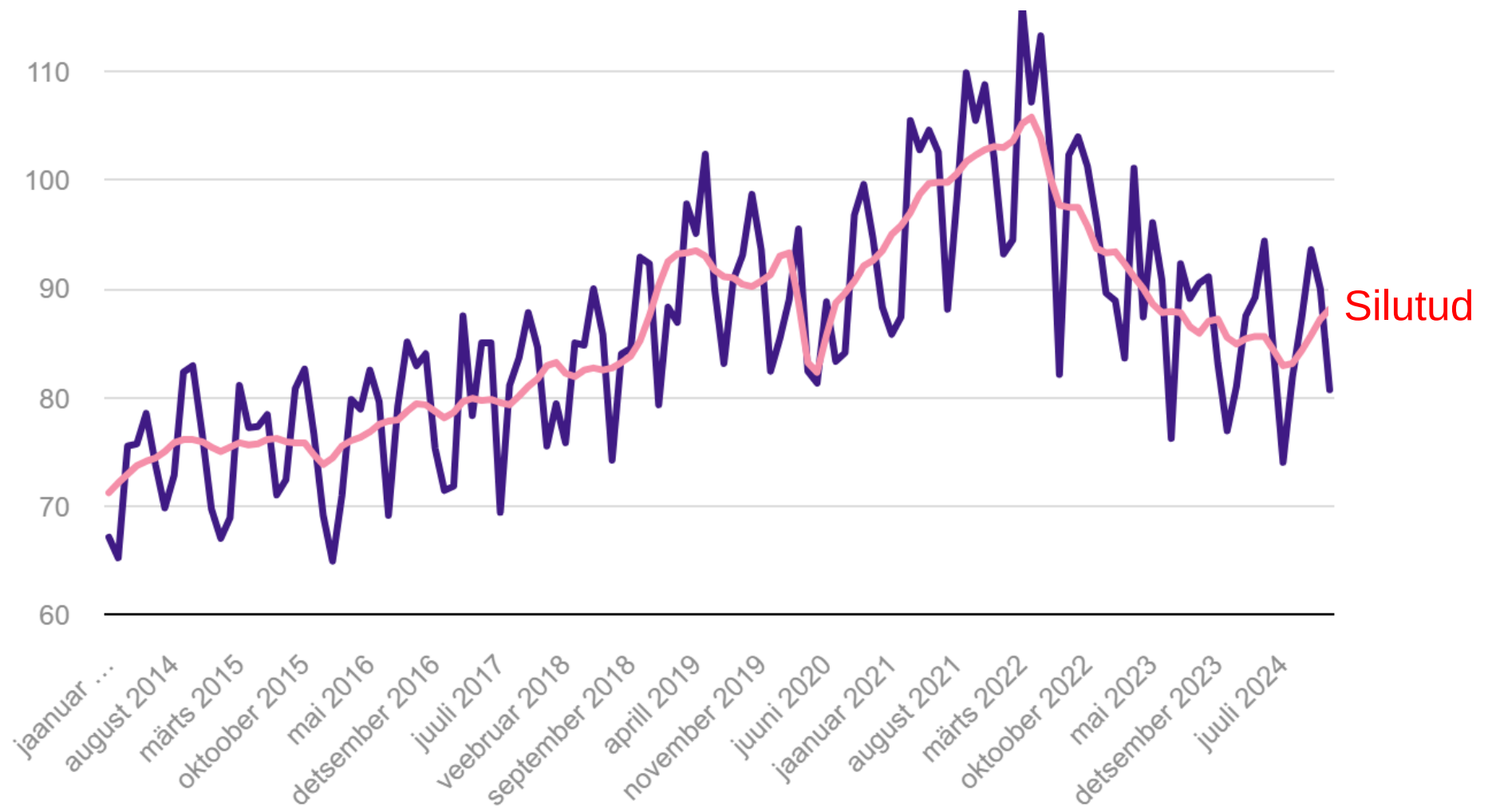
AEGRIDADE SILUMINE

SILUMISE EESMÄRK

Mitmesuguste perioodiliste ja juhuslike muutuste kõrvaldamine ning arengutendentside väljaselgitamine.

NÄIDE: SILUMINE

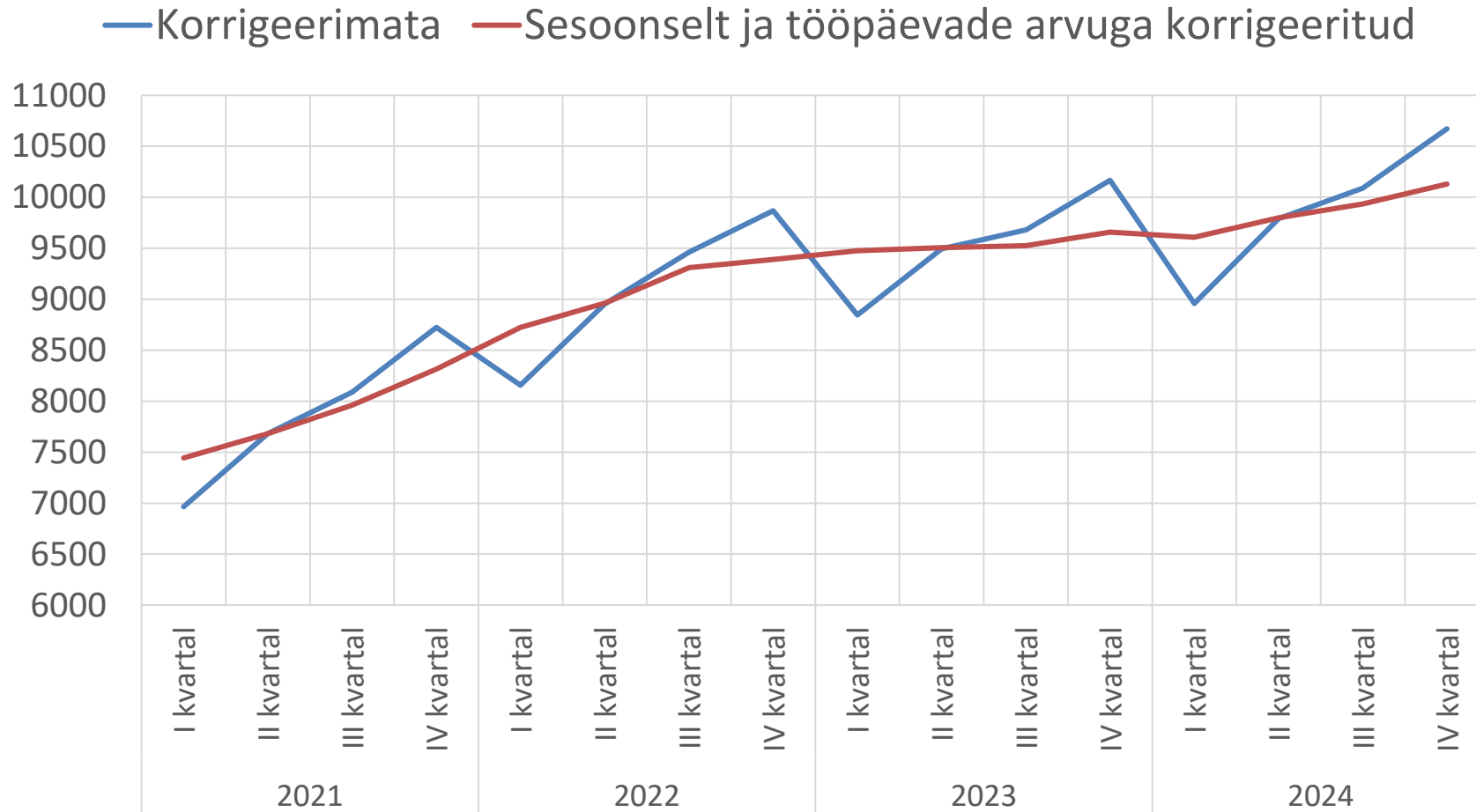
Töötleva tööstuse toodangu mahuindeks ja selle trend, jaanuar 2014 – detsember 2024 (2021 = 100).



Allikas: Eesti Statistikaamet.
Uudised. „Tööstustoodangu
maht vähenes 2024. aastal
4%.“ 6. veebr 2025.

NÄIDE: SILUMINE, SKP

Eesti SKP kvartalis, miljonit eurot



Allikas: Eesti Statistikaameti andmebaas, tabel RAA0012: SISEMAJANDUSE KOGUPRODUKT JA KOGURAHVATULU

SILUMISMEETODID

- Libisev keskmine (*moving average*) MA
 - lihtne libisev keskmine (*simple moving average*) SMA;
 - kaalutud libisev keskmine (*weighted moving average*) WMA.
- Eksponentsilumine ES
 - lihtne eksponentsilumine;
 - trendiga eksponentsilumine;
 - trendi ja sesoonsusega eksponentsilumine.
- Silumine regressioonjoonega
 - lineaarne regressioon;
 - mittelineaarne regressioon.

NÄIDE: LIBISEV KESKMINE, 1

3 kuu libisev keskmine

$$MA_t = \frac{1}{3}(y_t + y_{t-1} + y_{t-2})$$

Aeg, kuudes	1	2	3	4	5	6
y	10	17	13	22	15	17
Libisev keskmine			13,3			

NÄIDE: LIBISEV KESKMINE, 2

3 kuu libisev keskmine $MA_t = \frac{1}{3}(y_t + y_{t-1} + y_{t-2})$

Aeg, kuudes	1	2	3	4	5	6
y	10	17	13	22	15	17
Libisev keskmine			13,3	17,3		

NÄIDE: LIBISEV KESKMINE, 3

3 kuu libisev keskmine

$$MA_t = \frac{1}{3}(y_t + y_{t-1} + y_{t-2})$$

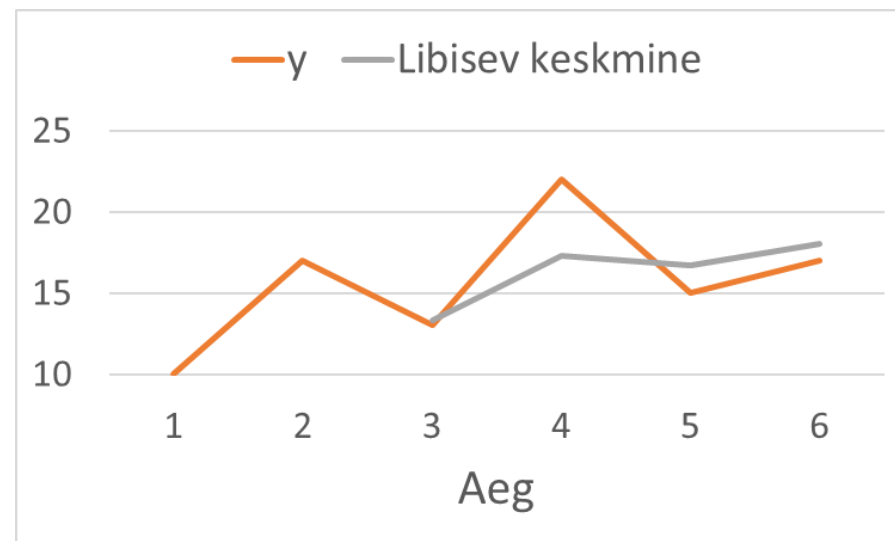
Aeg, kuudes	1	2	3	4	5	6
y	10	17	13	22	15	17
Libisev keskmine			13,3	17,3	16,7	

NÄIDE: LIBISEV KESKMINE, 4

3 kuu libisev keskmine

$$MA_t = \frac{1}{3}(y_t + y_{t-1} + y_{t-2})$$

Aeg, kuudes	1	2	3	4	5	6
y	10	17	13	22	15	17
Libisev keskmine			13,3	17,3	16,7	18



LIBISEV KESKMINE

Libiseva keskmise väärtus perioodi t jaoks

$$MA_t = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q y_{t-i+1}$$

q perioodide arv, mis keskmise leidmisel arvesse võetakse.
See on [libiseva keskmise samm](#).

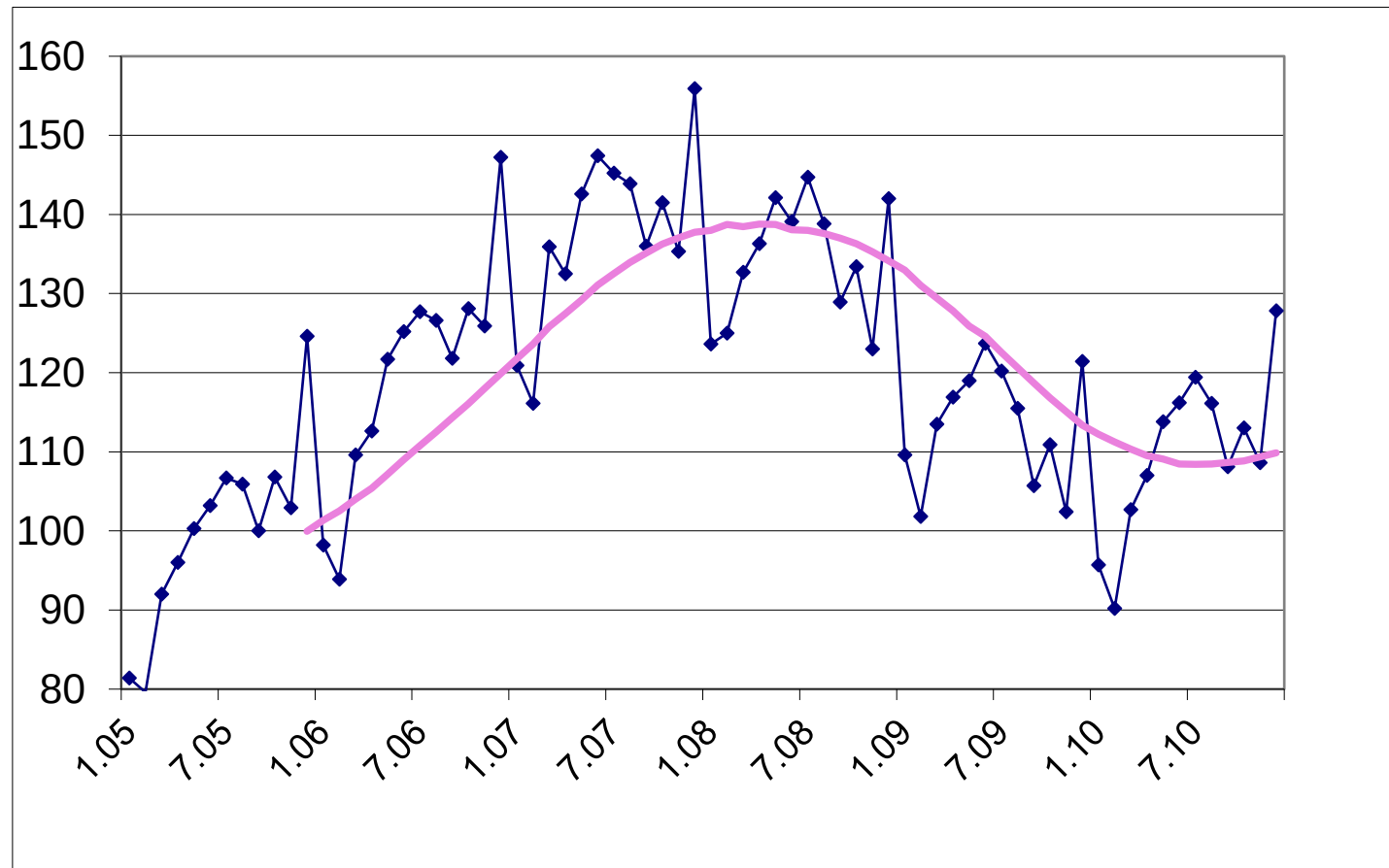
$$q=3 \quad MA_t = \frac{1}{3}(y_t + y_{t-1} + y_{t-2})$$

$$q=4 \quad MA_t = \frac{1}{4}(y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + y_{t-3})$$

NÄIDE: JAEMÜÜGI MAHUINDEKS

Jaan 2005 - dets 2010, 2005. a indeks =100

Silutud 12 kuu lihtsa libiseva keskmisega.

