

Volatiilsuse modelleerimine

Brooks, Introductory Econometrics for Finance, 4th ed.
Ch. 8. Modelling Volatility and Correlation, 8.1-8.20

Beckett, Introduction to Time Series Using Stata.
Ch 4. Time-varying Volatility

Teemad

- Mittelineaarsed nähtused
- Tinglik dispersioon
- ARCH mudel
 - Mudeli spetsifikatsioon
 - Kitsendused parameetritele
- GARCH mudel
- GARCH mudeli diagnostika
- Prognoosimine
- GARCH mudeli laiendused
 - EGARCH
 - GJR
 - GARCH-X
 - GARCH-M

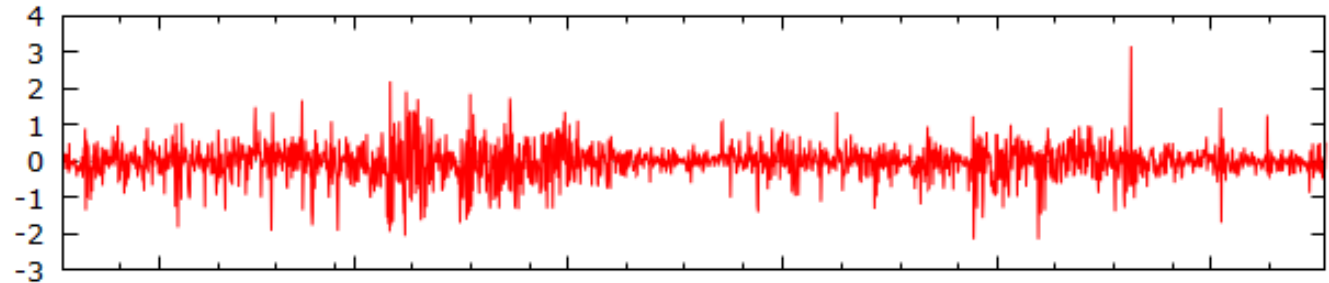
Mis on volatiilsus?

- Volatiilsus on mingi ajas muutuva suuruse väärtuste varieerumine.
 - Enamasti kasutatakse väärtpaberite korral.
- Volatiilsuse arvuliseks määramiseks võib kasutatada erinevaid näitajaid:
 - dispersioon σ^2 (kõige sagedamini);
 - standardhälve σ ;
 - harvemini kvartiilhaare, detsiilhaare.
- Mõned autorid: volatiilsus = standardhälve.
- Korrektne terminoloogia:
 - volatiilsus on nähtus;
 - standardhälve on näitaja, mille abil seda nähtust saab iseloomustada.

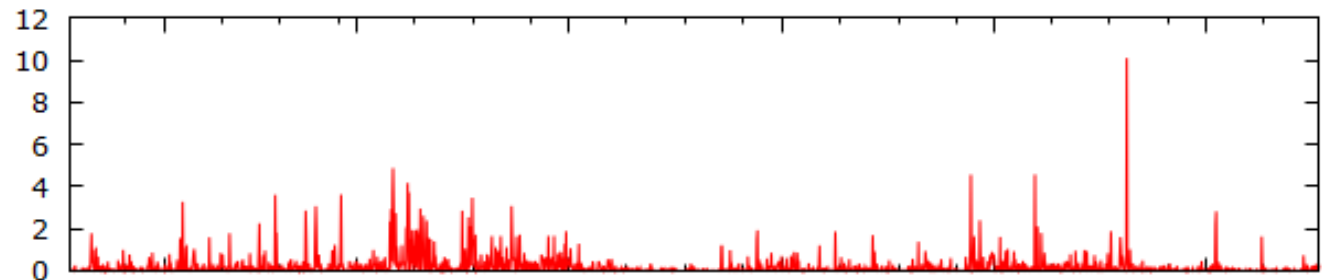
Heteroskedastiivsus ristandmete ja aegridade korral

- Heteroskedastiivsus: dispersioon varieerub.
- Ristandmete ja aegridade korral lähenetakse heteroskedastiivsusele erinevalt.
- Ristandmete korral
 - mudeli spetsifikatsiooni muutmine (mudeli kuju, puuduvate tunnuste lisamine mudelisse);
 - kaalutud vähimruutude meetod;
 - kohandatud standardvead.
- Aegridade analüüsil moodustavad muutuva dispersiooni väärtused ka aegrea.
 - Seda aegrida püütakse modelleerida.

Y_t aegrida



Y_t dispersiooni aegrida

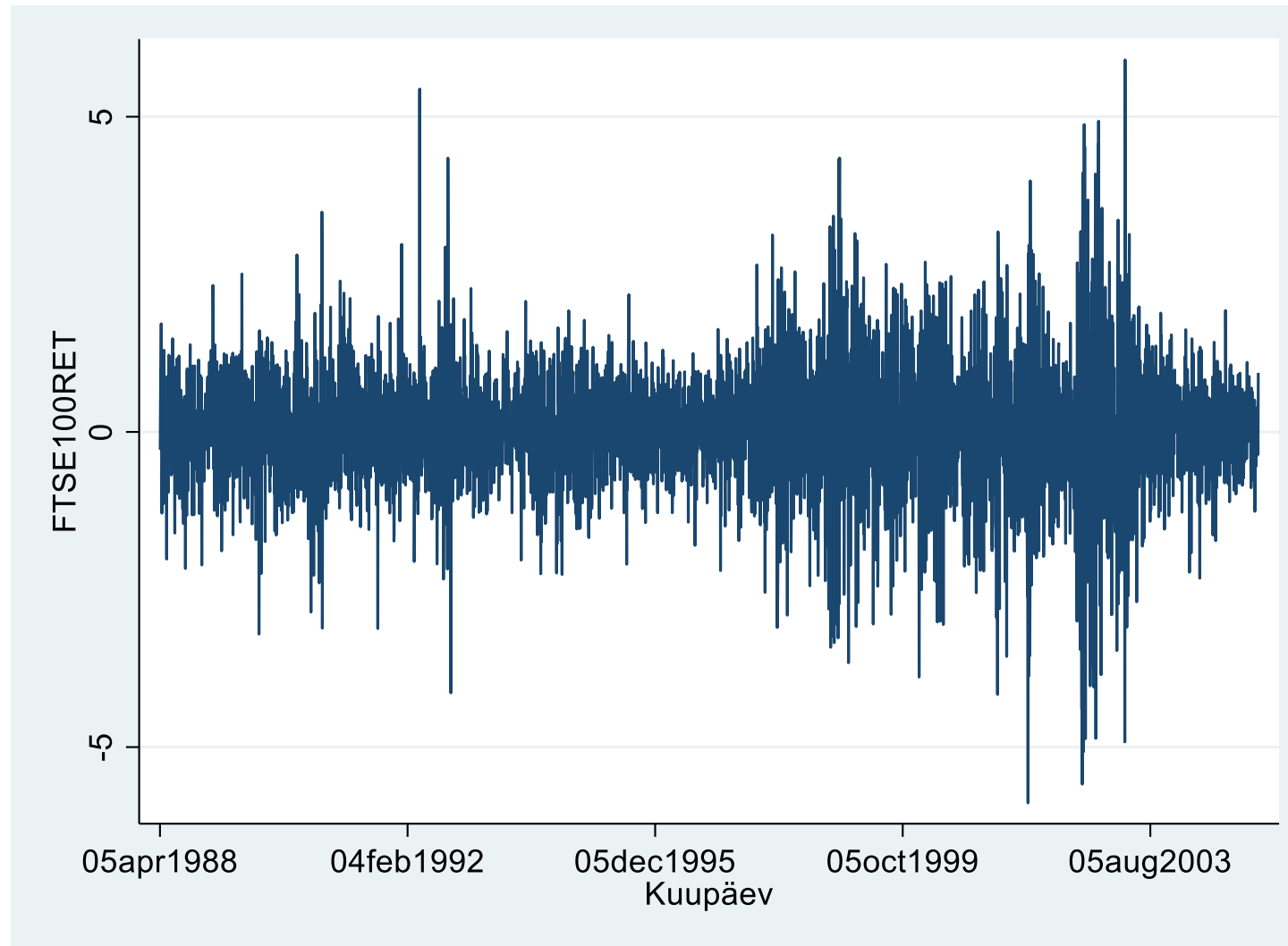


Mittelineaarsed nähtused

- Vaadeldud ARMA mudelid olid lineaarsed.
- Lineaarsete mudelite abil ei saa seletada järgmisi nähtusi:
 - volatiilsuse kuhjumine (*volatility clustering*)
Finantsturgudel: suurtele tulumääradele järgnevad suured tulumäärad ja väikestele väikesed.
 - teravatipuline jaotus (*leptokurtosis*), paksud sabad (*thick tails*)
Püstakus võib olla kuni 50.
 - finantsvõimenduse efekt (*leverage effect*), mis väljendub asümmeetrias.
Võib esineda negatiivne korrelatsioon tulumäära ja volatiilsuse vahel. Näit aktsiahinna languse mõju järgneva perioodi volatiilsusele on suurem kui aktsiahinna tõusu mõju.