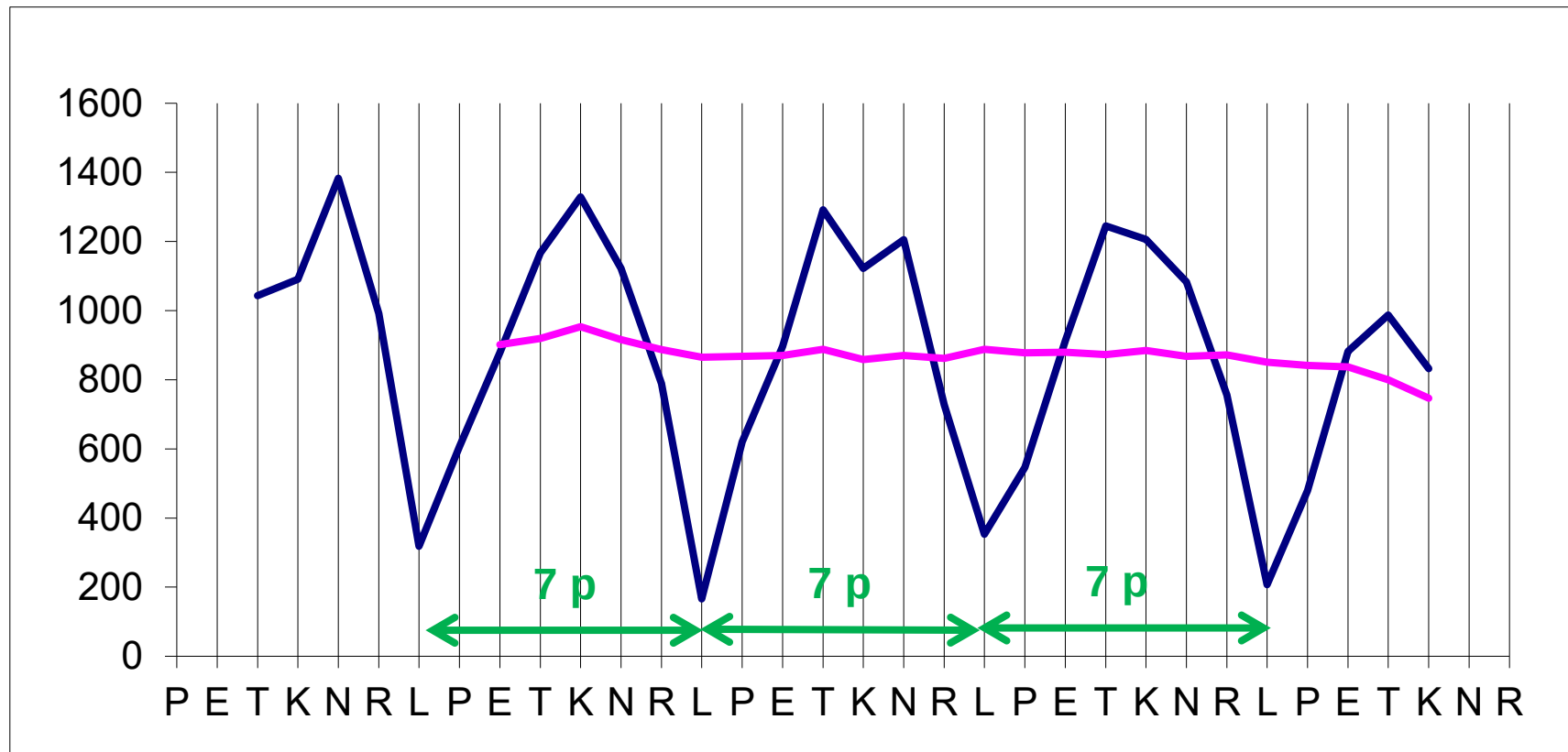


Allikas: Eesti
Statistikaameti
andmebaas, tabel
KM0033.

NÄIDE: LAEVAPILETITE MÜÜK, 1

Nädalapäevade kaupa.

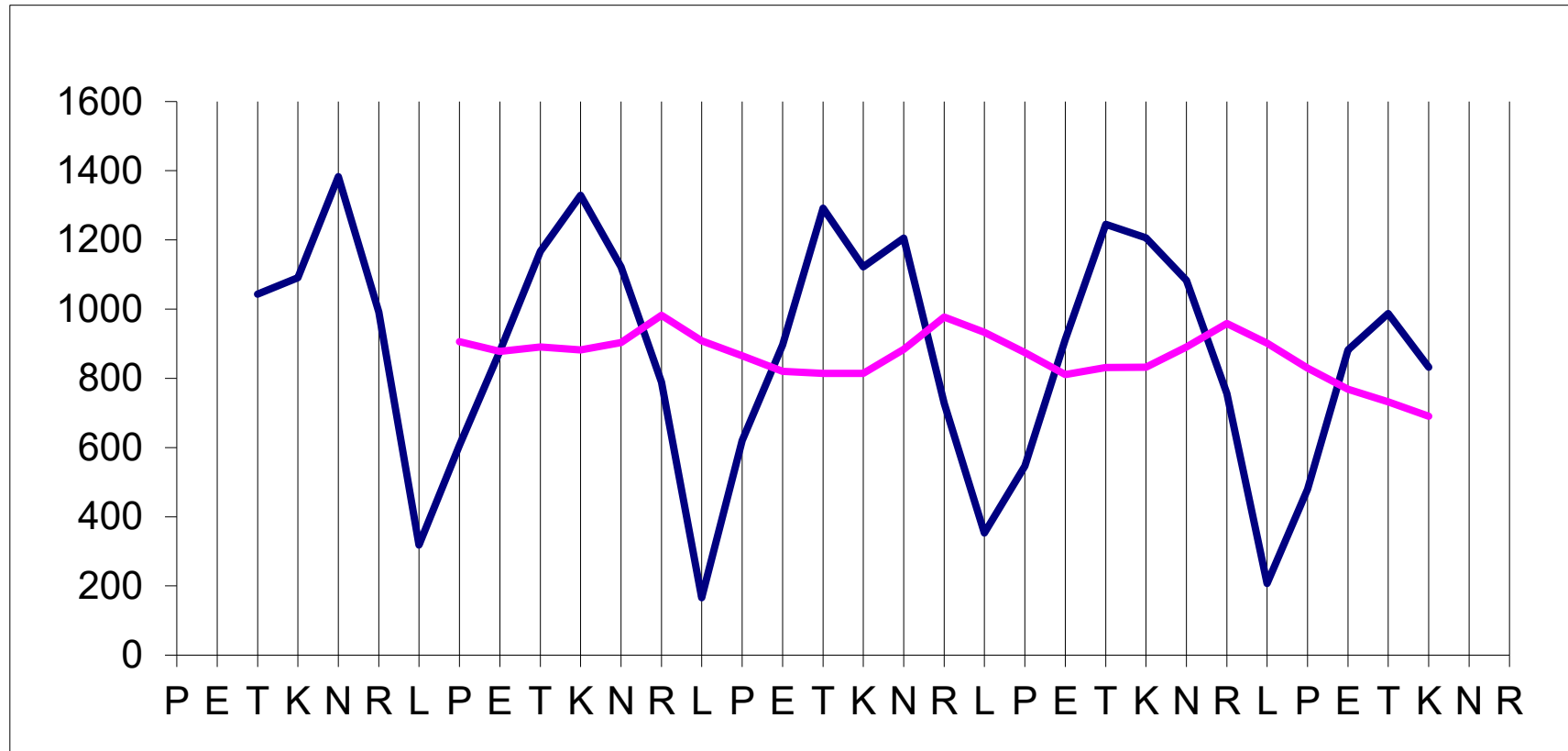
Silutud 7 päeva libiseva keskmisega.



NÄIDE: LAEVAPILETITE MÜÜK, 2

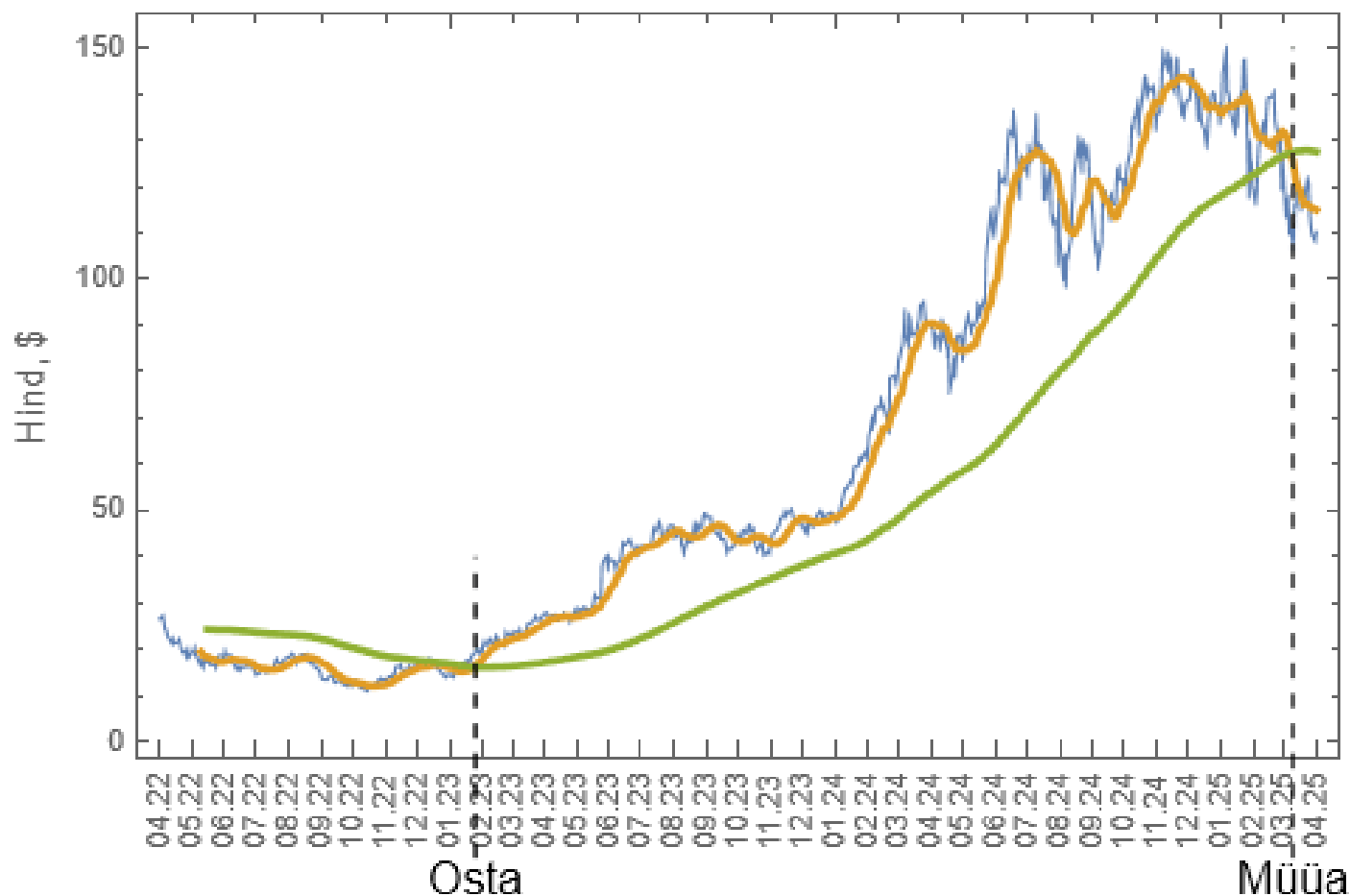
Nädalapäevade kaupa

Silutud **6** päeva libiseva keskmisega. Ei silu korralikult.



NÄIDE: AKTSIAHINDADE TEHNILINE ANALÜÜS

Nvidia aktsia sulgemishind päevas
1. apr 2022 – 1. apr 2025.



Ostusignaal: lühema sammuga libisev keskmine lõikab **alt üles** pikema sammuga libisevat keskmist.

Müügisignaal: lühema sammuga libisev keskmine lõikab **ülevaalt alla** pikema sammuga libisevat keskmist
Tavaliselt kas 50 ja 200 päeva MA või 15 ja 50 päeva MA.

- Silumata
- 50 päeva MA
- 200 päeva MA

NÄIDE: LIBISEV KESKMINE JA PROGNOOSIMINE, 1

Kuu	Tegelik müügimaht	Proгноos 3 kuu libiseva keskmise järgi
jaanuar	450	
veebruar	440	
märts	460	
aprill		450

Järgmise perioodi prognoos = viimane libisev keskmine

$$F_{t+1} = MA_t$$

NÄIDE: LIBISEV KESKMINE JA PROGNOOSIMINE, 2

Kuu	Tegelik müügimaht	Proгноos 3 kuu libiseva keskmise järgi
jaanuar	450	
veebruar	440	
märts	460	
aprill	410	450
mai		437

Järgmise perioodi prognoos = viimane libisev keskmine

$$F_{t+1} = MA_t$$

NÄIDE: LIBISEV KESKMINE JA PROGNOOSIMINE, 3

Kuu	Tegelik müügimaht	Proгноos 3 kuu libiseva keskmise järgi
jaanuar	450	
veebruar	440	
märts	460	
aprill	410	450
mai	380	437
juuni		417

Järgmise perioodi prognoos = viimane libisev keskmine

$$F_{t+1} = MA_t$$

NÄIDE: LIBISEV KESKMINE JA PROGNOOSIMINE, 4

[illegible]

NÄIDE: LIBISEV KESKMINE JA PROGNOOSIMINE, 5

Kuu	Tegelik müügi- maht	Prognoos 3 kuu libiseva keskmise järgi	Prognoos 6 kuu libiseva keskmise järgi	Prognoos 12 kuu libiseva keskmise järgi
jaanuar	450			
veebruar	440			
märts	460			
aprill	410	450		
mai	380	437		
juuni	400	417		
juuli	370	397	423	
august	360	383	410	
september	410	377	397	
oktoober	450	380	388	
november	470	407	395	
detsember	490	443	410	
jaanuar		470	425	424

NÄIDE: LIBISEV KESKMINE JA PIKEM PROGNOOS

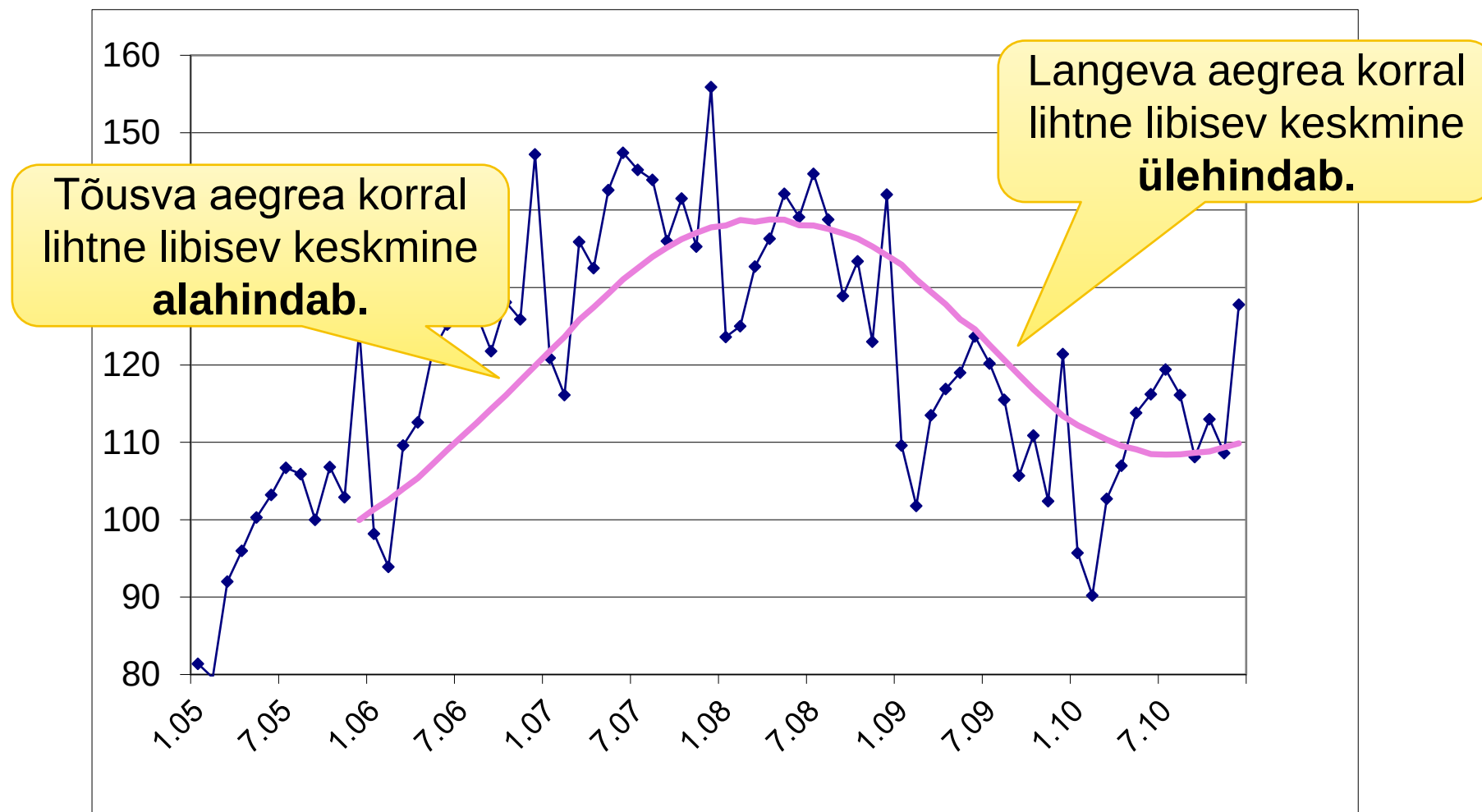
Kuu	Tegelik müügimaht	Prognoos 3 kuu libiseva keskmise järgi
jaanuar	450	
veebruar	440	
märts	460	
aprill		450
mai		450
juuni		450

Kui tahame prognoosida mitme järgmise perioodi väärtust, siis need on kõik ühesugused ja võrduvad käesoleva perioodi libiseva keskmisega.

$$F_{t+1} = F_{t+2} = F_{t+3} = \dots = MA_t$$

LIHTNE LIBISEV KESKMINE: PUUDUSED

Jaemüügi mahuindeks jaan 2005 - dets 2010.
Silutud 12 kuu lihtsa libiseva keskmisega.



TSENTREERITUD LIBISEV KESKMINE, 1

3 kuu tsentreeritud libisev keskmine $CMA_t = \frac{1}{3}(y_{t+1} + y_t + y_{t-1})$

Aeg, kuudes	1	2	3	4	5	6
y	10	17	13	22	15	17
Tsentreeritud libisev keskmine		13,3				

TSENTREERITUD LIBISEV KESKMINE, 2

3 kuu tsentreeritud libisev keskmine $CMA_t = \frac{1}{3}(y_{t+1} + y_t + y_{t-1})$

Aeg, kuudes	1	2	3	4	5	6
y	10	17	13	22	15	17
Tsentreeritud libisev keskmine		13,3	17,3			

TSENTREERITUD LIBISEV KESKMINE, 3

3 kuu tsentreeritud libisev keskmine $CMA_t = \frac{1}{3}(y_{t+1} + y_t + y_{t-1})$

Aeg, kuudes	1	2	3	4	5	6
y	10	17	13	22	15	17
Tsentreeritud libisev keskmine		13,3	17,3	16,7		

TSENTREERITUD LIBISEV KESKMINE, 4

3 kuu tsentreeritud libisev keskmine $CMA_t = \frac{1}{3}(y_{t+1} + y_t + y_{t-1})$

Aeg, kuudes	1	2	3	4	5	6
y	10	17	13	22	15	17
Tsentreeritud libisev keskmine		13,3	17,3	16,7	18	

TSENTREERITUD LIBISEV KESKMINE ÜLDJUHUL

Paaritu arv
perioode

$$CMA_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^q y_{t-i}$$

$$CMA_t = \frac{1}{3}(y_{t-1} + y_t + y_{t+1})$$

$$CMA_t = \frac{1}{5}(y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2})$$

Paarisarv
perioode

$$CMA_t = \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{2}(y_{t-q} + y_{t+q}) + \sum_{i=-q+1}^{q-1} y_{t-i} \right)$$

Lisatakse
kummagi
poole
lõppväärtuste
keskmise

Paaritu arv,
keskmise
väärtus y_t

Tentreeritud libisevat keskmist
prognoosimiseks kasutada ei saa.
Kasutatakse ainult silumiseks.

4 kvartali korral

$$CMA_t = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \frac{1}{2}y_{t+2} \right)$$

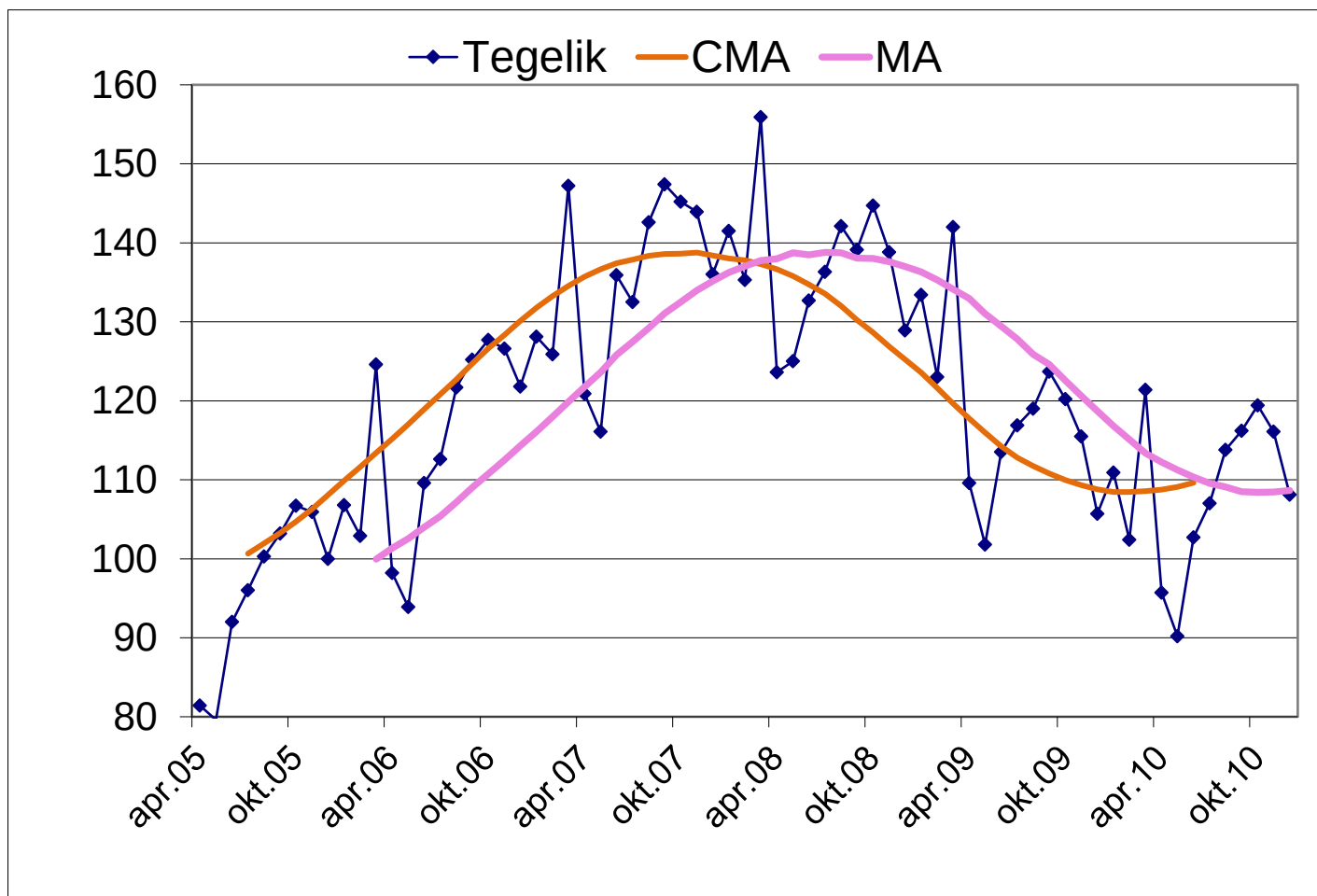
6 kuu korral

$$CMA_t = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}y_{t-3} + y_{t-2} + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + y_{t+2} + \frac{1}{2}y_{t+3} \right)$$

NÄIDE: TSENTREERITUD LIBISEV KESKMINE

Jaemüügi mahuindeks jaan 2005 - dets 2010.

Silutud 12 kuu lihtsa (MA) ja tsentreeritud libiseva keskmisega (CMA).



KAALUTUD LIBISEV KESKMINE

$$WMA_t = \frac{\sum_{i=1}^q w_i y_{t-i+1}}{\sum_{i=1}^q w_i} = \frac{w_1 y_t + w_2 y_{t-1} + \dots + w_n y_{t-q+1}}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

$w_1 > w_2 > \dots > w_q$ varasemate perioodide väärtused on väiksema kaaluga

Näiteks kaalude lineaarne vähenemine.