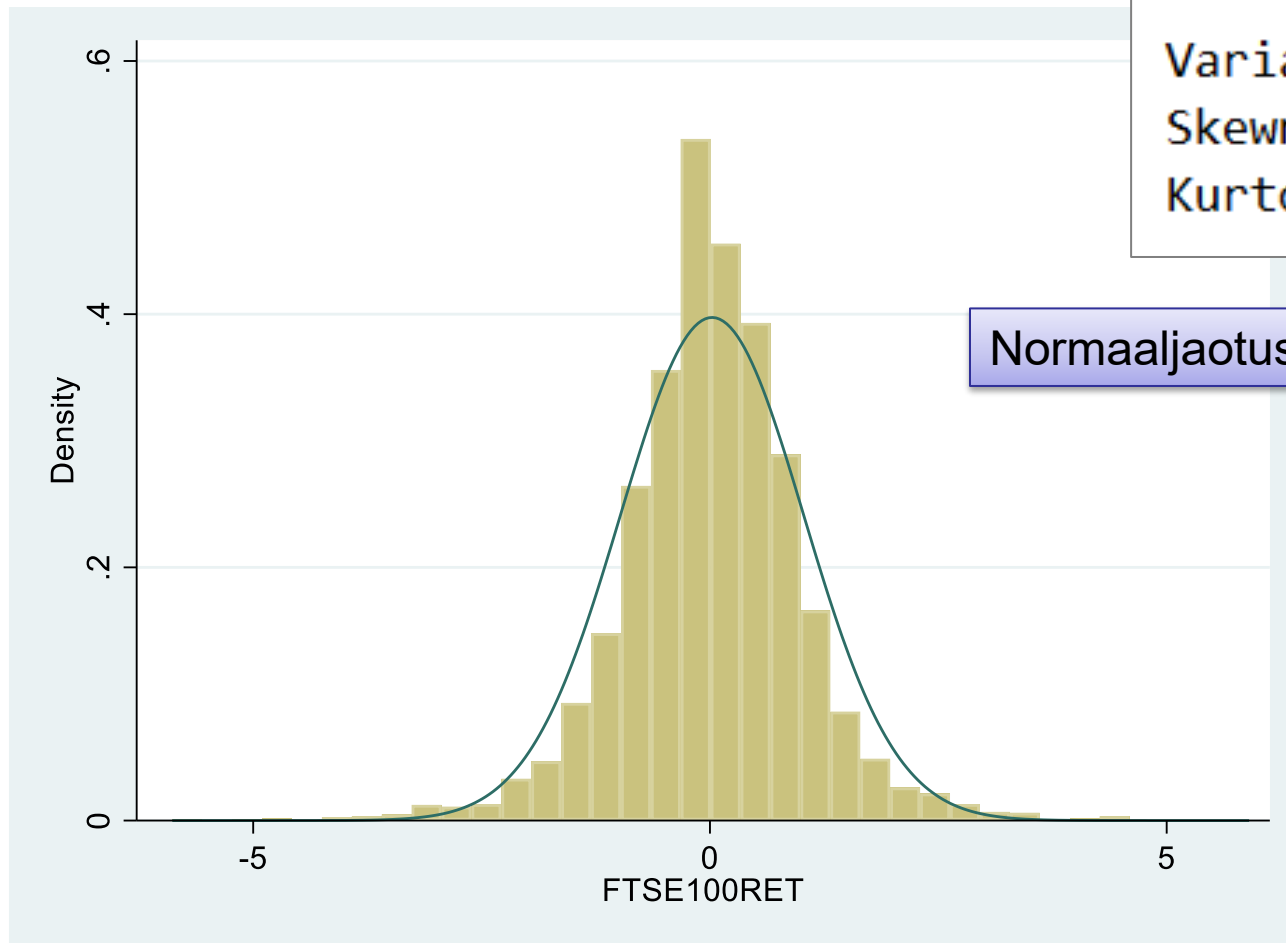
NÄIDE: volatiilsuse kuhjumine

Indeksi FTSE100 logaritmiline tulumäär 5. apr 1988 - 6. apr 2005, kokku 4437 vaatlust.



NÄIDE: teravatipuline jaotus

Indeksi FTSE100 logaritmiline tulumäär



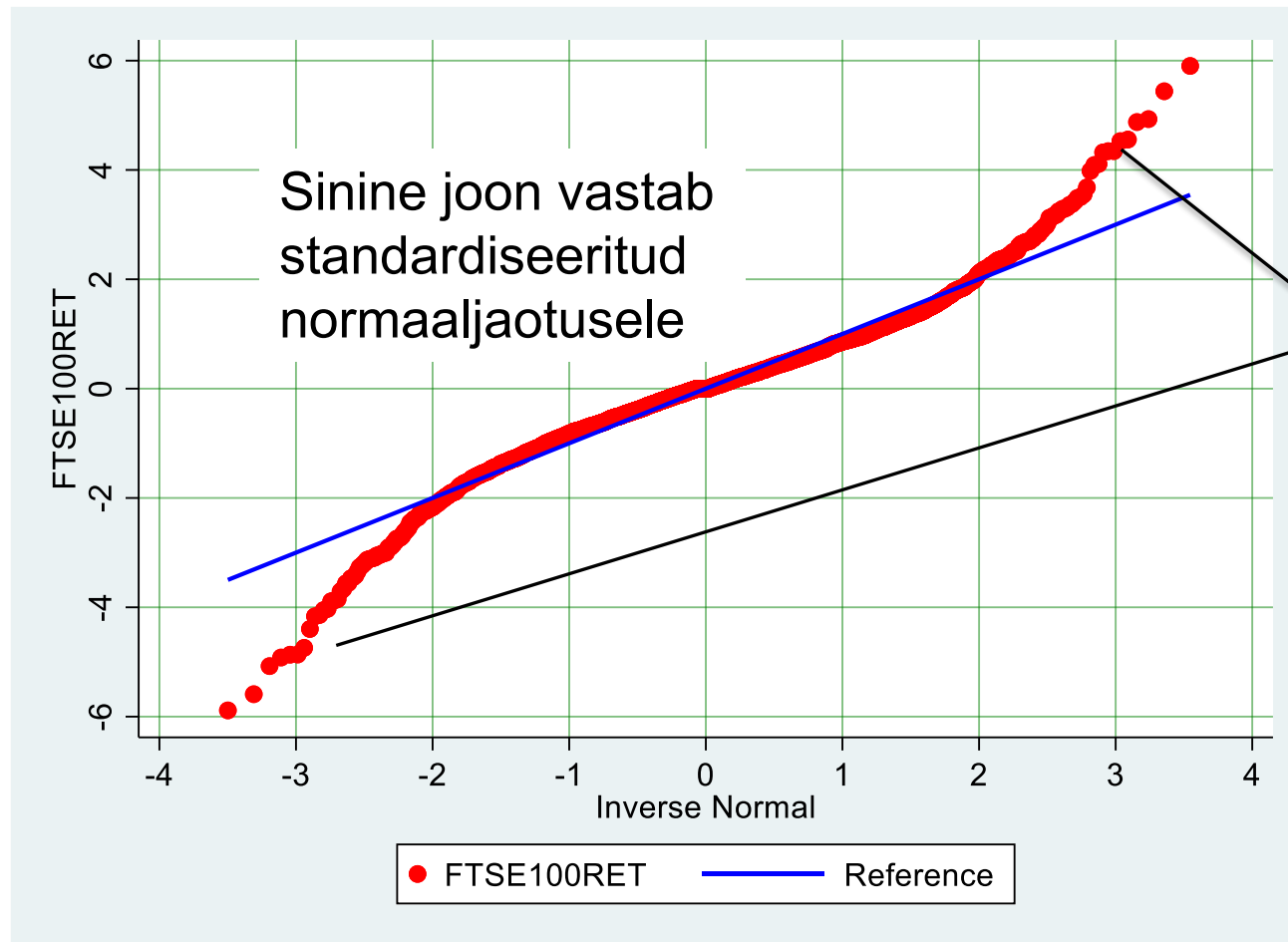
Mean	.0235038
Std. dev.	1.003832
Variance	1.007679
Skewness	-.1172909
Kurtosis	6.235883

Normaaljaotuse korral püstakus = 3.

NÄIDE: erinevus normaaljaotusest

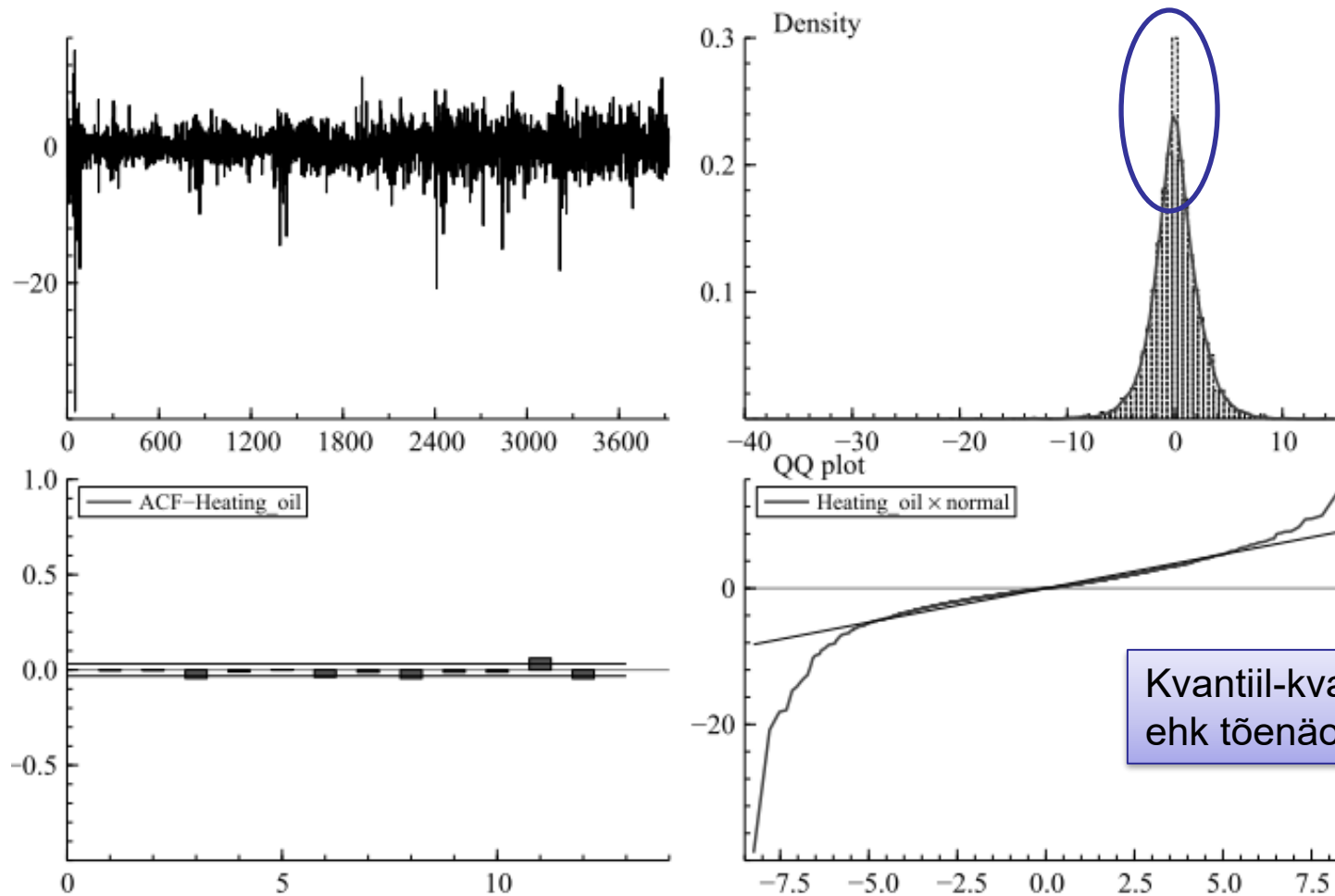
Indeksi FTSE100 logaritmiline tulumäär

Kvantiil-kvantiil diagramm ehk tõenäosuspaber (*Q-Q plot, quantiles plot*)



Ekstreemselt suuri ja ekstreemselt väikseid väärtusi leidub rohkem kui normaaljaotuse korral peaks esinema (jaotusel on liiga paksud sabad).