Sammuga 3

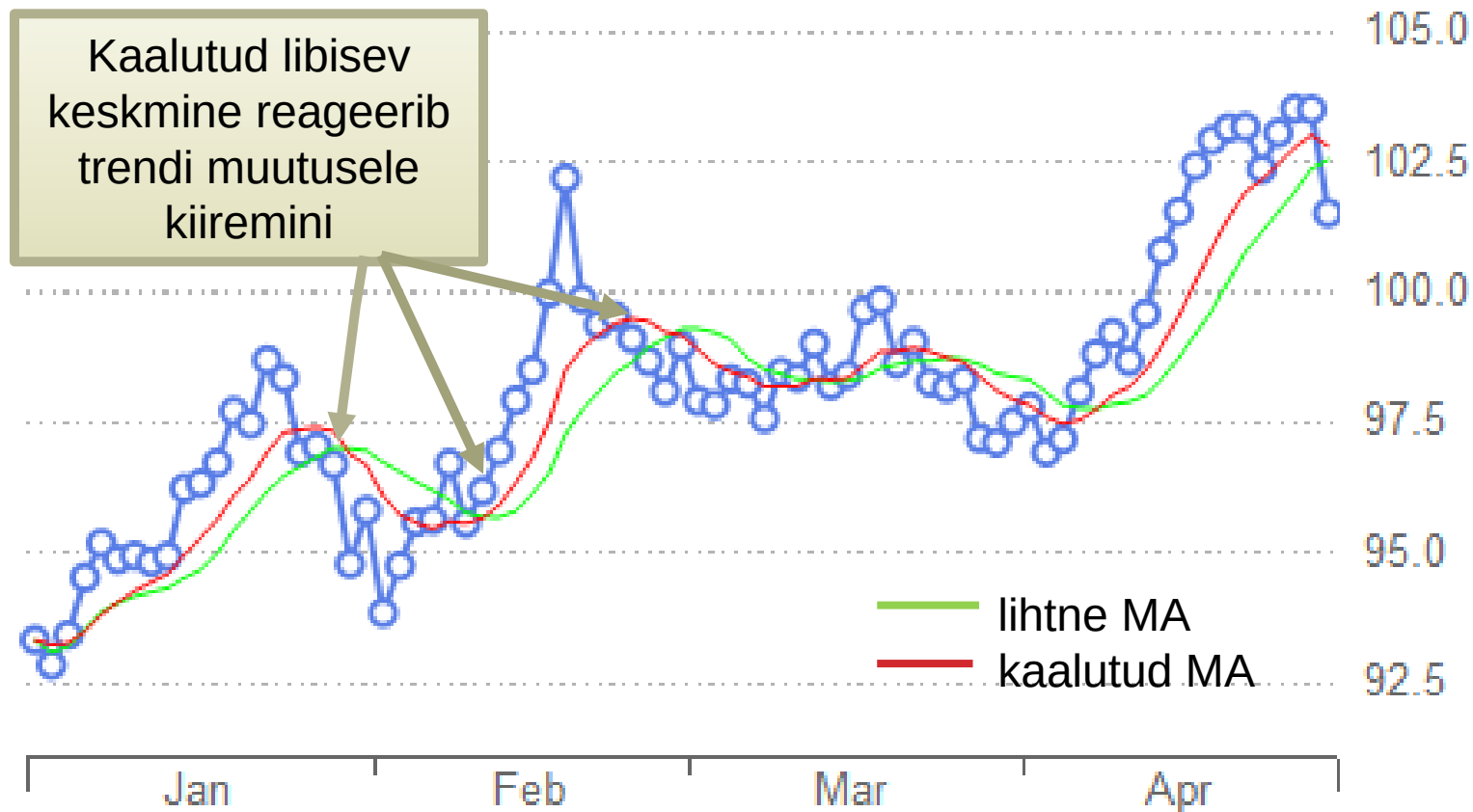
$$\frac{3y_t + 2y_{t-1} + 1y_{t-2}}{3 + 2 + 1}$$

Sammuga 10

$$\frac{10y_t + 9y_{t-1} + \dots + 2y_{t-8} + 1y_{t-9}}{10 + 9 + \dots + 2 + 1}$$

NÄIDE: KAALUTUD LIBISEV KESKMINE

Walmart aktsia hind (\$) 2019 jaan-apr.
Silutud 10 päeva lihtsa ja kaalutud libiseva keskmisega.



**EKSPONENT-
SILUMINE**

EKSPONENTSILUMINE

silumiskonstant

silutud väärtus

$$E_t = w y_t + (1-w) E_{t-1}$$

perioodi t
tegelik väärtus

eelmise perioodi
silutud väärtus

The diagram shows the exponential smoothing formula $E_t = w y_t + (1-w) E_{t-1}$. A callout box labeled 'silumiskonstant' points to the variable w . A callout box labeled 'perioodi t tegelik väärtus' points to the term y_t . A callout box labeled 'eelmise perioodi silutud väärtus' points to the term E_{t-1} . The text 'silutud väärtus' is placed to the left of the equation.

Eksponentsilumisel leitakse silutud väärtus E_t ajahetkele t vastava tegeliku väärtuse y_t ja eelmise silutud väärtuse E_{t-1} kaalutud keskmisena.

Esimese perioodi silutud väärtus on tegelik väärtus $E_1 = y_1$

Ka eksponentsiaalne libisev keskmine ehk EMA.

EKSPONENTSILUMISE KONSTANT

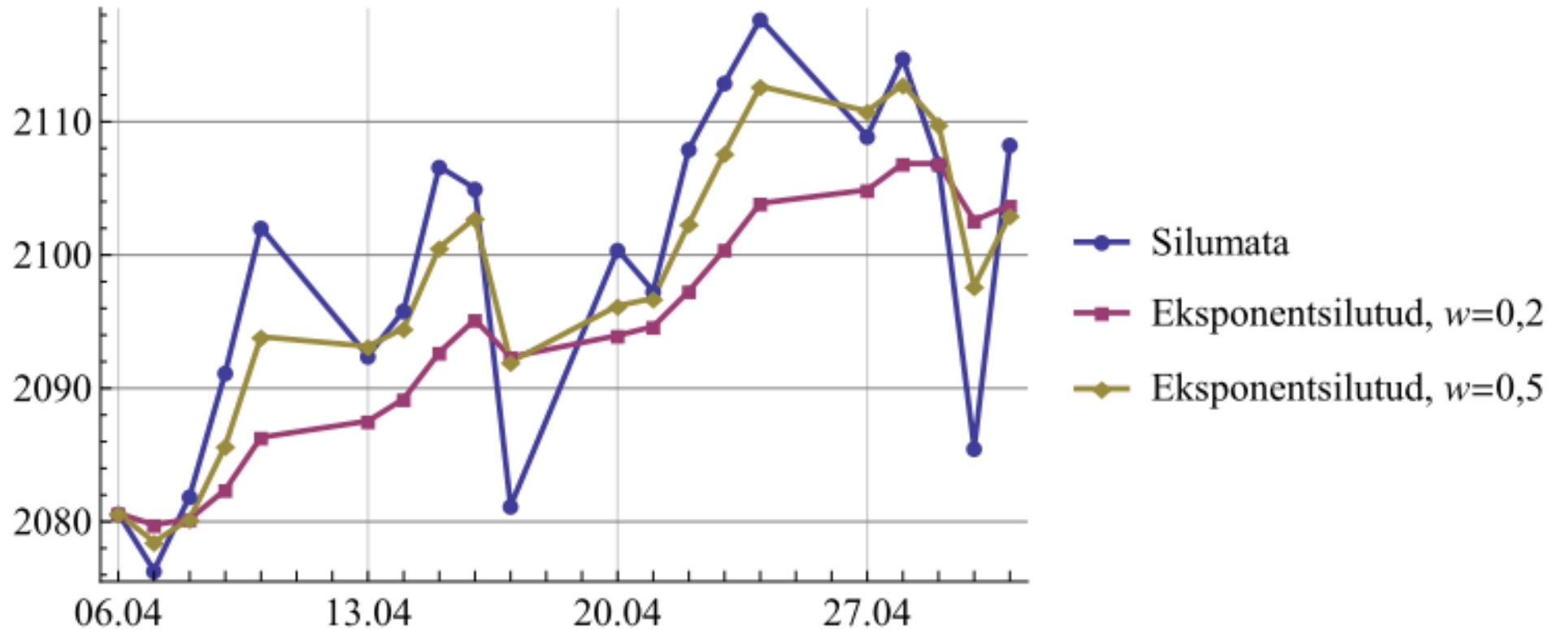
$$E_t = wy_t + (1-w)E_{t-1}$$

$w = 1$ $E_t = y_t$ silumist ei toimu

$w = 0$ $E_t = E_{t-1}$ $E_{t-1} = E_{t-2}$ $E_{t-2} = \dots = y_1$
kogu aeg konstantne

$$0 \leq w \leq 1$$

NÄIDE: AKTSIAINDEKS S&P



Suurem silumiskonstant -> vähem silumist

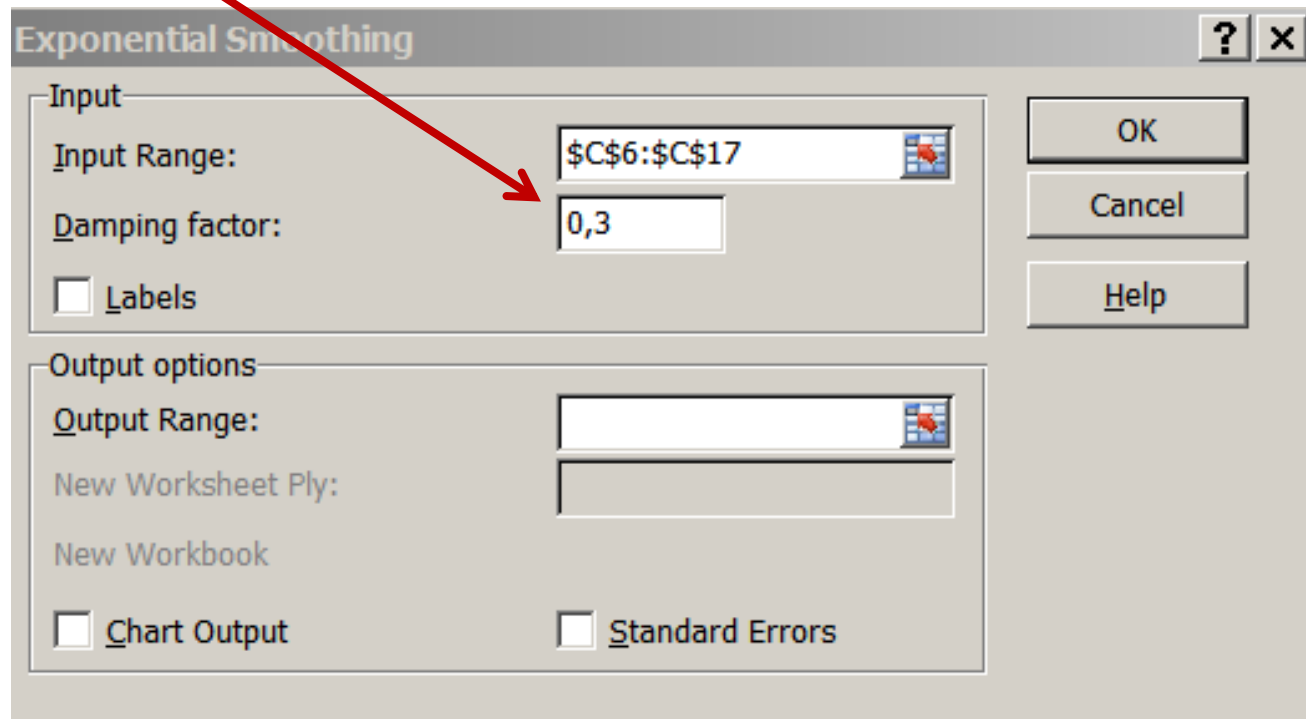
Demo: eksponentsilumine

SUMBUMISFAKTOR

$$E_t = wy_t + (1-w)E_{t-1}$$

$1 - w$ sumbumisfaktor (*damping factor*)

Excelis:
Data Analysis ->
Exponential smoothing



The image shows the 'Exponential Smoothing' dialog box in Microsoft Excel. A red arrow points from the text ' $1 - w$ sumbumisfaktor (*damping factor*)' to the 'Damping factor' input field, which contains the value '0,3'. The dialog box has a title bar with a question mark and a close button. It is divided into two main sections: 'Input' and 'Output options'. The 'Input' section includes 'Input Range' (set to '\$C\$6:\$C\$17'), 'Damping factor' (set to '0,3'), and a checkbox for 'Labels'. The 'Output options' section includes 'Output Range' (empty), 'New Worksheet Ply' (empty), 'New Workbook' (empty), a checkbox for 'Chart Output', and a checkbox for 'Standard Errors'. On the right side of the dialog box, there are three buttons: 'OK', 'Cancel', and 'Help'.

Section	Field	Value
Input	Input Range	\$C\$6:\$C\$17
	Damping factor	0,3
	Labels	☐
Output options	Output Range	
	New Worksheet Ply	
	New Workbook	
	Chart Output	☐
	Standard Errors	☐

PROGNOOSIMINE EKSPONENTSILUMISE KORRAL, 1

Aktsiaindeks S&P, silumiskonstant $w=0,2$

Kuupäev	Tegelik	Silutud	Prognoos
22.04.2015	2107,96	2097,30	
23.04.2015	2112,93	2100,42	
24.04.2015	2117,69	2103,88	
27.04.2015	2108,92	2104,88	
28.04.2015			2104,88

Järgmise perioodi prognoos =
viimane silutud väärtus.

$$F_{t+1} = E_t$$

PROGNOOSIMINE

EKSPONENTSILUMISE KORRAL, 2

Aktsiaindeks S&P, silumiskonstant $w=0,2$

Kuupäev	Tegelik	Silutud	Prognoos
22.04.2015	2107,96	2097,30	
23.04.2015	2112,93	2100,42	
24.04.2015	2117,69	2103,88	
27.04.2015	2108,92	2104,88	
28.04.2015	2114,76		2104,88
29.04.2015			

Järgmise perioodi prognoos =
viimane silutud väärtus.

$$F_{t+1} = E_t$$

PROGNOOSIMINE

EKSPONENTSILUMISE KORRAL, 3

Aktsiaindeks S&P, silumiskonstant $w=0,2$

Kuupäev	Tegelik	Silutud	Prognoos
22.04.2015	2107,96	2097,30	
23.04.2015	2112,93	2100,42	
24.04.2015	2117,69	2103,88	
27.04.2015	2108,92	2104,88	
28.04.2015	2114,76	2106,86	2104,88
29.04.2015			

Järgmise perioodi prognoos =
viimane silutud väärtus.

$$F_{t+1} = E_t$$

PROGNOOSIMINE

EKSPONENTSILUMISE KORRAL, 4

Aktsiaindeks S&P, silumiskonstant $w=0,2$

Kuupäev	Tegelik	Silutud	Prognoos
22.04.2015	2107,96	2097,30	
23.04.2015	2112,93	2100,42	
24.04.2015	2117,69	2103,88	
27.04.2015	2108,92	2104,88	
28.04.2015	2114,76	2106,86	2104,88
29.04.2015			2106,86

Järgmise perioodi prognoos =
viimane silutud väärtus.

$$F_{t+1} = E_t$$

PROGNOOSIMINE

EKSPONENTSILUMISE KORRAL, 5

Eksponentsilumise korral on järgmise perioodi prognoosiks viimase perioodi silutud väärtus:

$$F_{t+1} = E_t$$

Pikema prognoosi korral on järgmised prognoositavad väärtused kõik võrdsed:

$$F_{t+2} = F_{t+1} = E_t$$

$$F_{t+3} = F_{t+2} = F_{t+1} = E_t$$

PROGNOOSIMINE

EKSPONENTSILUMISE KORRAL, 6

Aktsiaindeks S&P, silumiskonstant $w=0,2$

Kuupäev	Tegelik	Silutud	Prognoos
22.04.2015	2107,96	2097,30	
23.04.2015	2112,93	2100,42	
24.04.2015	2117,69	2103,88	
27.04.2015	2108,92	2104,88	
28.04.2015	2114,76	2106,86	2104,88
29.04.2015			2106,86
30.04.2015			2106,86
1.05.2015			2106,86

Hilisemate väärtuste lisandumisel prognoose korrigeeritakse.