NÄIDE: kütteõli hind 1990-2005, NYME



	Heating oil
Minimum	-39.09
Maximum	13.99
Mean	0.016
Stand. dev.	2.38
Skewness	-1.75
Kurtosis	27.40

Kvantiil-kvantiil diagramm
ehk tõenäosuspaber

Väärtpaberite tulumäärade aegridade volatiilsuse tüüpiline iseloom

- Eksisteerib volatiilsuse kuhjumine: teatud perioodidel on volatiilsus suur ja teistel perioodidel väike.
- Volatiilsuse järsud hüpped esinevad harva, enamasti on volatiilsuse muutus ajas pidev.
- Volatiilsus ei haju lõpmatuks, on statsionaarne.
- Volatiilsus reageerib erinevalt hindade kasvule ja kahanemisele.

Volatiilsuse mudelite arendamisel tuleb arvestada nende omadustega.

Mittelineaarne mudel üldiselt

Campbell, Lo ja MacKinlay defineerisid mittelineaarse andmeid genereeriva protsessi üldiselt nii

$$y_t = f(u_{t-1}, u_{t-2}, \dots)$$

kus vealiige u_t on *iid* ja f on mingi mittelineaarne funktsioon.

Nad andsid ka veidi spetsiifilisema definitsiooni, kus keskväärtuse ja dispersiooni sõltuvus on lahku löödud

$$y_t = g(u_{t-1}, u_{t-2}, \dots) + u_t \sigma^2(u_{t-1}, u_{t-2}, \dots)$$

$g(\bullet)$ keskväärtuse sõltuvus mittelineaarne (*non-linear in mean*)

$\sigma^2(\bullet)$ dispersiooni sõltuvus mittelineaarne (*non-linear in variance*)

Mittelineaarsed mudelid

- Autoregressiivne tingliku heteroskedastiivsusega mudelid ARCH, GARCH (*Autoregressive conditional heteroskedastic model*).
- Muud mudelid
 - Bilineaarne mudel BL (*bi-linear model*).
 - Eksponentsiaalne autoregressiivne mudel EAR (*exponential autoregressive model*).
 - Lävendiga autoregressiivne mudel TAR (*Threshold autoregressive model*).
 - Sujuva lävendiga autoregressiivne mudel STAR (*Smooth threshold autoregressive model*).
 - Autoregressiivne mudel ajas muutuvate kordajatega (*with time-dependent coefficients*).
 - Segatud mittelineaarsed mudelid BL-ARCH, STAR-ARCH (*Mixed non-linear model*).

Volatiilsuse prognoosimise võimalused

- Minevikuandmete põhjal (*historical volatility*).
 - Ajalooline keskmine HAC (*historical average model*). Minevikuandmete põhjal leitakse aegrea standardhälve ja see on standardhälbe prognoosiks.

$$\hat{\sigma}_{t+1} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sigma_t$$

- Lihtne libisev keskmine SMA (*simple moving average*), $\hat{\sigma}_{t+1} = \frac{1}{\tau} \sum_{i=0}^{\tau-1} \sigma_{t-i}, \quad \tau < t$
 - Kaalutud libisev keskmine (*weighted moving average*) WMA.
 - Eksponentsiaalne silumine ES (*Exponential smoothing*).
- Rakendatud volatiilsus (*implied volatility*).
 - Optsioonide korral nt Black-Scholes hinnamudelist tuletatud.
- Autoregressiivsed volatiilsuse mudelid ARCH.
- Muud mudelid.

Probleem dispersiooni leidmisega, I

Dispersiooni väärtused σ_t^2 pole otseselt vaadeldavad.

Kui soovime leida standardhälbe väärtusi mingil ajaperoodil, tuleb kasutada väiksema perioodiga (suurema sagedusega) andmeid.

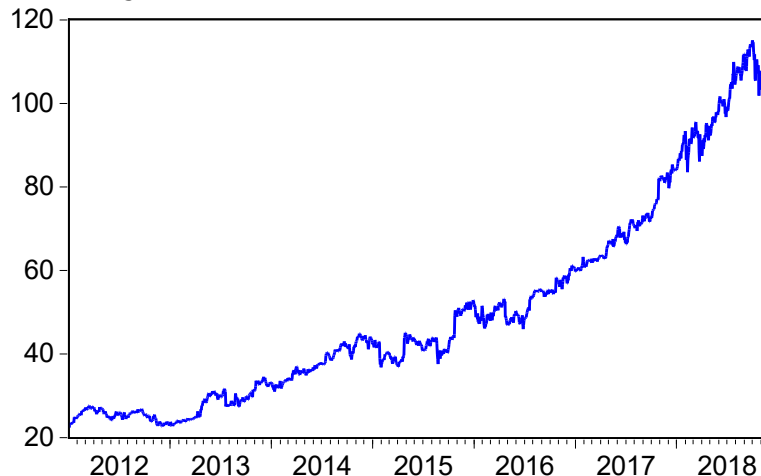
Näiteks kui soovime suuruse y standardhälvet kuus, siis peame kasutama y_t päevaseid andmeid

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}$$

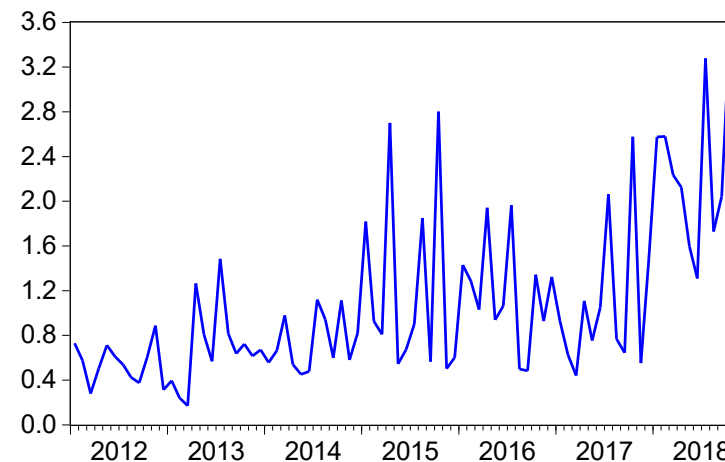
T on päevade arv kuus,
 $\bar{y}$ on T päeva keskmine.

Näiteks

Microsofti aktsia hind päevas
3. jaan 2012 – 21. nov 2018



Aktsia hinna standardhälve kuus
jaan 2012 – nov 2018



Probleem dispersiooni leidmisega, II

Sageli on raske leida väiksemat ajaakent (*time frame*), üle mille keskmistada ja summeerida.

Siis tuleb kasutada teistsugust lähenemist.

Näiteks y aegrida, päevased andmed. Soovime leida päevast dispersiooni.

Lähtume dispersiooni valemist

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2$$

Kui $\bar{y} = 0$ saame

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t^2$$

NB! Mudeli jääkliikmete jaoks
see tingimus kehtib,
 $\bar{u} = 0$

Meil on vaid üks väärtus: ajahetkel t , järelikult summeerimist ei toimu.

Järelikult dispersiooniks võime võtta

$$\hat{\sigma}_t^2 = y_t^2$$

Mudeli jääkliikmete u_t korral

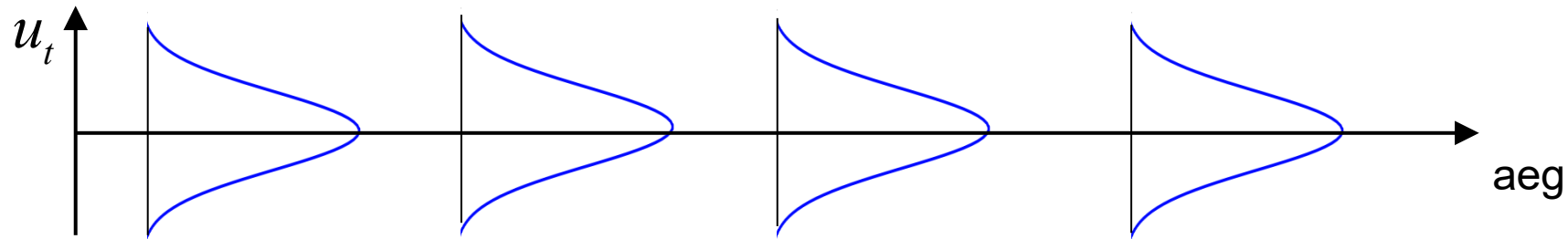
$$\hat{\sigma}_t^2(u_t) = u_t^2$$

TINGLIK DISPERSIOON

Tingimusteta ja tinglik dispersioon

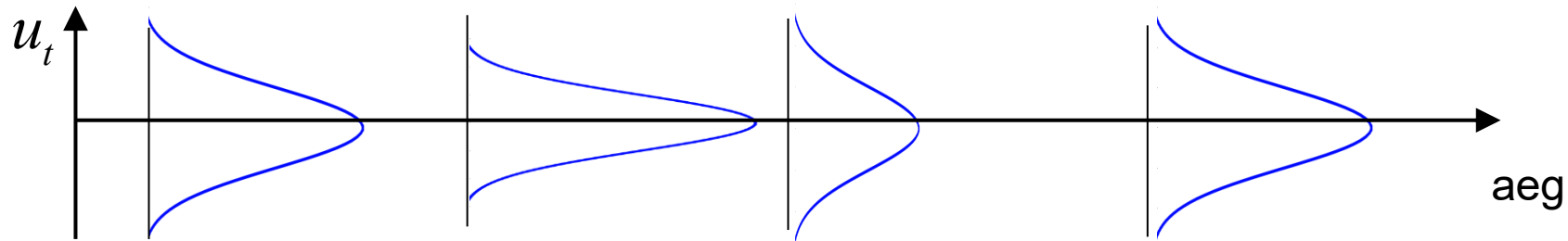
Juhusliku suuruse u_t tingimusteta (*unconditional*) dispersioon ehk nõ "tavaline" dispersioon

$$\text{Var}(u_t) = \sigma^2 \quad \text{on ajas konstantne}$$



Tinglik dispersioon (*conditional variance*) on leitav mingil ajahetkel t , kui on teada mingi suuruse X eelmised väärtused ja dispersioon sõltub nendest.

$$\text{Var}(u_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots) = \sigma_t^2 \quad \text{on ajas muutuv}$$