PROGNOOSI VIGA

Prognoosi viga on tegeliku väärtuse ja prognoositud väärtuse vahe:

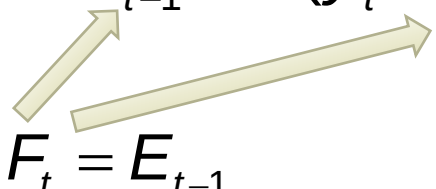
$$y_t - F_t$$

Näide: prognoosi viga.

Aktsiaindeks S&P, silumiskonstant $w=0,2$.

Kuupäev	Tegelik	Silutud	Prognoos	Prognoosi viga
22.04.2015	2107,96	2097,30		
23.04.2015	2112,93	2100,42		
24.04.2015	2117,69	2103,88		
27.04.2015	2108,92	2104,88		
28.04.2015	2114,76	2106,86	2104,88	2114,76-2104,88=7,9
29.04.2015	2106,85	2106,86	2106,86	2106,85-2106,86= -0,01

ADAPTIIVNE PROGNOOSIMINE

$$\begin{aligned} F_{t+1} &= E_t = wy_t + (1-w)E_{t-1} = wy_t + E_{t-1} - wE_{t-1} = \\ &= E_{t-1} + w(y_t - E_{t-1}) = F_t + w(y_t - F_t) \end{aligned}$$


$F_t = E_{t-1}$

$$F_{t+1} = F_t + w(y_t - F_t)$$

Eelmise perioodi
prognoos

Eelmise perioodi
prognoosi viga

Adaptiivne prognoosimine: prognoosi korrigeeritakse, prognoos sõltub eelmise prognoosi veast.

**SILUMINE
REGRESSIOON-
JOONEGA**

SILUMINE REGRESSIOONJOONEGA

1. Valitakse sobiva kujuga regressioonmudel.
 - Mudeli kuju on teada teooriast.
 - Teoreetilist mudelit ei eksisteeri. Esialgse valiku tegemiseks kasutatakse visuaalset hindamist. Lõpliku valiku tegemine **determinatsioonikordaja R^2** abil.
2. Leitakse mudeli parameetrite hinnangud.
3. Mudeli põhjal arvutatakse silutud väärtused (tasandusjoon).
4. Prognoosimine.
5. Mudeli interpreteerimine.

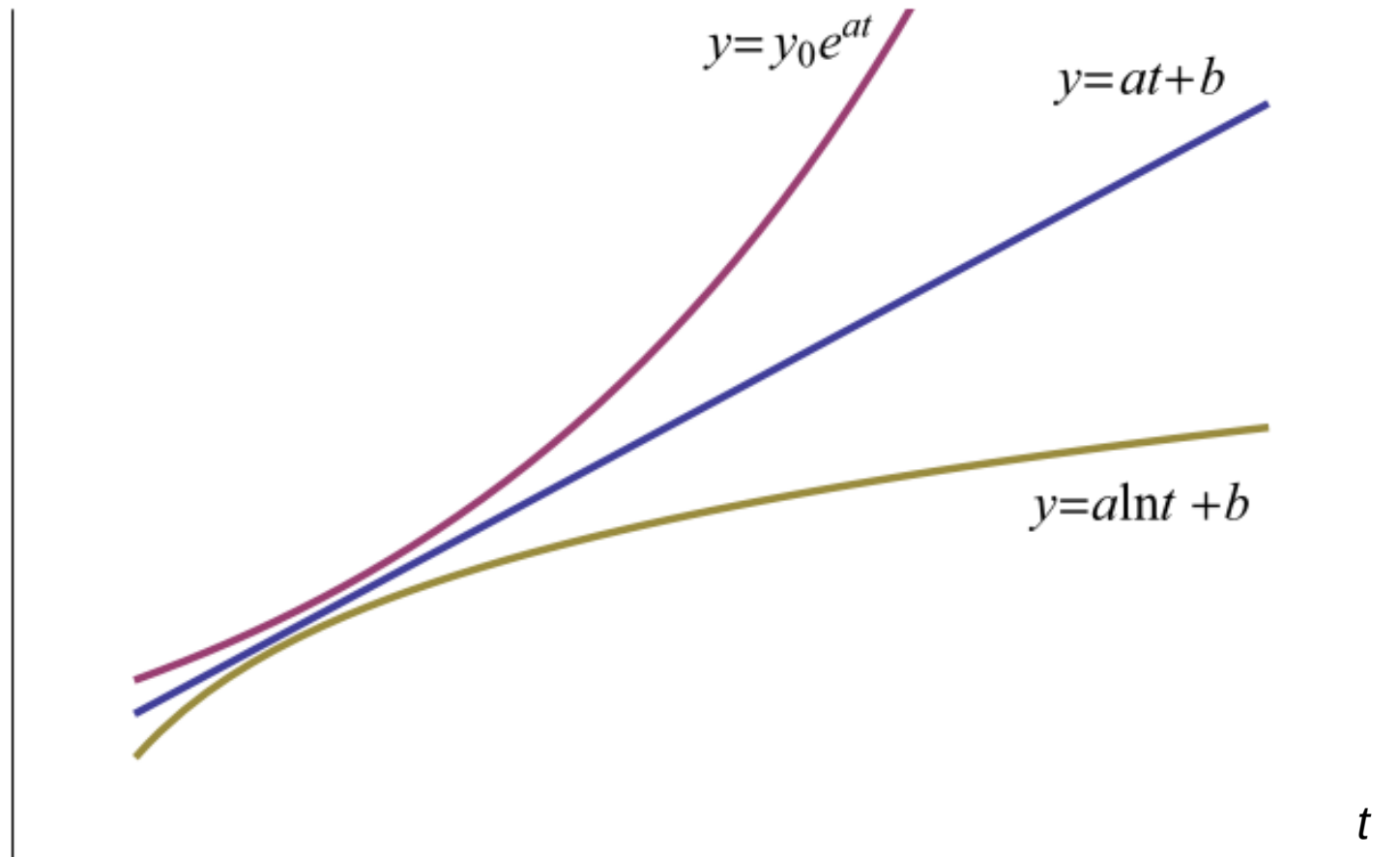
TÜÜPILISEMAD TRENDIJOONED

Lineaarne $y = at + b$

Eksponentsiaalne $y = ae^{bt}$

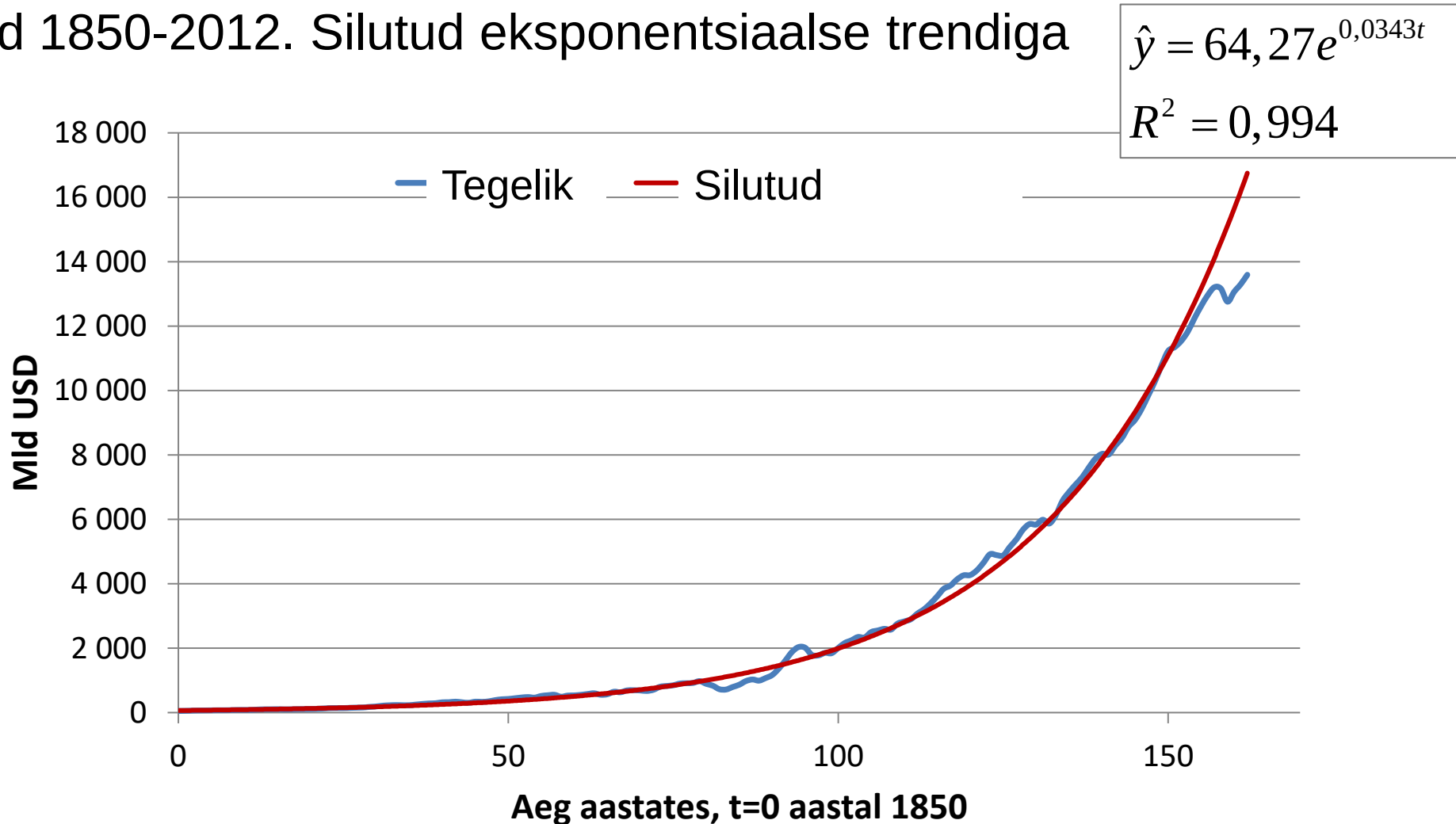
Logaritmiline $y = a \ln t + b$

Sõltumatuks tunnuseks
on aeg t .



NÄIDE: USA SKP

Aastad 1850-2012. Silutud eksponentsiaalse trendiga



EKSPONENTSIAALSE MUDELI PARAMEETER

$$y = y_0 e^{at}$$

Suuruse y suhteline muut ajaühikus on konstantne ja võrdub kasvuparameetriga a :

$$\frac{\Delta y}{y} = a$$

a on juurdekasvutempo ehk kasvumäär

NÄIDE: USA SKP, KASVUMÄÄR

Aastad 1850-2012

$$\hat{y} = 64,27e^{0,0343t} \quad \text{mld USD}$$

Pikaajaliselt on USA SKP kasvumäär olnud keskmiselt 3,43% aastas.

LINEAARNE VS EKSPONENTSIAALNE MUDEL

Lineaarne

$$y = at + b$$

Ekspponentsiaalne

$$y = y_0 e^{at}$$

Kui $\Delta t = 1$

$$\Delta y = a$$

$$\frac{\Delta y}{y} = a$$

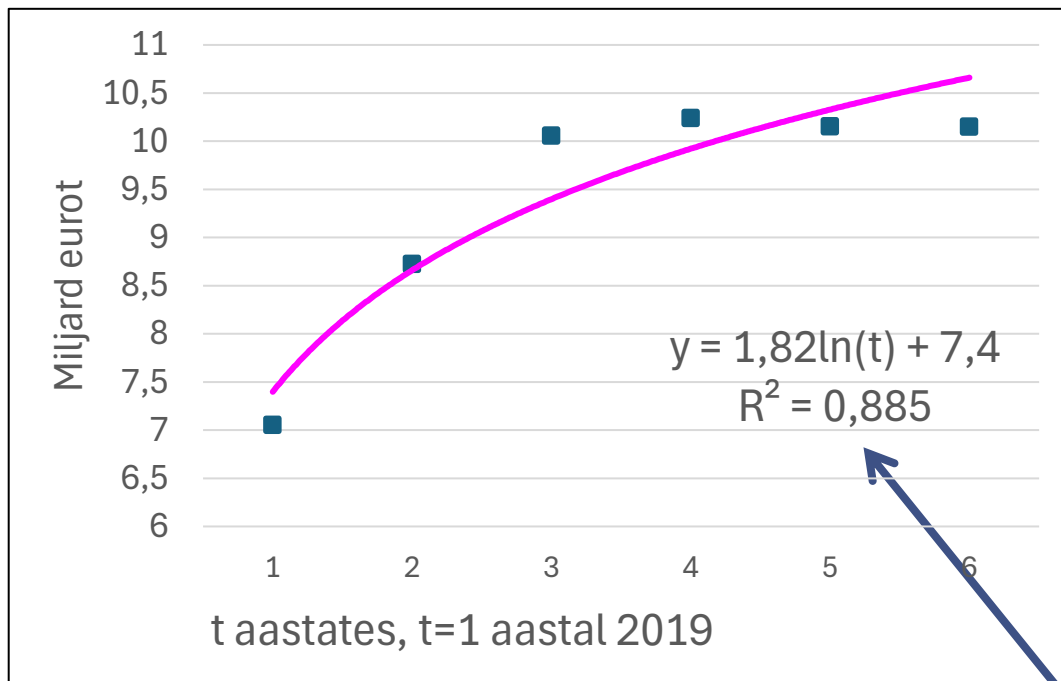
Absoluutne juurdekasv
on konstantne.

Suhteline juurdekasv on
konstantne.