Tinglik dispersioon ja eksogeenne tunnus

$$y_t = u_t x_{t-1}$$

u_t valge müra, konstantse dispersiooniga σ^2

x_t mingi eksogeenne tunnus, mis üldiselt sõltub ajast

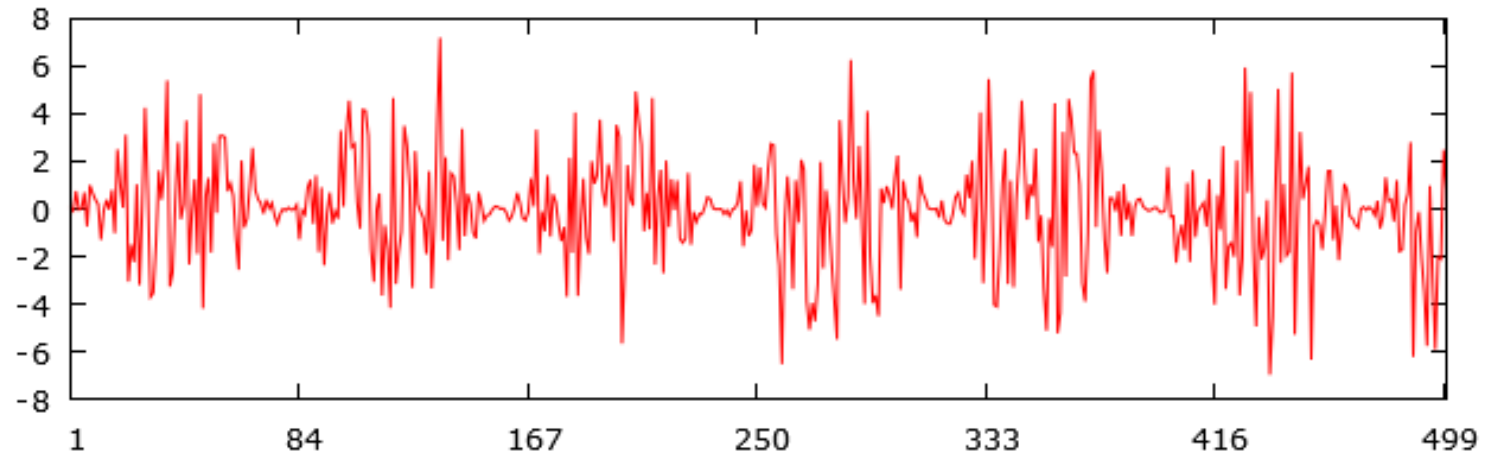
Kui $x_{t-1} = x_{t-2} = \dots = \text{const}$ siis on y konstantse dispersiooniga.

Kui $x_t \neq \text{const}$ siis y_t dispersioon sõltub eksogeense tunnuse viitajast x_{t-1}

Tinglik dispersioon $Var(y_t | x_{t-1}) = x_{t-1}^2 \sigma^2$

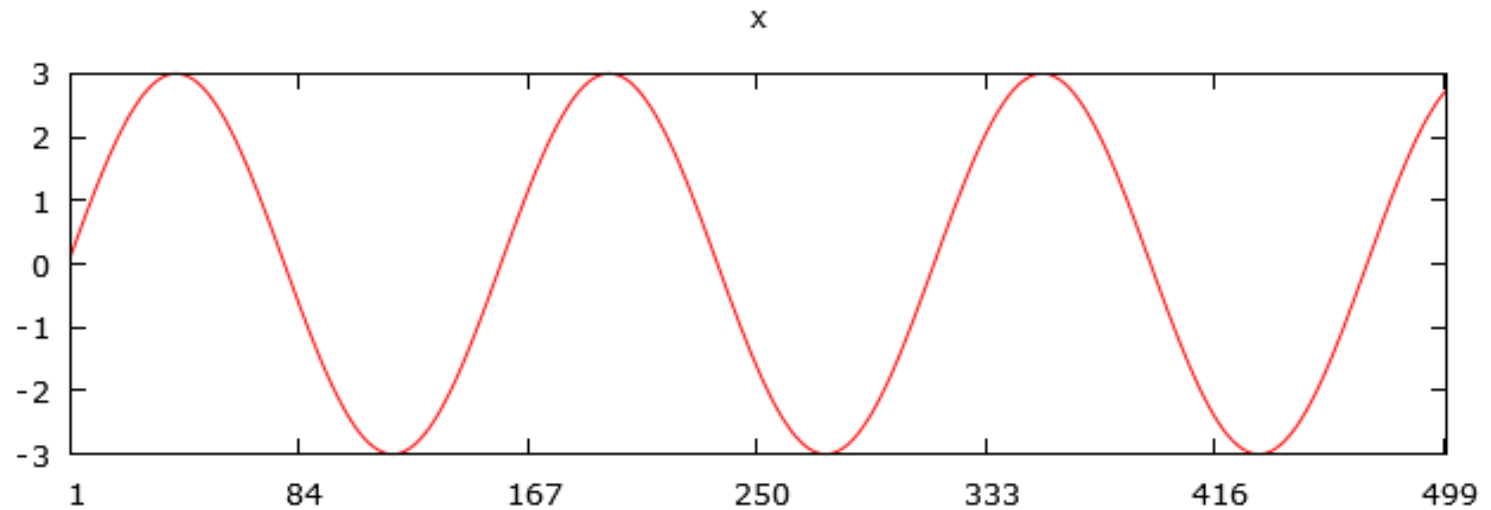
Tinglik dispersioon ja eksogeenne tunnus: simulatsioon I

$$y_t = u_t x_{t-1}$$



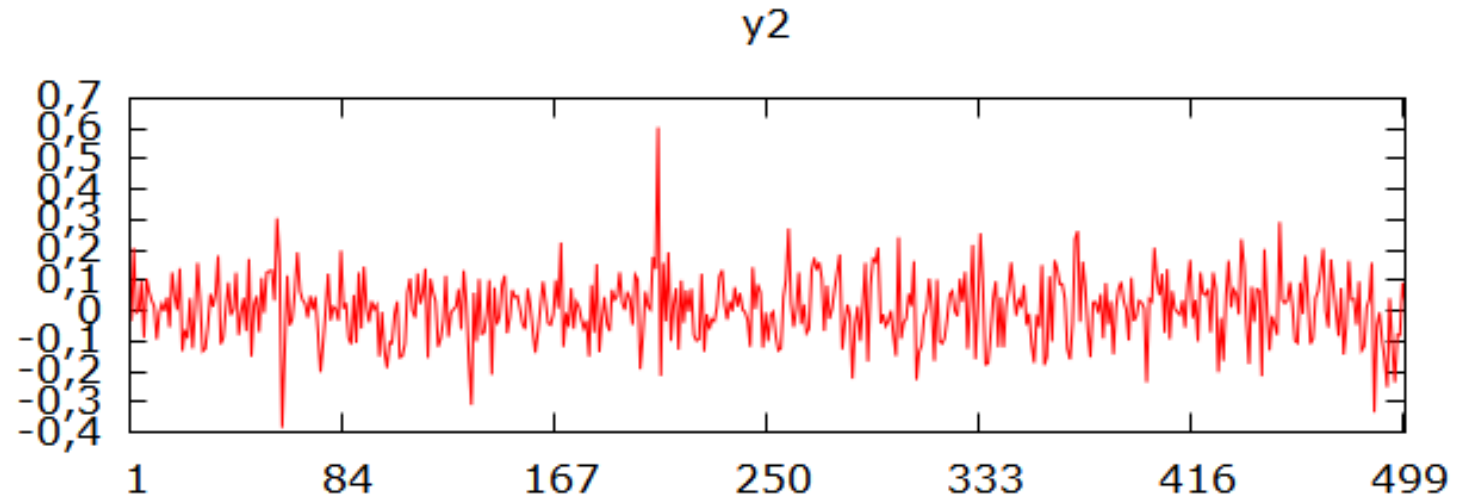
Eksogeenne tunnus

$$x_t = 3 \sin(0,04t)$$

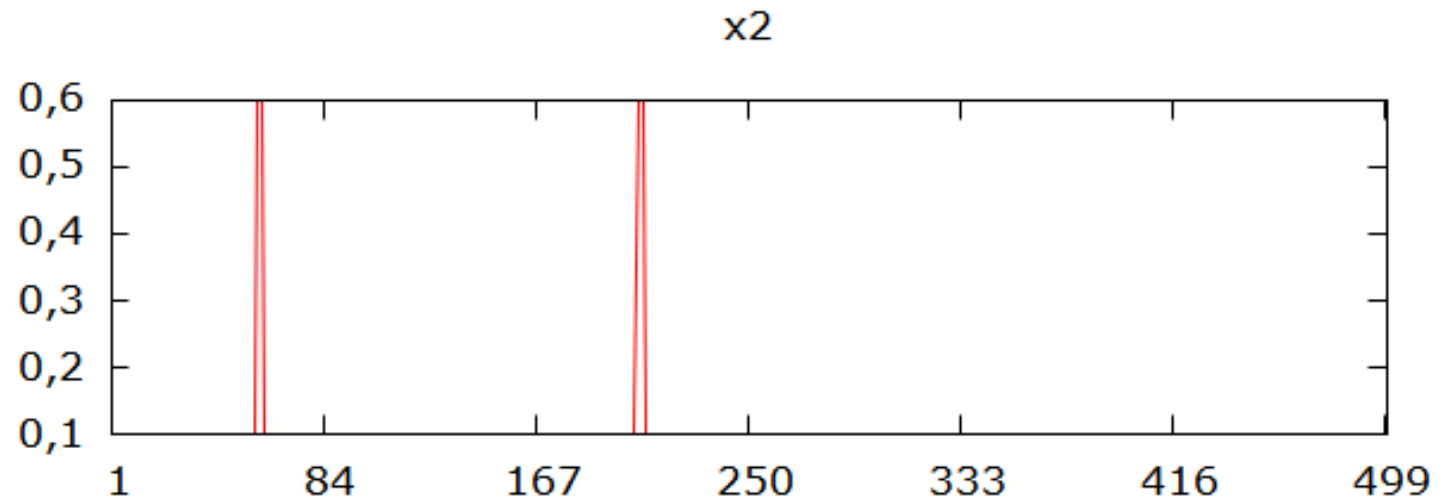


Tinglik dispersioon ja eksogeenne tunnus: simulatsioon II

$$y_{2t} = u_t x_{2t-1}$$



Eksogeenne tunnus x_{2t}
omab üksikuid impulsse



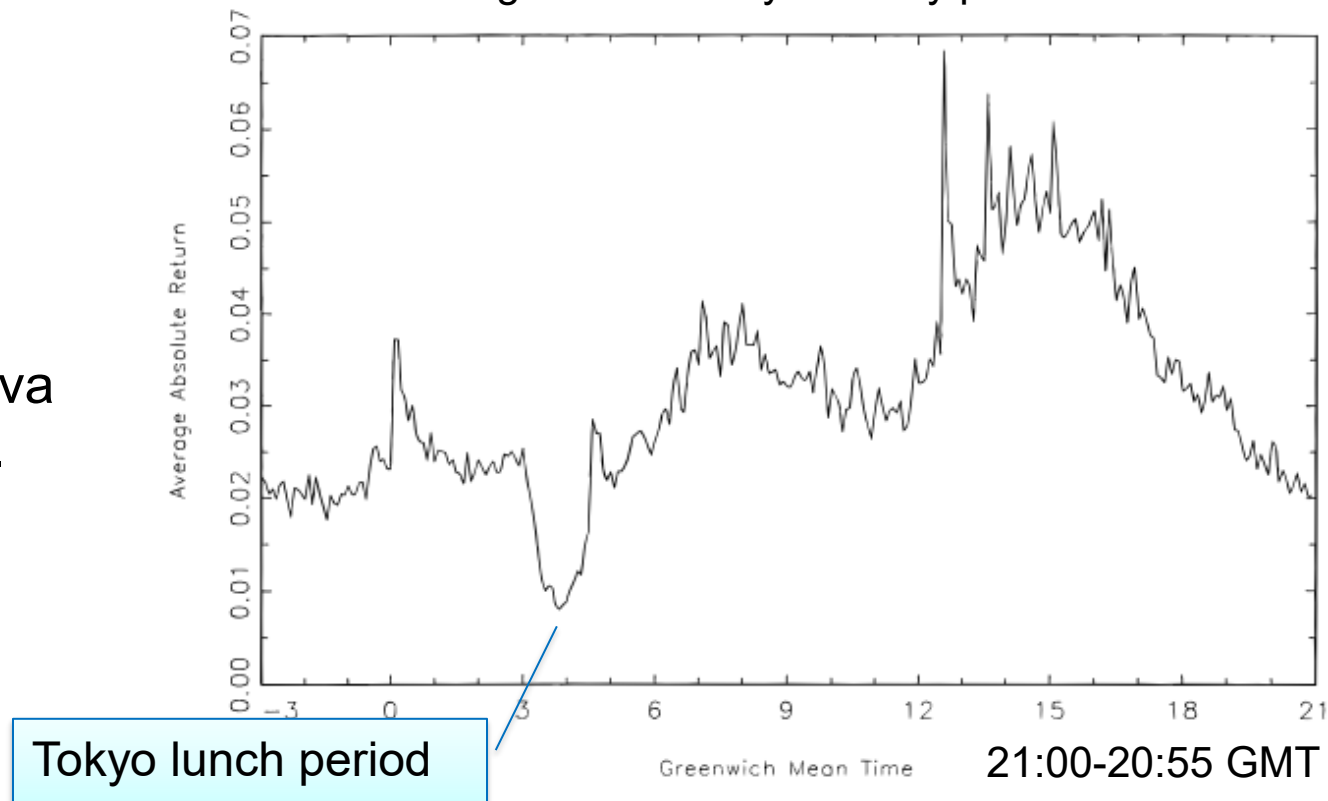
NÄIDE: eksogeensete tunnuste mõju I

Andersen and Bollerslev (1988) analüüsisid DEM ja USD kurssi 1. okt 1992 – 30. sept 1993, 5 minutiliste intervallidega.

Volatiilsusel esinevad kalendaarsed efektid.

Näiteks kursi kõikumine päeva lõikes, 260 päeva keskmine.

Figure 3 Intraday volatility pattern



Andersen, T. G. & Bollerslev, T. (1998), Deutsche Mark-Dollar Volatility: Intraday Activity Patterns, Macroeconomic Announcements, and Longer Run Dependencies. *The Journal of Finance*, Blackwell Publishers, Inc., Vol. 53 , 219-265

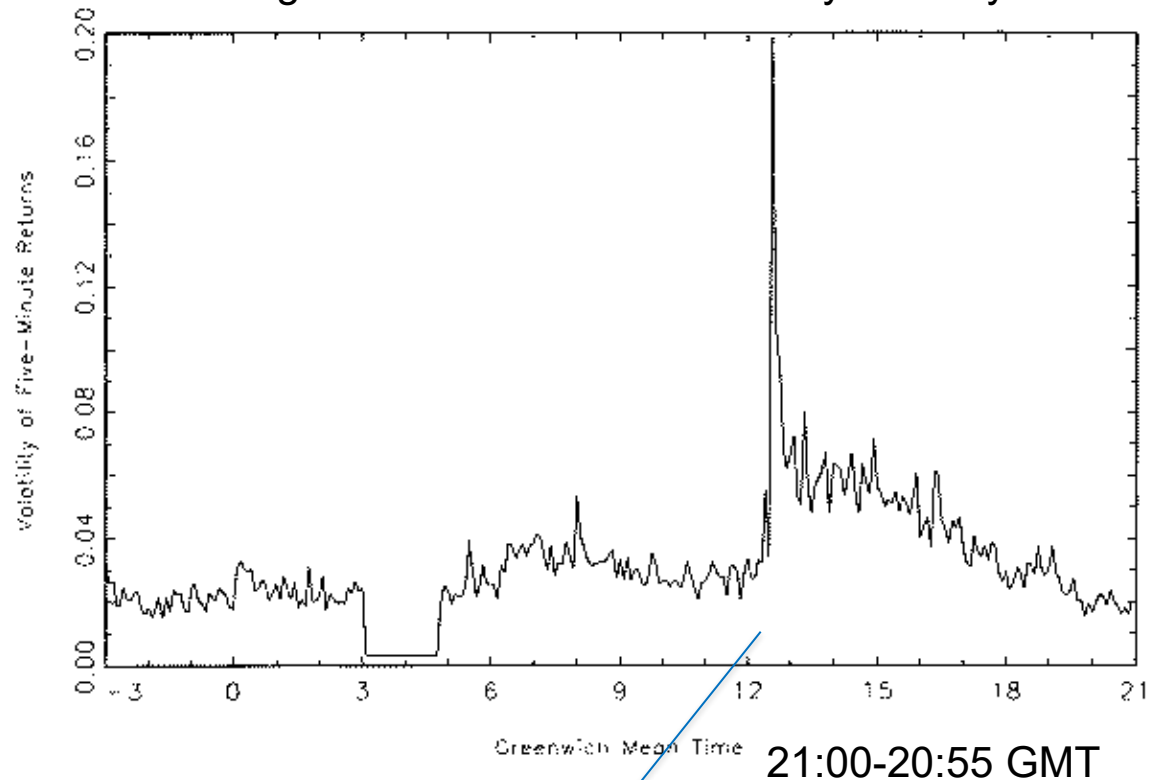
NÄIDE: eksogeensete tunnuste mõju II

Andersen and Bollerslev (1988) analüüsisid DEM ja USD kurssi 1. okt 1992 – 30. sept 1993, 5 minutiliste intervallidega.

Volatiilsus suureneb USA makroökonomika andmete avaldamisel.

Näiteks kursi kõikumine päeva lõikes nendel päevadel, kui avaldati USA makroökonomika andmeid (*Employment Report, Producer Price Index, Retail Sales, GDP* jt)

Figure 6 US announcement day volatility



8:30 Eastern Standard Time

Eksogeenne tunnus: puudus

Eksogeense tunnuse puudus:
peab valima, mis majandussuurus on X ,
st mis põhjustab Y dispersiooni varieerumise.

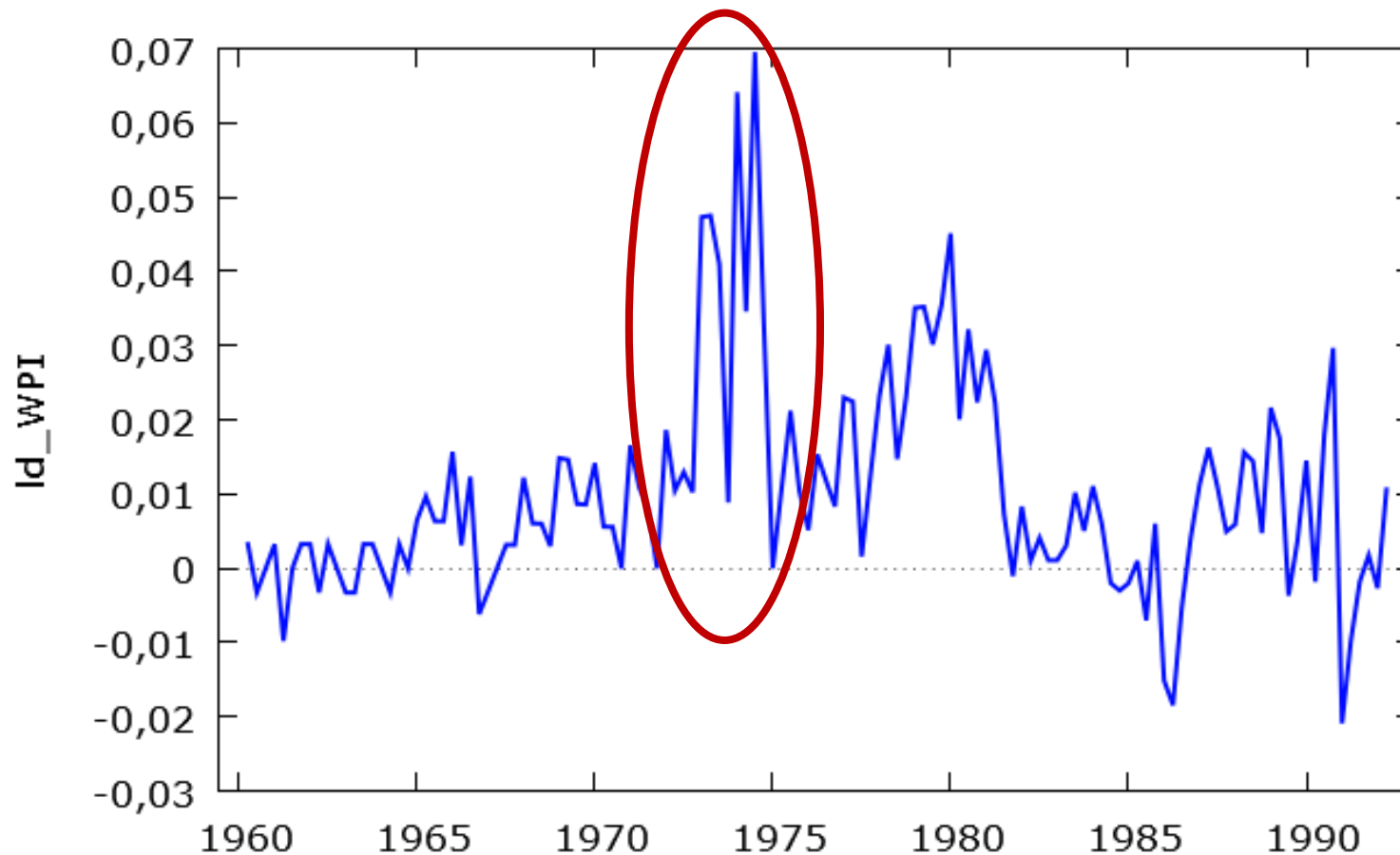
Tihti puudub teoreetiline põhjendus mingi eksogeense tunnuse X valikuks erinevate kandidaatide hulgast.