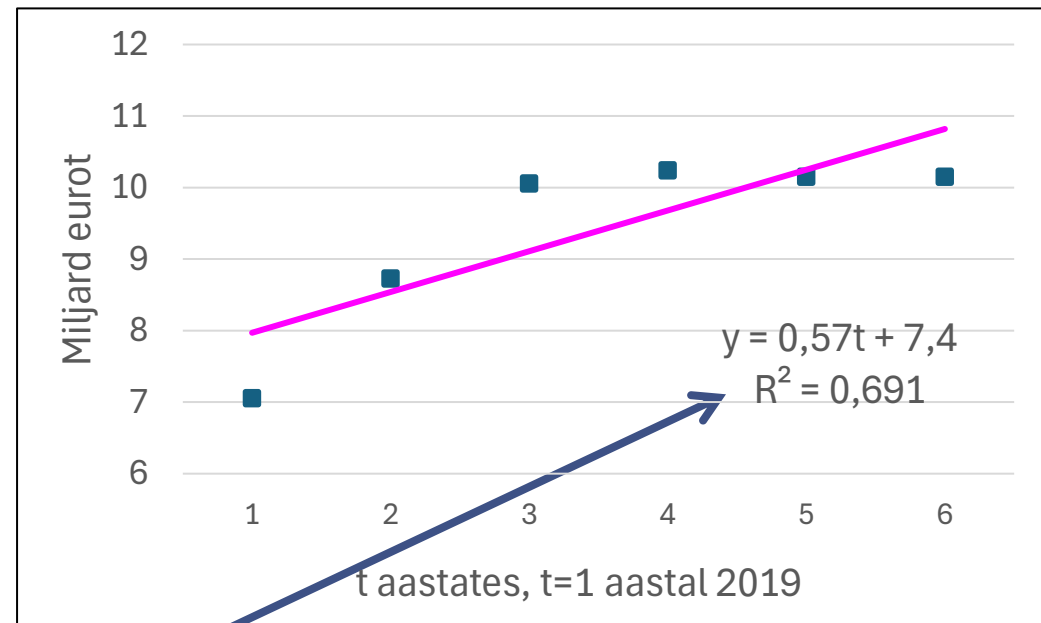
NÄIDE: HOIUSTE JÄÄK, 1

Residentidest mittefinantsettevõtete hoiuste jääk Eestis 2019-2024.

Logaritmiline



Lineaarne



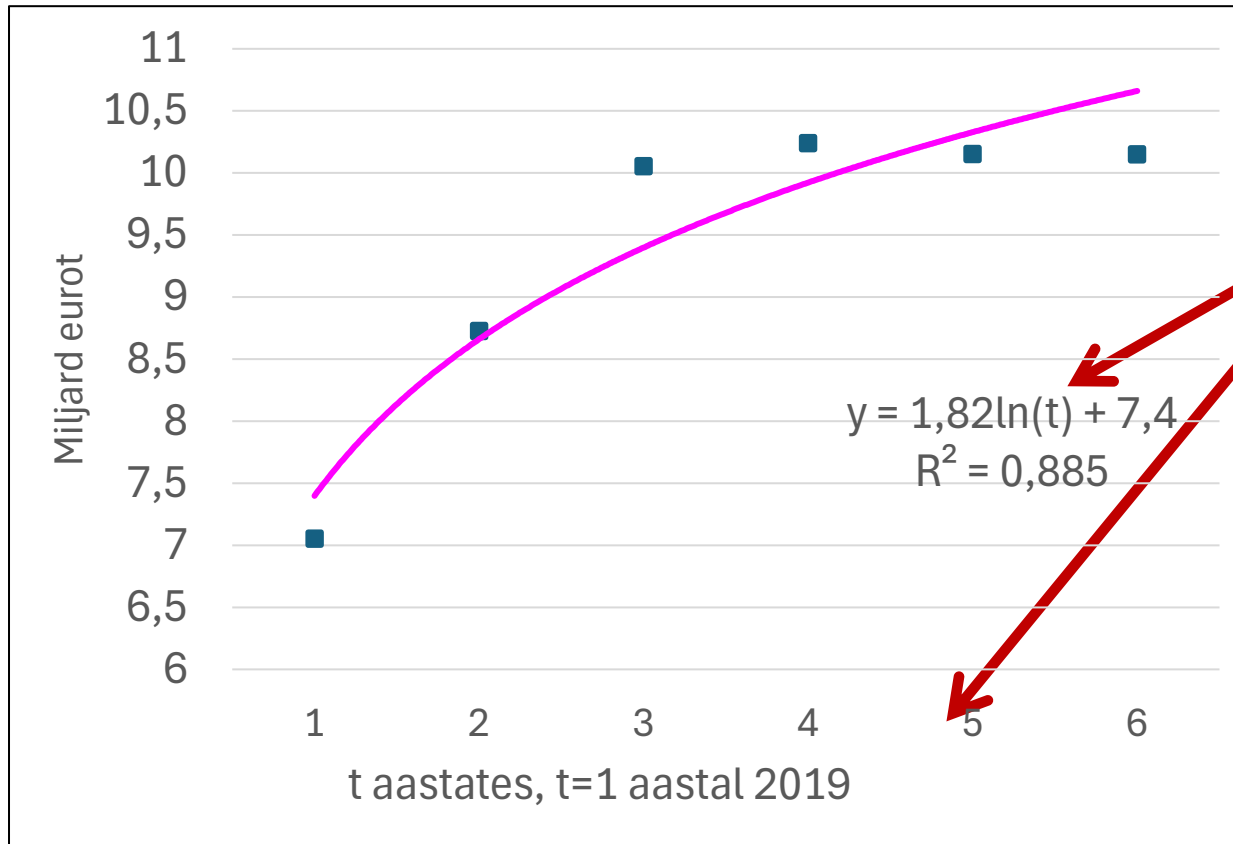
Allikas: Eesti Pank

Logaritmiline on parem, sest R^2 suurem.
Järelikult kasv aeglustub.

NÄIDE: HOIUSTE JÄÄK, 2

Residentidest mittefinantsettevõtete hoiuste jääk Eestis 2019-2024.

Silutud logaritmilise regressioonjoonega



NB!
Kasutatakse ajamuutujat t ,
mitte aastaarve.

NÄIDE: HOIUSTE JÄÄK, 3

Residentidest mittefinantsettevõtete hoiuste jääk Eestis 2019-2024.

Aasta	t	Hoiuste jääk, mld €
2019	1	7,051
2020	2	8,725
2021	3	10,055
2022	4	10,239
2023	5	10,151
2024	6	10,148

$$y = 1,82\ln(t) + 7,4$$

$$t = 1$$

Silutud väärtus

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= 1,82\ln(1) + 7,4 = \\ &= 0 + 7,4 = 7,4\end{aligned}$$

Vabaliikme interpretatsioon:
laenujääk perioodi algul.

NÄIDE: HOIUSTE JÄÄK, 4

Residentidest mittefinantsettevõtete hoiuste jääk Eestis 2019-2024.

Aasta	t	Hoiuste jääk, mld €
2019	1	7,051
2020	2	8,725
2021	3	10,055
2022	4	10,239
2023	5	10,151
2024	6	10,148

Kui kasutame mudelis aastaarve.

$$y = 0,57 \ln(aasta) - 1143$$

Aastal 1 oleks olnud hoiuste jääk
-1143 mld eurot.



AJAMUUTUJA

Regressioonjoonega silumisel kasutatakse alati ajamuutujat t , mis loendab ajaperioode alates vaatluse all oleva ajavahemiku algusest.

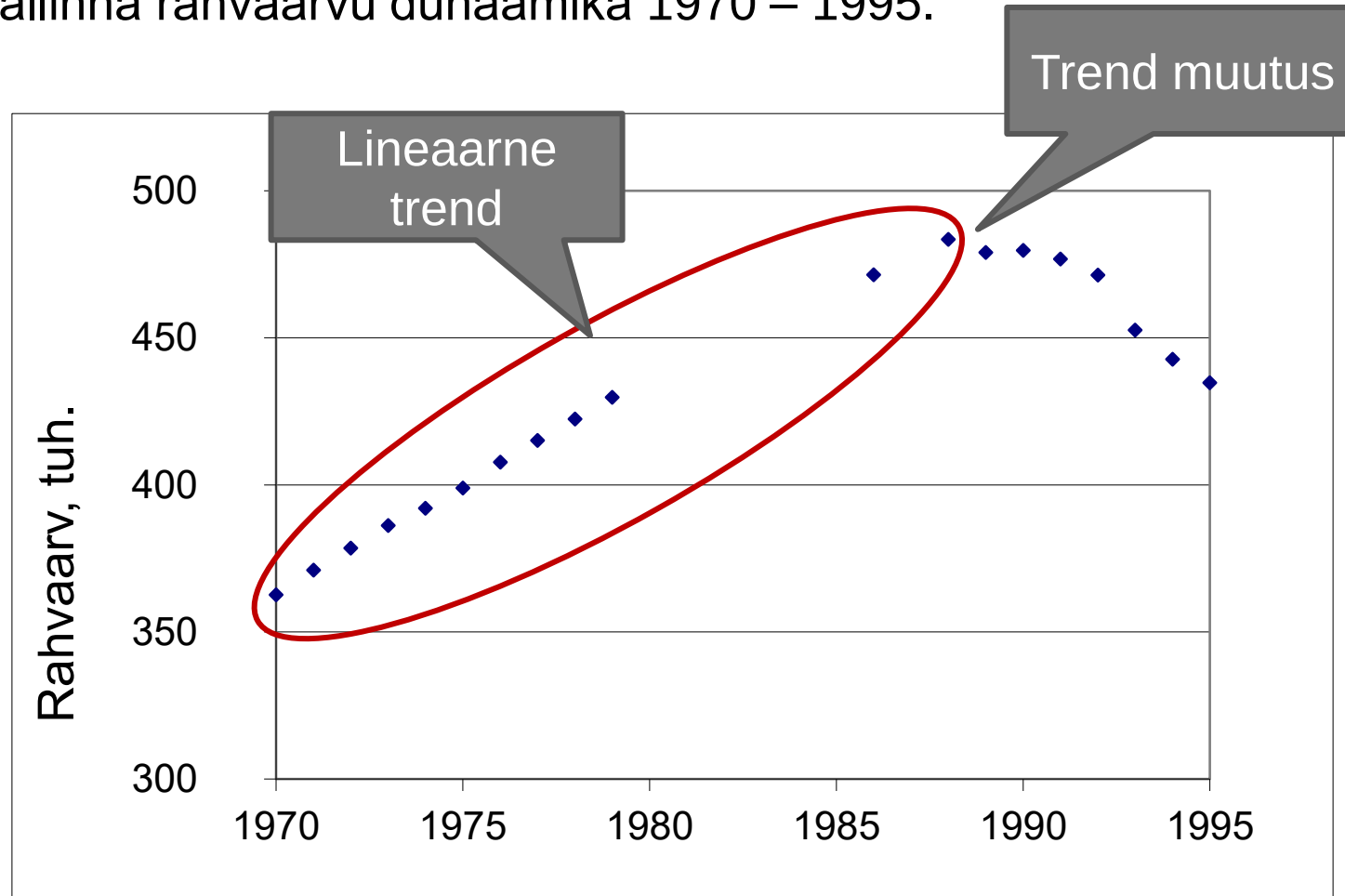
Aasta	t	y
2019	1	
2020	2	
2021	3	
2022	4	
2023	5	
2024	6	

Aasta	Kvartal	t	y
2019	1	1	
	2	2	
	3	3	
	4	4	
2020	1	5	
	2	6	
	3	7	
	4	8	
2021	1	9	

Kuup	t	y
1.01.2025	1	
2.01.2025	2	
3.01.2025	3	
4.01.2025	4	
5.01.2025	5	
6.01.2025	6	
7.01.2025	7	
8.01.2025	8	
9.01.2025	9	

NÄIDE: TALLINNA RAHVAAARV, 1

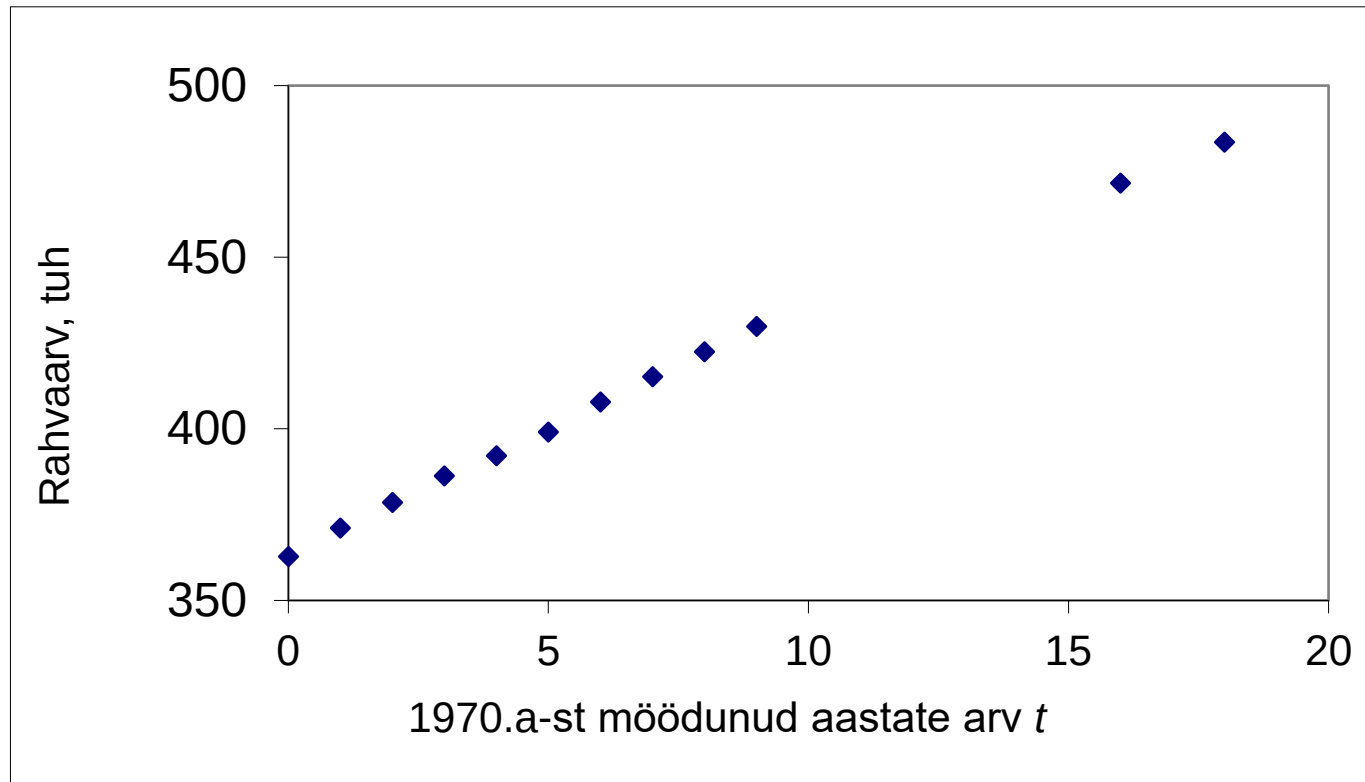
Tallinna rahvaarvu dünaamika 1970 – 1995.