NÄIDE: USA hulгимүүgi hinnaindeks

USA hulгимүүgi hinnaindeks (*wholesale price index*), kvartaalsed andmed 1960:1-1992:2

Mis põhjustas suure varieeruvuse 1970-ndate keskel?

Naftahinna šokid? Rahapoliitika muutus? Miski muu?



ARCH MUDEL

Autoregressiivne tingliku heteroskedastiivsusega protsess üldjuhul

ARCH protsessi spetsifikatsioon üldisel juhul

$$u_t = v_t \sigma_t$$

$$v_t \quad \text{valge müra} \quad \sim N(0, 1)$$

$$\sigma_t^2 = g(\sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2, \dots; u_{t-1}, u_{t-2}, \dots; \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{X}_{t-2}, \dots)$$

tinglik dispersioon

Tinglik dispersioon võib üldiselt sõltuda

- tingliku dispersiooni eelmistest väärtustest σ_{t-i}^2
- juhuslike šokkide eelmistest väärtustest u_{t-1}
- eksogeensete tunnuste vektorist $\mathbf{X}$

$g(\cdot)$ on mingi lineaarne või mittelineaarne funktsioon.

Selle funktsiooni kuju konkretiseerimine annab erinevad ARCH mudelite spetsifikatsioonid.

ARCH(1) mudel

ARCH(1) mudeli korral on dispersiooni väärtus ajahetkel t määratud eelmise ajahetke juhusliku šokiga.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

NB! Dispersioon saab olla vaid positiivne, seepärast u^2 .

Protsessi Y tingliku keskväärtuse kohta pole midagi eeldatud, st Y mudel on spetsifitseerimata. Protsess Y võib olla mingi ARMA protsess ja võib sisaldada eksogeenseid tunnuseid.

Näiteks AR (1) – ARCH(1)

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

NÄIDE: ARCH(1)

Aegrea y_t jaoks on meil mingi mudel, f kuju on konkretiseerimata.

$$y_t = f(\bullet) + u_t$$

Dispersiooni jaoks ARCH(1) mudel

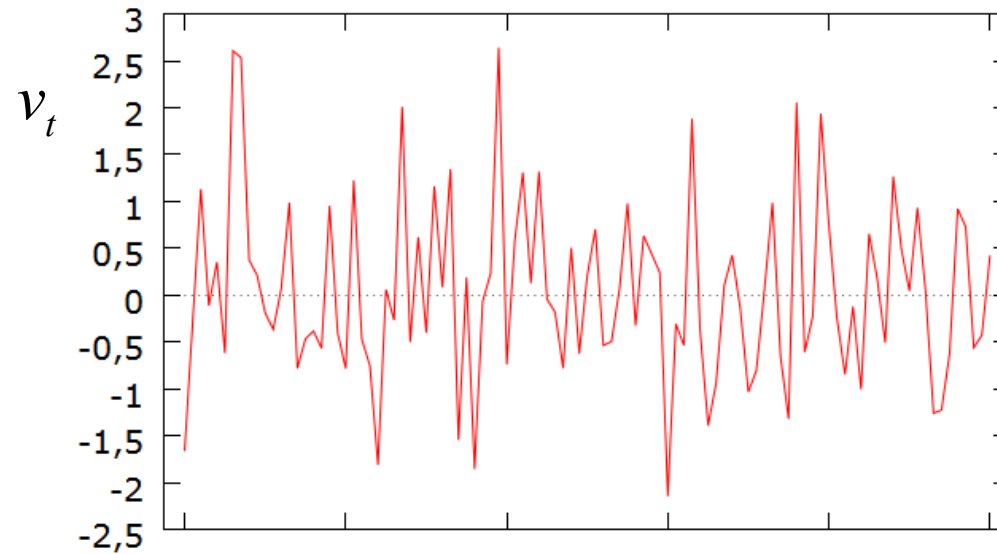
$$\sigma_t^2 = 1 + 0,8u_{t-1}^2$$

Aeg	Tegelik y	Y mudel- väärtus	Jääkliige u	Tingliku dispersiooni hinnang $\hat{\sigma}_t^2$
2	2,58	2,77	-0,19	
3	2,72	2,60	0,12	$1 + 0,8 \cdot (-0,19)^2 = 1,02888$
4	2,77	2,74	0,03	$1 + 0,8 \cdot (0,12)^2 = 1,01152$
5	2,83	2,79	0,04	$1 + 0,8 \cdot (0,03)^2 = 1,00128$

NÄIDE: ARCH(1) dispersiooni graafik

Valge müra

$$v_t \sim iid N(0, 1)$$



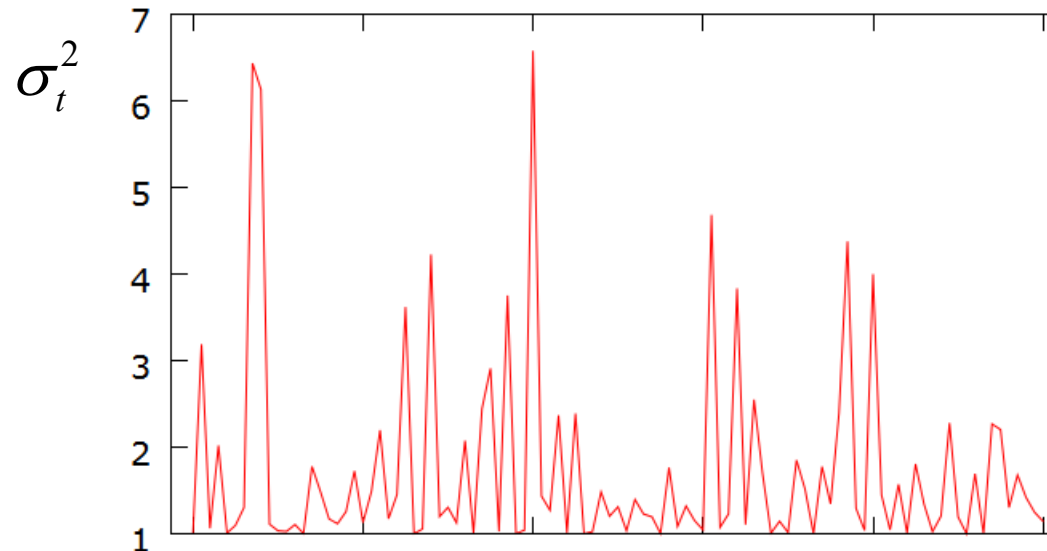
ARCH(1)

Tinglik dispersioon

$$\sigma_t^2 = 1 + 0,8u_{t-1}^2$$

kus

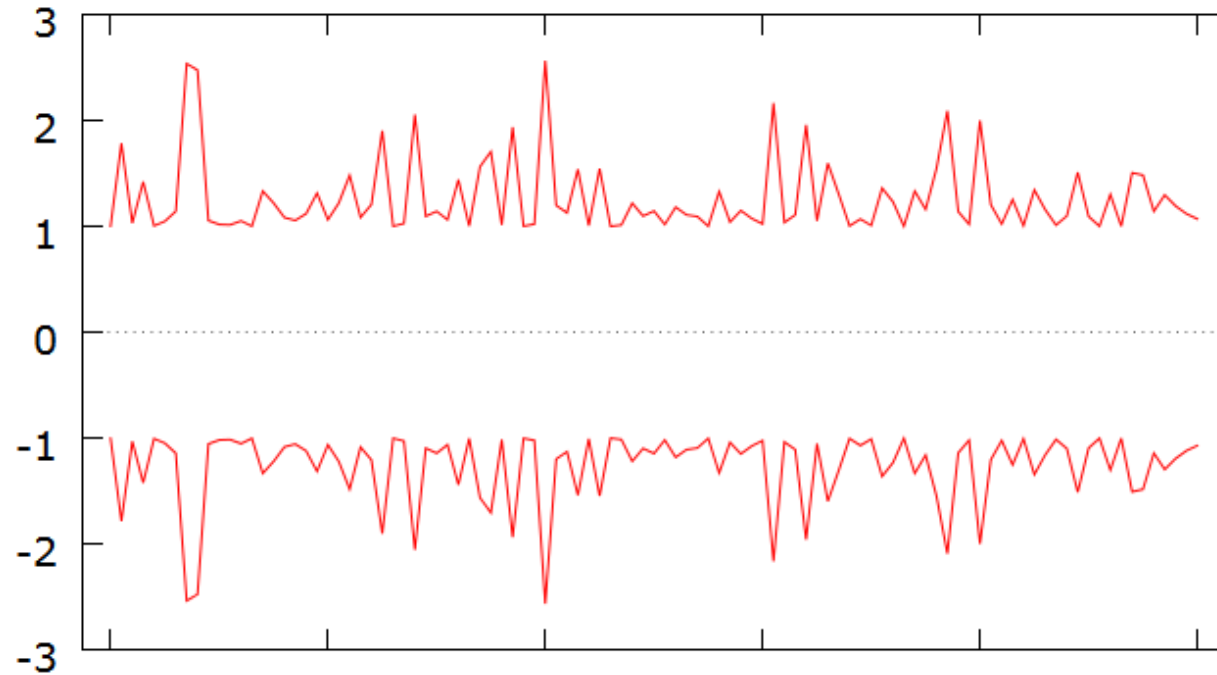
$$u_t = v_t \sigma_t$$



NÄIDE: ARCH(1) tinglik standardhälve

Tinglik standardhälve

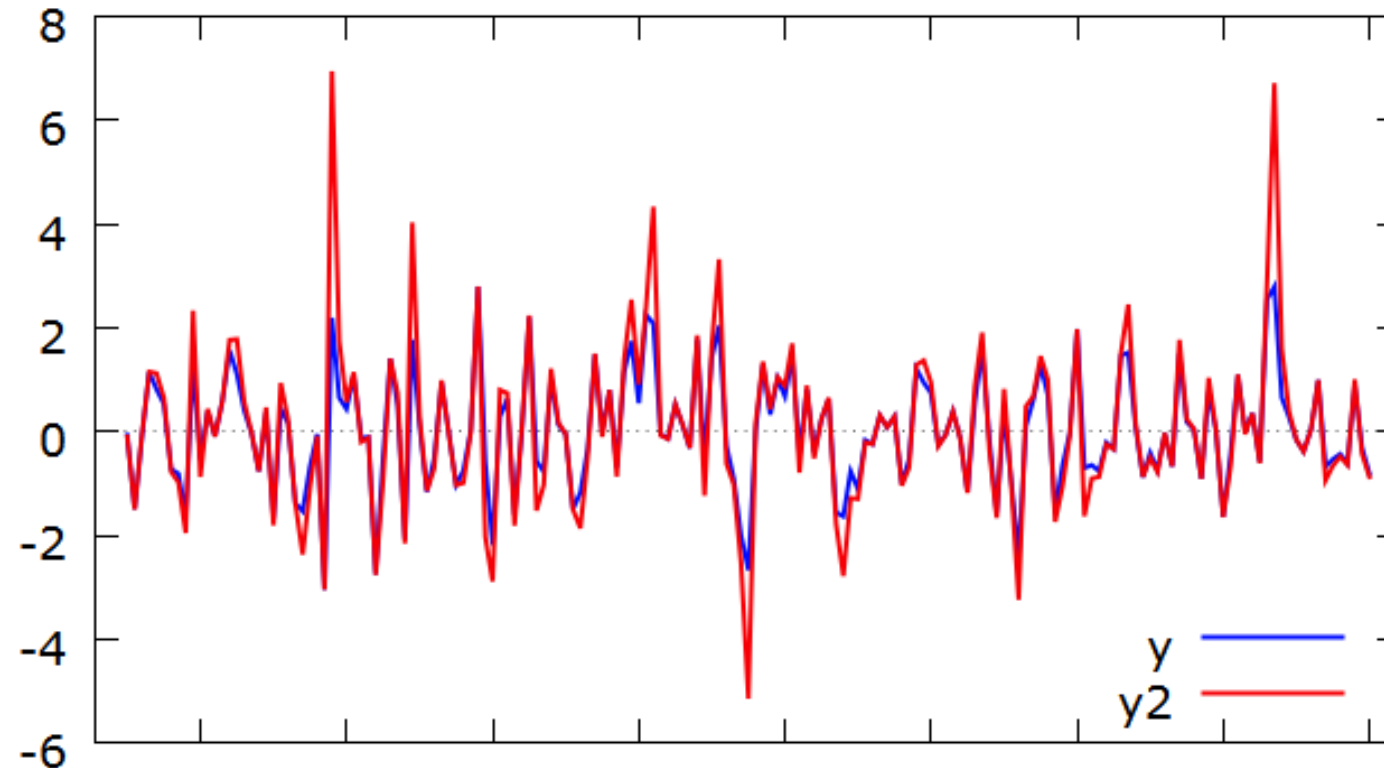
$$\sigma_t = \pm \sqrt{\sigma_t^2}$$



NÄIDE: AR(1) - ARCH(1)

$$y_t = 0,1y_{t-1} + v_t, \quad v_t \sim N(0, 1)$$

AR(1) ja konstantne dispersioon



$$y_{2t} = 0,1y_{2t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = 1 + 0,8u_{t-1}^2$$

AR(1) ja muutuv dispersioon

AR(1) – ARCH(1)

ARCH(q) mudel

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

ARCH(1) mudel

ARCH(1) mudelit saab edasi laiendada jääkliikmete ruutude q viitajani:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2$$

ARCH(q) mudel

Mitmed autorid (näiteks Enders) kasutavad dispersiooni tähistuse σ_t^2 asemel tähistust h_t

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2$$

Aegrea täielik mudel

Aegrea täielik mudel koosneb kahest osast: tingliku keskvaärtuse mudel ja tingliku dispersiooni mudel.

Tingliku keskvaärtuse mudel

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j u_{t-j} + \sum_{l=0}^L \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_{t-l} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

Tingliku keskvaärtuse mudel võib sisaldada AR ja MA liikmeid ning eksogeenseid tunnuseid ja nende viitaegu. $\mathbf{x}_t$ on eksogeensete tunnuste $k \times 1$ vektor.

Tingliku dispersiooni mudel

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2$$

Parameetrite hindamiseks tuleb spetsifitseerida mõlemad mudelid.

ARCH(q) mudeli Engeli spetsifikatsioon

Engeli spetsifikatsioon: mudel esitatakse tingliku standardhälbe jaoks.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 \quad \longrightarrow \quad \sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2}$$

Kaks erinevat võimalust ühe ja sama mudeli esitamiseks.

- Esimene on lihtsamini tõlgendatav.
- Engeli spetsifikatsioon on vajalik näiteks ARCH mudelitel põhinevate simulatsioonide jaoks.

ARCH mudeli parameetrite mittenegatiivsus

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2$$

Dispersioon σ_t^2 saab olla vaid positiivne.

Ruudud u_{t-i}^2 on positiivsed.

Järelikult kordajad α_i peavad olema positiivsed.

Kui mingi α_i on negatiivne, siis piisavalt suure šoki u_{t-i} korral võib tinglik dispersioon muutuda negatiivseks, aga seda ei tohi juhtuda.

ARCH mudel, püstakusest tingitud kitsendus

ARCH(1) mudel $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$

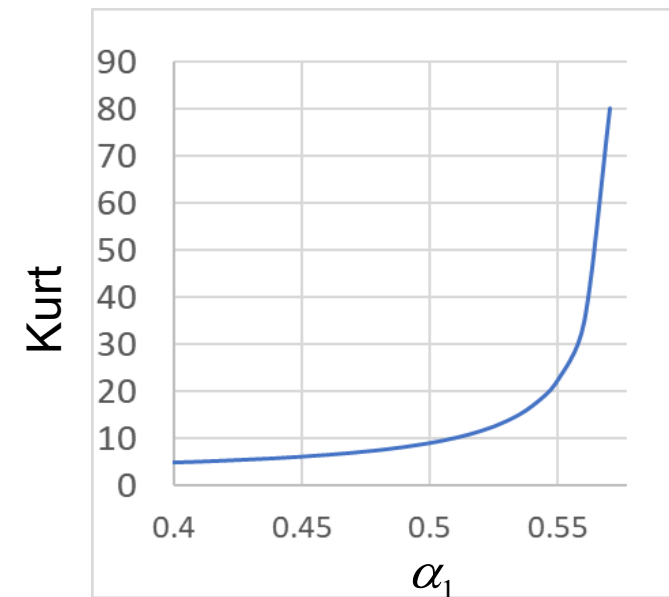
Püstakuse (*kurtosis*)
arvutamise valem
$$\text{Kurt}[u] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{E[u_t^4]}{(E[u_t^2])^2}$$

μ_4 on 4. järku keskmoment ja σ on standardhälve

ARCH(1) mudeli jaoks saame
$$\text{Kurt}[u] = \frac{3(1 - \alpha_1^2)}{(1 - 3\alpha_1^2)}$$

Püstakus kasvab lõpmatuseni, kui
$$\alpha_1^2 \rightarrow \frac{1}{3}$$

See pole reaalne.



Kitsendus $0 \leq \alpha_1^2 < \frac{1}{3}$ või $0 \leq \alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577$

ARCH mudeli puudused

- Kuidas määrata viitaegade arvu q ?
 - LR test, informatsioonikriteeriumid.
- Viitaegade arv q võib tihti olla väga suur, siis hinnatavate parameetrite arv väga suur.
 - Engle pakkus välja lisakitsenduse: lineaarselt vähenevad kordajad.

Näiteks ARCH(4) mudeli korral

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1(0,4u_{t-1}^2 + 0,3u_{t-2}^2 + 0,2u_{t-3}^2 + 0,1u_{t-4}^2)$$

- Mittenegatiivsuse kitsendused parameetritele ei pruugi kehtida (st ühe või mitme parameetri hinnang võib tulla negatiivne).
- Püstakuse kitsendus võib mitte kehtida, kui q on suur.
- Positiivsed ja negatiivsed šokid avaldavad ühesugust mõju.

Suure viitaegade arvu puuduse lahendab GARCH mudel.

GARCH MUDEL

Üldistatud ARCH ehk GARCH mudel

*Generalized Autoregressive
Conditional Heteroskedastic*

Bollerslev (1986) üldistas ARCH mudelit: lisas autoregressiivse komponendi

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

GARCH (1,1)

Üldistatud autoregressiivne tingliku heteroskedastiivsusega mudel ehk GARCH mudel.

$$\text{GARCH}(1,1) = \text{ARCH}(\infty)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (1)$$

Asendame valemis (1) $\sigma_{t-1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-2}^2 + \beta \sigma_{t-2}^2$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta (\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-2}^2 + \beta \sigma_{t-2}^2) = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_0 \beta + \alpha_1 \beta u_{t-2}^2 + \beta^2 \sigma_{t-2}^2 \quad (2)$$

Nüüd asendame valemis (2) $\sigma_{t-2}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-3}^2 + \beta \sigma_{t-3}^2$

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_0 \beta + \alpha_1 \beta u_{t-2}^2 + \beta^2 (\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-3}^2 + \beta \sigma_{t-3}^2) = \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_0 \beta + \alpha_1 \beta u_{t-2}^2 + \alpha_0 \beta^2 + \alpha_1 \beta^2 u_{t-3}^2 + \beta^3 \sigma_{t-3}^2 = \\ &= \alpha_0 (1 + \beta + \beta^2) + \alpha_1 (1 + \beta L + \beta^2 L^2) u_{t-1}^2 + \beta^3 \sigma_{t-3}^2 \end{aligned}$$

Nihkeoperaator $Lu_t = u_{t-1}$

Jätkates lõpmatu arv kordi, saame $\sigma_t^2 = \alpha_0 (1 + \beta + \beta^2 + \dots) + \alpha_1 \underbrace{(1 + \beta L + \beta^2 L^2 + \dots)}_{\text{ARCH}(\infty)} u_{t-1}^2 + \beta^\infty \sigma_0^2$

Järelikult GARCH(1,1) mudeli võib kirjutada kui lõpmatut järku ARCH mudeli.

Miks GARCH mudel on parem?

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad \text{GARCH (1,1)}$$

Näitasime, et on ekvivalentne mudeliga ARCH(∞), mis on GARCH mudeli libiseva keskmise esitus:

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 u_{t-1}^2 + \gamma_2 u_{t-2}^2 + \dots \quad \text{ARCH}(\infty)$$

Selle asemel, et hinnata ARCH mudeli lõpmata paljusid parameetreid, on vaja hinnata GARCH(1,1) mudeli 3 parameetrit.

GARCH(p,q) mudel

GARCH(1,1) mudeli võime laiendada GARCH(p,q) mudeliks

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

$$\sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

autoregressiivne osa

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2$$

libiseva keskmise osa

Enamasti järgud väga kõrged pole.