NÄIDE: TALLINNA RAHVAARV, 2

Tallinna rahvaarvu dünaamika 1970 – 1988.

Kasutame lineaarset mudelit $N_t = i t + N_0$ i iive, tuh elanikku aastas

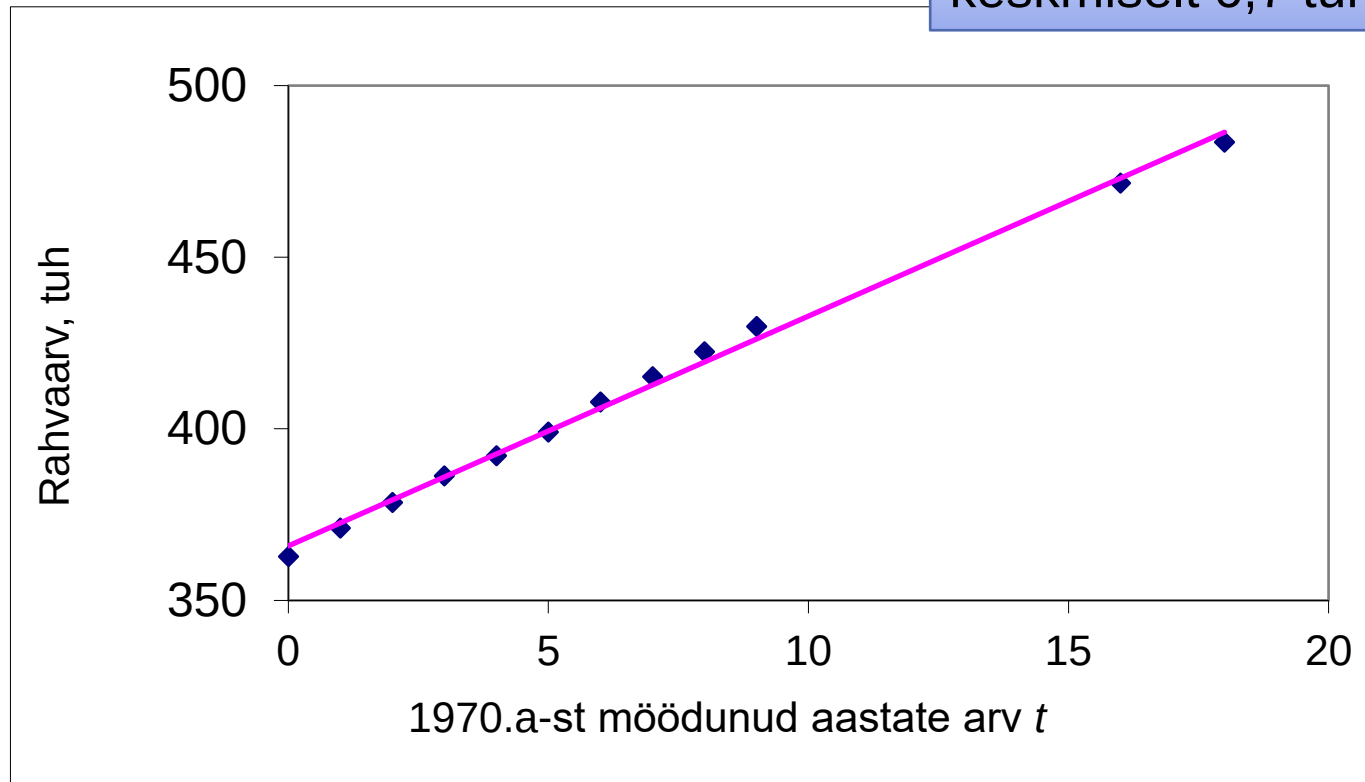


NÄIDE: TALLINNA RAHVAAARV, 3

Tallinna rahvaarvu dünaamika 1970 – 1988.

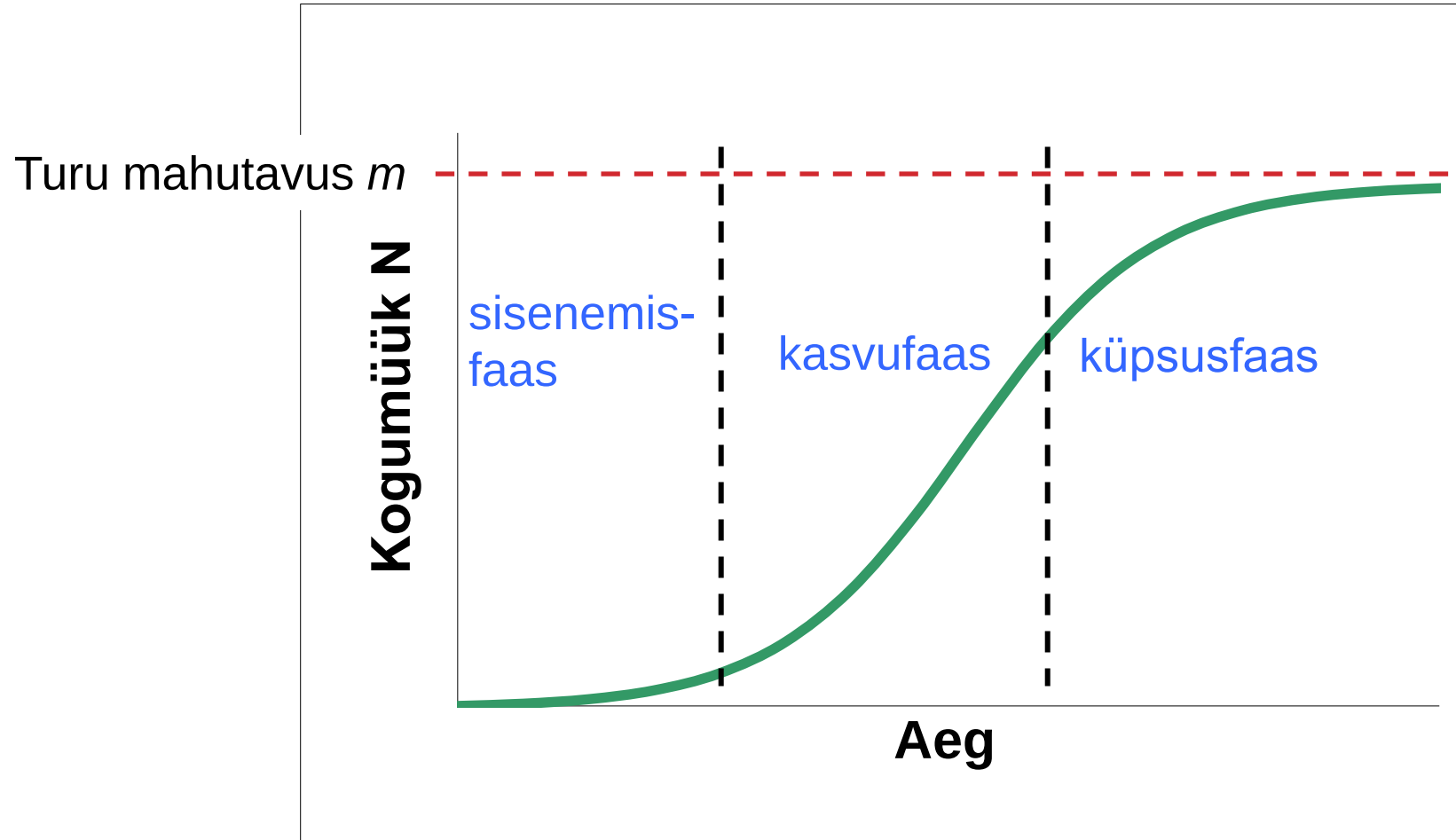
Lineaarne mudel $N_t = 6,7t + 366$

Tallinna rahvaarvu kasv oli neil aastatel keskmiselt 6,7 tuh elanikku aastas.

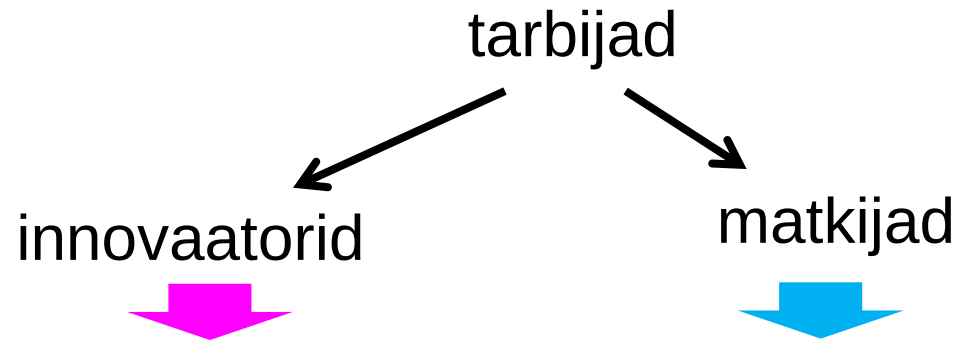


DIFUSIOONIKÕVER

Kirjeldab uue toote või teenuse levikut.



BASSI MUDELI IDEE



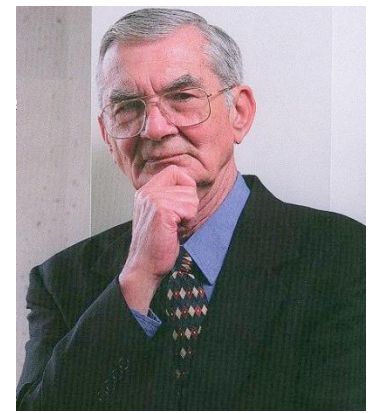
$$N_t - N_{t-1} = (m - N_{t-1}) p + (m - N_{t-1}) \frac{N_{t-1}}{m} q$$

N_t omandamiste arv (kui palju müüdnud) ajahetkeks t

m maksimaalne võimalik arv ehk turu mahutavus

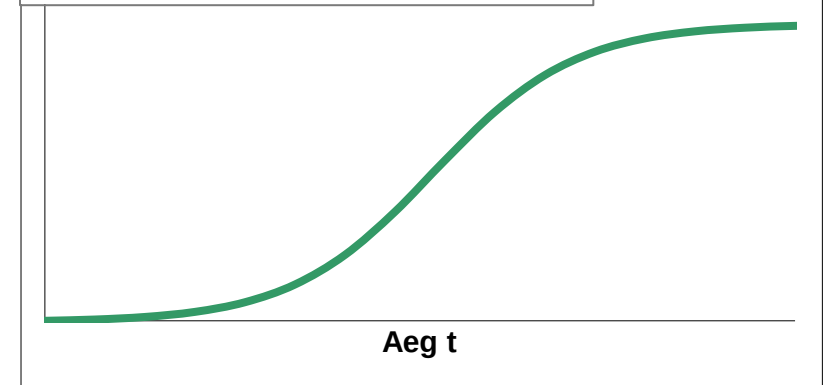
p innovatsioonikoefitsient

q matkimise koefitsient



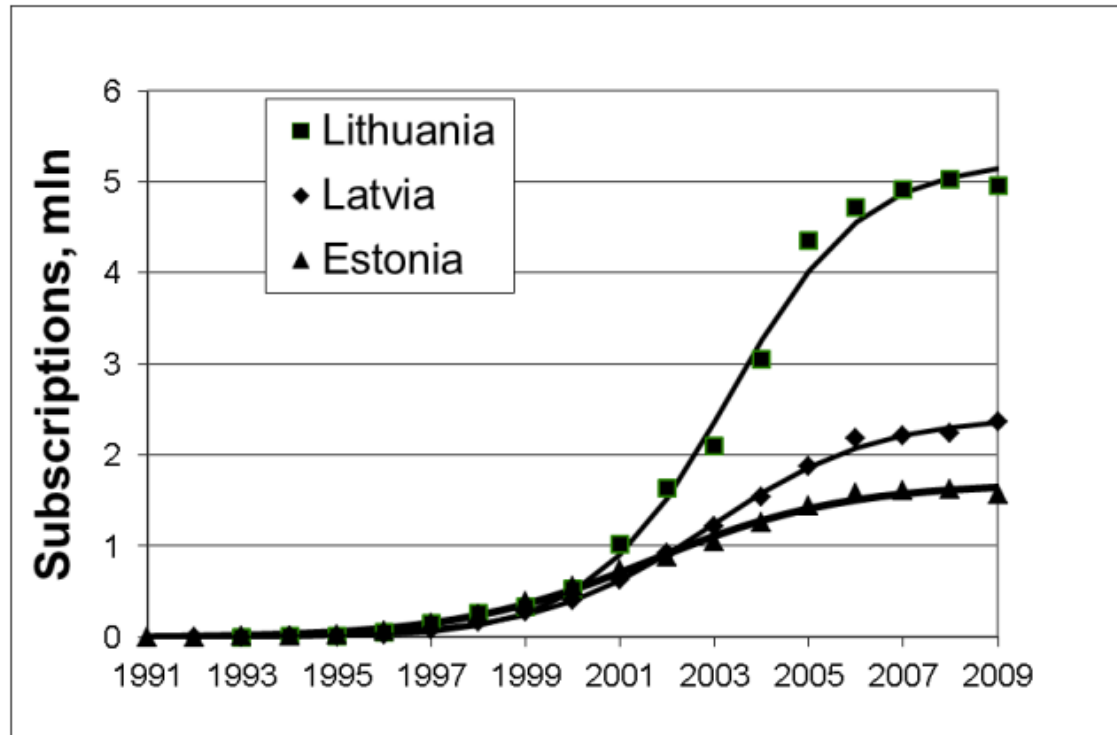
Frank M. Bass
1926-2006

$$\Rightarrow N(t) = m \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}$$

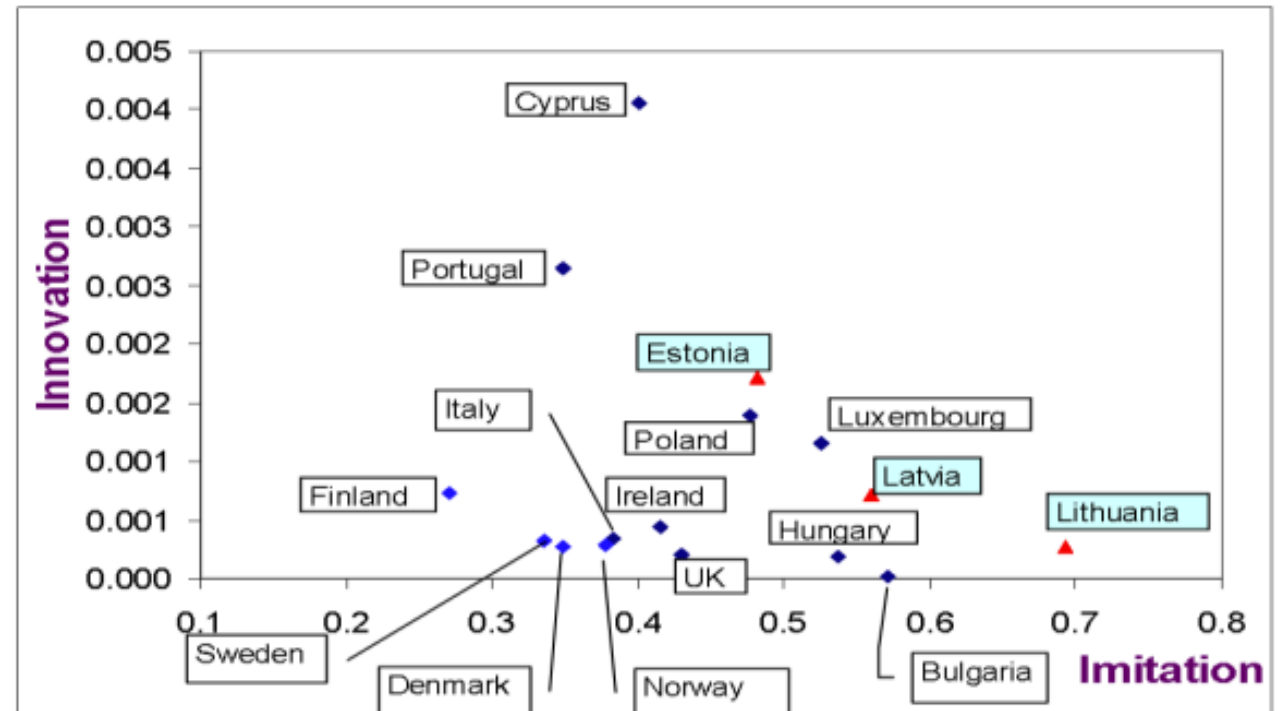


NÄIDE: MOBIILSIDEVÕRGU KLIENDID

Kasutatud Bassi mudelit.



Mobiilsidevõrgu klientide kasv Balti riikides, tegelikud ja mudelväärtused.

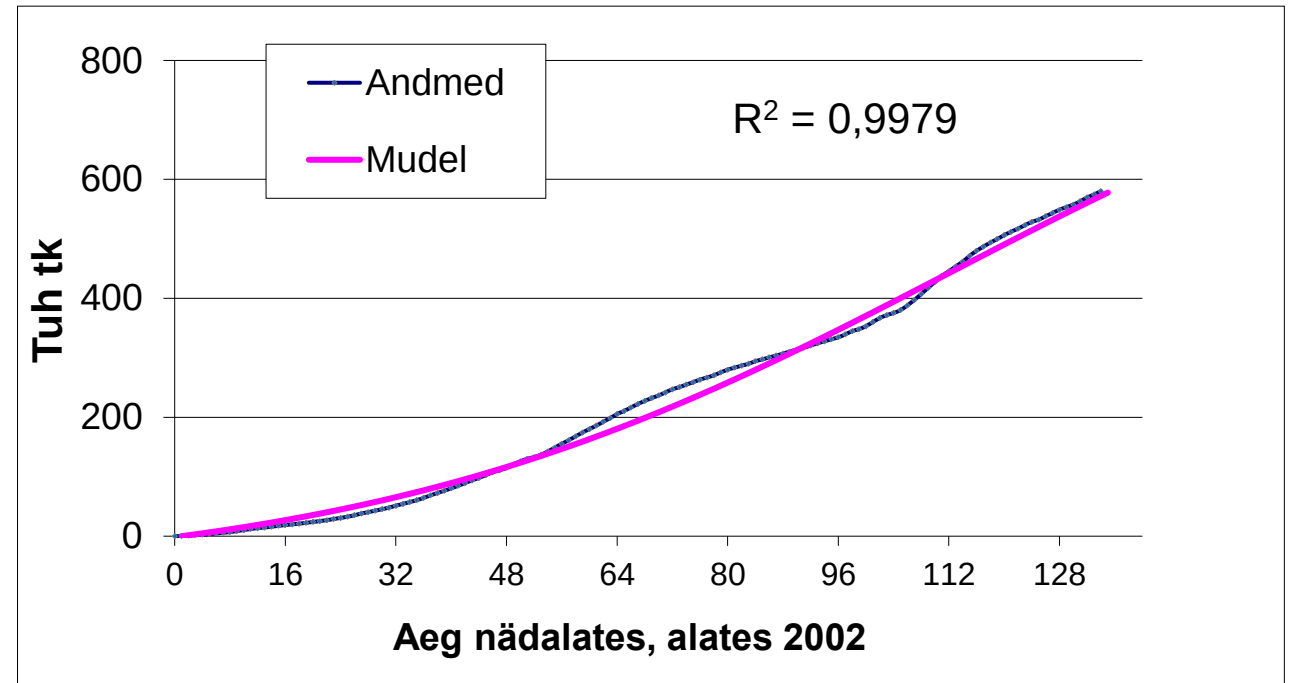


Innovatsiooni- ja matkimise koefitsiendid 16 Euroopa riigi korral. Aluseks mobiilsidevõrgu klientide kasv.

NÄIDE: EESTI ID KAARTIDE VÄLJASTAMINE

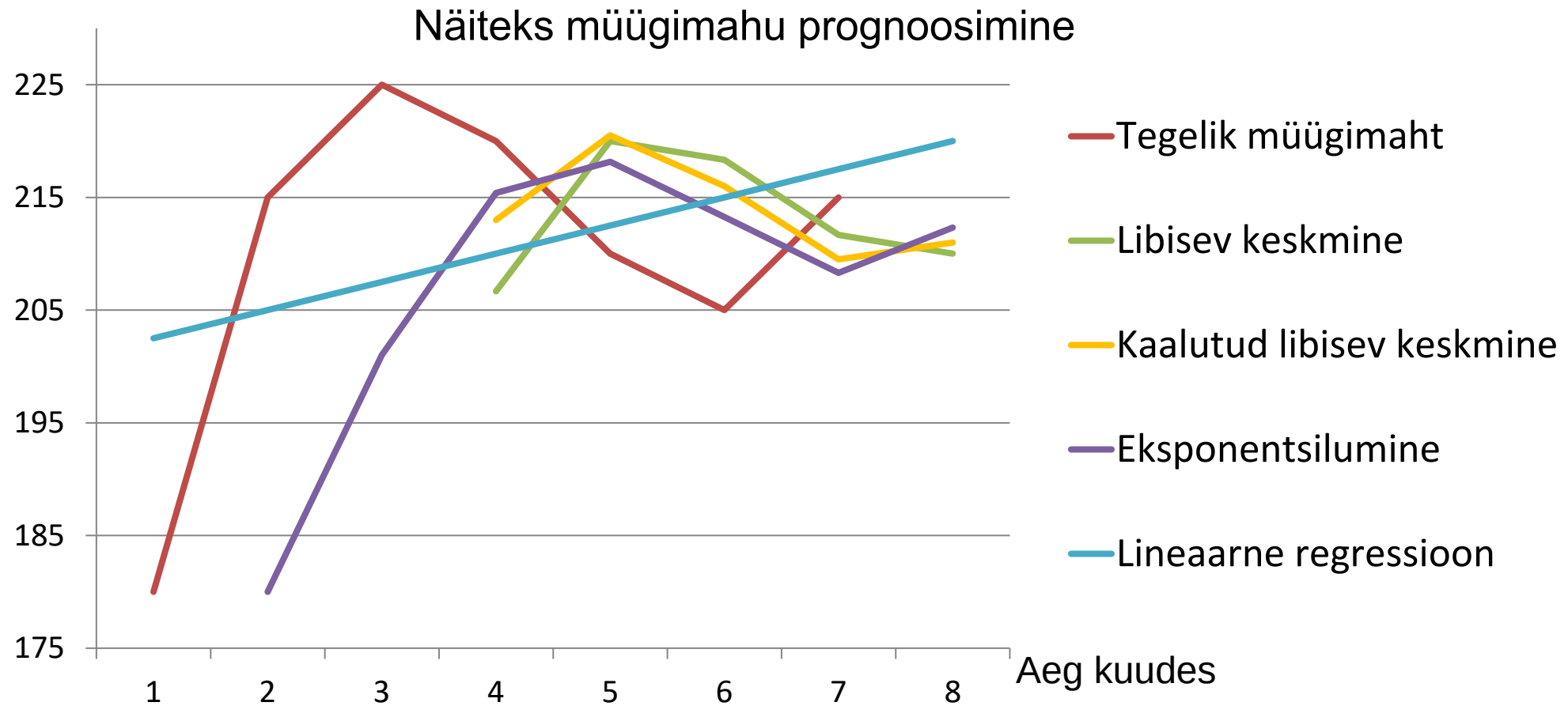
ID kaartide väljastamine 2002-2004 nädalate kaupa. Esimene väljastati 21.01.2002.
Vaatluste arv 136.

Silumiseks ja prognoosimiseks on kasutatud Bassi mudelit.



Kuup	Nädal	Prognoosi pikkus (nädalat)	Prognoos	Tegelik	Prognoosi suhteline kõrvalekalle
25.07.2005	183	48	796652	803916	0,90%
16.02.2006	212	77	870222	900456	3,36%
30.03.2008	323	188	951039	991356	4,07%

NÄIDE: PROGNOOSIMISE ERINEVAD MEETODID



Milline meetod on parim?
Mille järgi võrrelda?

KESKMINE RUUTVIGA

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n u_t^2,$$
$$u_t = y_t - F_t$$

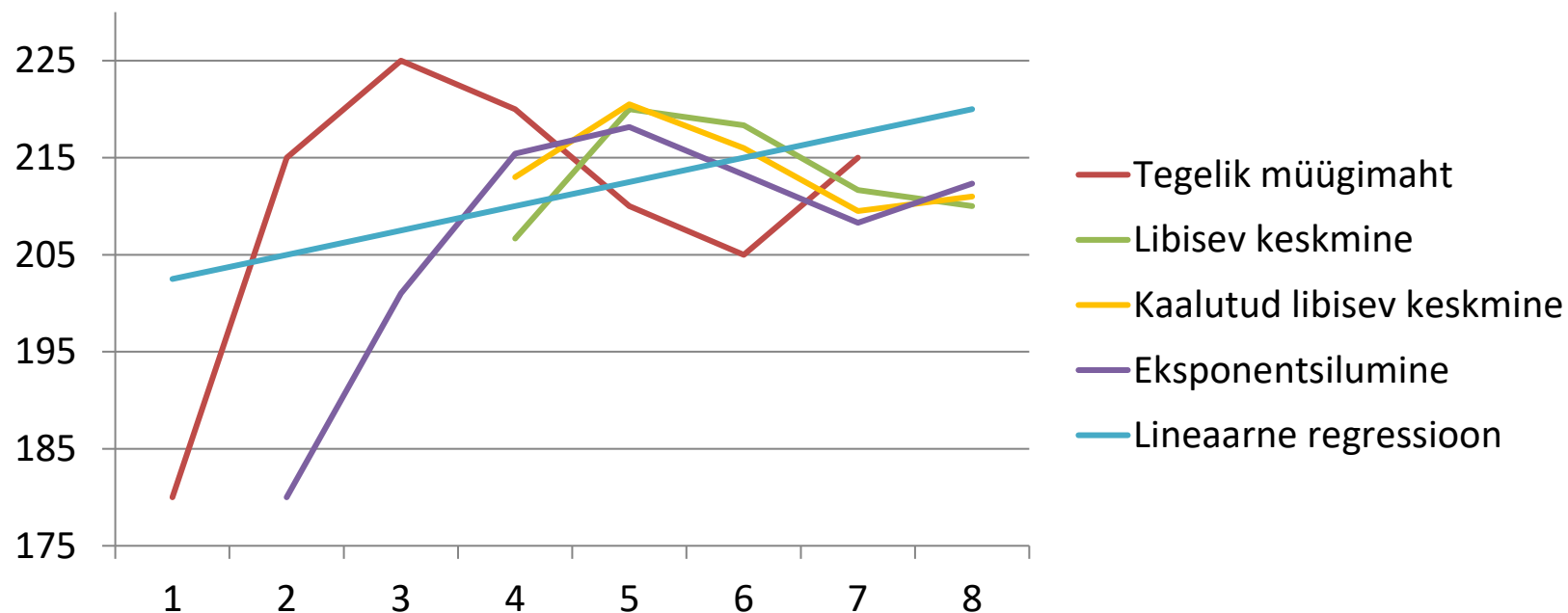
Mean Square Error

Võrreldakse erinevate prognoosimismeetodite keskmist ruutviga.
Väiksem MSE -> parem prognoosimismeetod.

Keskmise ruutvea leidmiseks kasutatakse ühesammulist prognoosimist valimi sees ja prognoose võrreldakse tegelike andmetega.

NÄIDE: MÜÜGIMAHTU PROGNOOSIMINE

Meetod	MSE	Proгноос augustiks
Libisev keskmine	116,67	210
Kaalutud libisev keskmine	77,63	211
Eksponentsilumine	50,21	212
Lineaarne regressioonmudel	53,13	220



KOKKUVÕTE PROGNOOSIMISEST

- Prognoosimiseks võib kasutada erinevaid meetodeid:
 - libisev keskmine
 - erineva sammuga
 - lihtne või kaalutud
 - eksponentsilumine
 - erinev silumiskonstant
 - regressioonjoonega silumine
 - erineva kujuga regressioonjoon
- Erinevate meetodite võrdlemiseks kasutatakse keskmist ruutviga MSE.