Juba GARCH(1,1) mudel võib ära seletada volatiilsuse kuhjumise.

Tähistused

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

GARCH (p, q) AR järk p esimesel kohal

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

ARCH (1), GARCH (0,1)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2$$

ARCH (2), GARCH(0,2)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

GARCH (1,2)

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 = & \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \alpha_3 u_{t-3}^2 + \\ & + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-2}^2 \end{aligned}$$

GARCH (2,3)

Tingimusteta dispersioon GARCH mudeli korral

unconditional variance

$$\text{GARCH}(1,1) \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

u_t tingimusteta dispersioon

$$\text{Var}(u_t) = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)}$$

Kui $\alpha_1 + \beta_1 < 1$, siis statsionaarne

Kui $\alpha_1 + \beta \geq 1$ mittestatsionaarne dispersiooni suhtes

$\alpha_1 + \beta = 1$ integreeritud GARCH (IGARCH)

$$\text{GARCH}(p,q) \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i < 1$$

Statsionaarsuse
tingimus

$$\text{Var}(u_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \left(\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{i=1}^p \beta_i \right)}$$

Kui on mittestatsionaarne dispersiooni suhtes, siis tingliku dispersiooni prognoos **ei koonu** oma tingimusteta väärtuseks, kui prognoosi horisonti suurendada.

ARCH/GARCH mudelite hindamine

Ei saa kasutada vähimruutude meetodit OLS, kuna

- ei ole lineaarsel kujul;
- esineb heteroskedastiivsus.

Kasutatakse suurima tõepära meetodit ML.

1. Spetsifitseerida keskväärtuse ja dispersiooni mudelid.

Näiteks AR(1) - GARCH(1,1) mudel

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

2. Maksimeeritakse logaritmilist tõepära (*log likelihood*). Sellise mudeli korral näiteks:

$$L = -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{y_t - c - \phi_{t-1}}{\sigma_t^2}$$

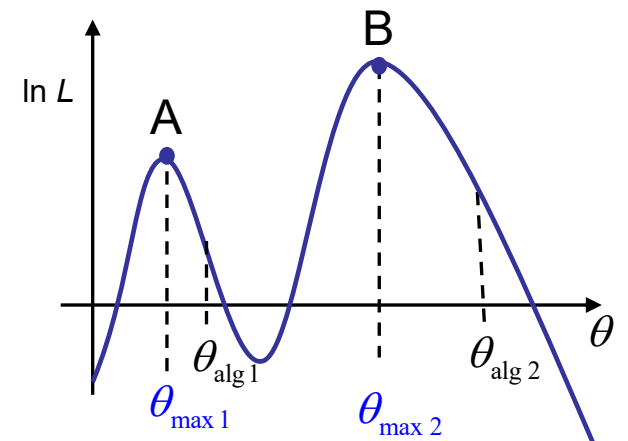
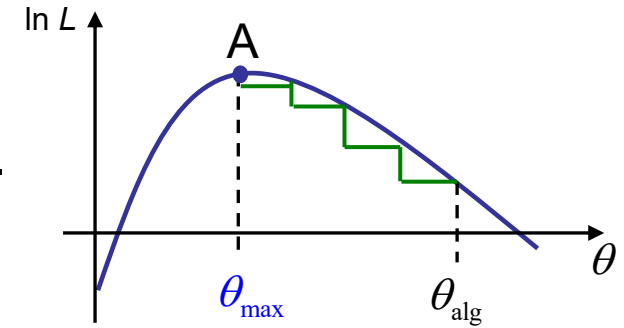
3. Leitakse numbriliselt L maksimumkoht ja parameetrite ning nende standardvigade hinnangud.

Numbriline lahendamine

Numbriliseks lahendamiseks tuleb ette anda algväärtused, GARCH mudeli korral σ_t^2 jaoks.

- Esimesel sammul leitakse logaritmiline tõepära $\ln L$, kasutades algväärtusi.
- Järgmisel sammul muudetakse neid väärtusi, leitakse uuesti $\ln L$ ja vaadatakse, kas see suurenes.
- Jätkatakse, kuni $\ln L$ suurenemine pole enam märgatav. Nii jõutakse punkti A.
- Numbriliseks lähendamiseks kuluv aeg sõltub sellest, kui hästi on algväärtused ette antud.
- Numbrilise lähendamise algoritm on erinevates tarkvarades erinev: saadakse veidi erinevad tulemused.
- Mittelineaarsel juhul võivad erinevad algväärtused anda erinevad tulemused, st lahend koondub erinevates punktides. Näiteks alustades algväärtusest $\theta_{\text{alg}1}$, jõutakse punkti A, aga alustades algväärtusest $\theta_{\text{alg}2}$, jõutakse punkti B.

Algväärtusi võib kohandada.



NÄIDE: erinev tarkvara, erinevad tulemused

Brooks jt võrdlesid samade andmete korral GARCH(1,1) mudeli hindamisel saadud tulemusi 9 erineva tarkvara kasutamisel.

Package	Parameters and <i>t</i> -ratios							
	μ	$t(\mu)$	α_0	$t(\alpha_0)$	α_1	$t(\alpha_1)$	β_1	$t(\beta_1)$
E-VIEWS	-0.00540	-0.64	0.0096	8.01	0.143	11.09	0.821	53.83
GAUSS-FANPAC	-0.00600	-0.75	0.0110	3.67	0.153	5.67	0.806	23.71
LIMDEP	-0.00619	-0.71	0.0108	3.44	0.153	5.61	0.806	26.73
MATLAB	-0.00619	-0.73	0.0108	8.13	0.153	10.96	0.806	48.67
MICROFIT	-0.00621	-0.73	0.0108	3.78	0.153	5.78	0.806	24.02
SAS	-0.00619	-0.74	0.0108	8.15	0.153	10.97	0.806	48.60
SHAZAM	-0.00613	-0.73	0.0107	5.58	0.154	7.91	0.806	36.96
RATS	-0.00625	-0.71	0.0108	3.76	0.153	5.79	0.806	23.93
TSP	-0.00619	-0.67	0.0108	1.66	0.153	2.86	0.806	11.11

Parameetrid varieeruvad vähe, kõige rohkem α_0 , variatsioonikordaja ca 4%. Kõige rohkem varieeruvad *t*-statistikud, $t(\alpha_0)$ variatsioonikordaja 47%.

Soovitused tulemuste avaldamisel:
märkida kasutatud

- 1) tarkvara;
- 2) lähendusmeetod, algväärtustamise meetod, standardvigade arvutamise meetod.

Brooks, C., Burke, S. P., & Persaud, G. (2001). Benchmarks and the accuracy of GARCH model estimation. *International Journal of Forecasting*, 17, 45–56.

Erinevad võimalused algväärtustamiseks

Programmis Stata on σ_t^2 algväärtustamiseks näiteks 6 erinevat võimalust.

1. Tingimusteta dispersioon (*unconditional variance*), kus u_t on leitud keskväärtuse mudeli põhjal.

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t^2$$

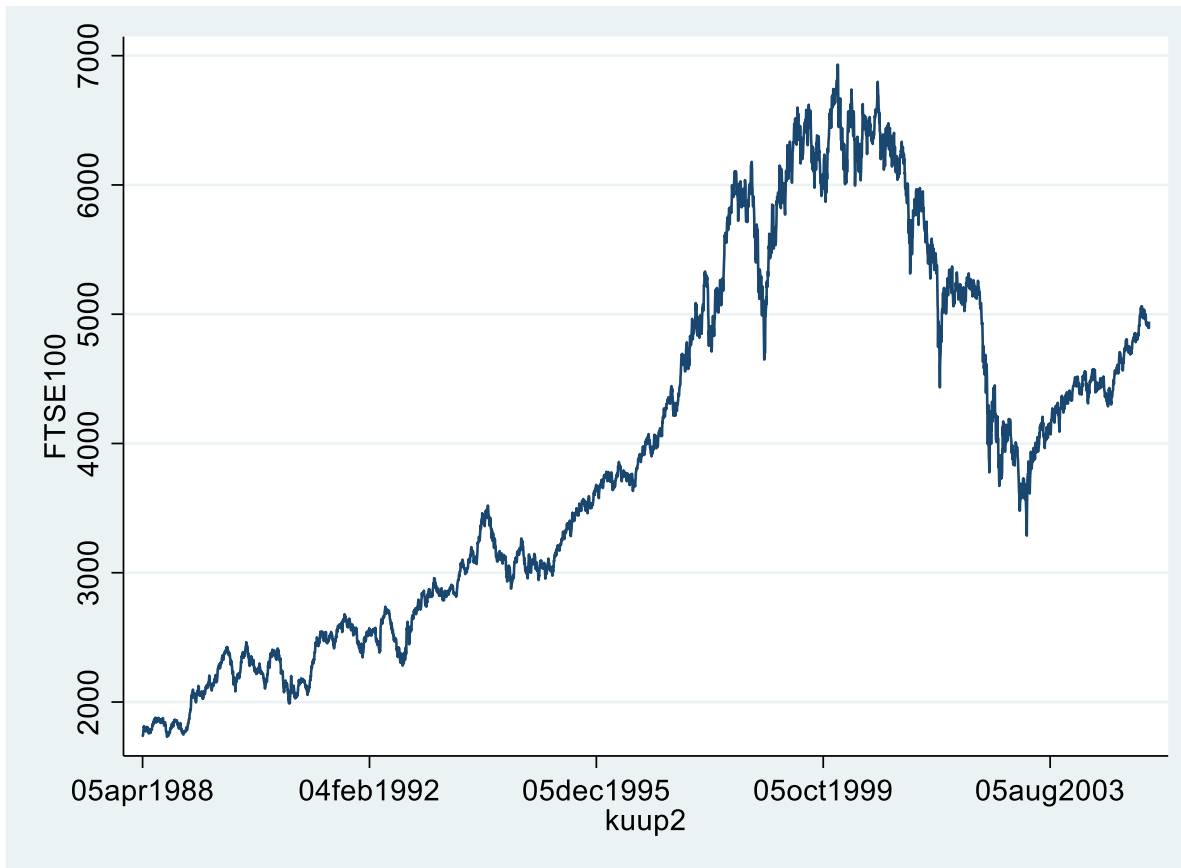
See on vaikimisi.

2. Keskväärtuse mudeli OLS-i hinnangu vealiikmete dispersioon.
3. Keskväärtuse mudeli vealiikmete ruutude u_t^2 kaalutud summa.
4. Keskväärtuse mudeli OLS-i hinnangu vealiikmete ruutude u_t^2 kaalutud summa. Suurem kaal on valimi alguses olevatel väärtustel.
5. Algväärtus on 0.
6. Algväärtuse saab arvuliselt ette anda $\sigma_0^2 = \dots$

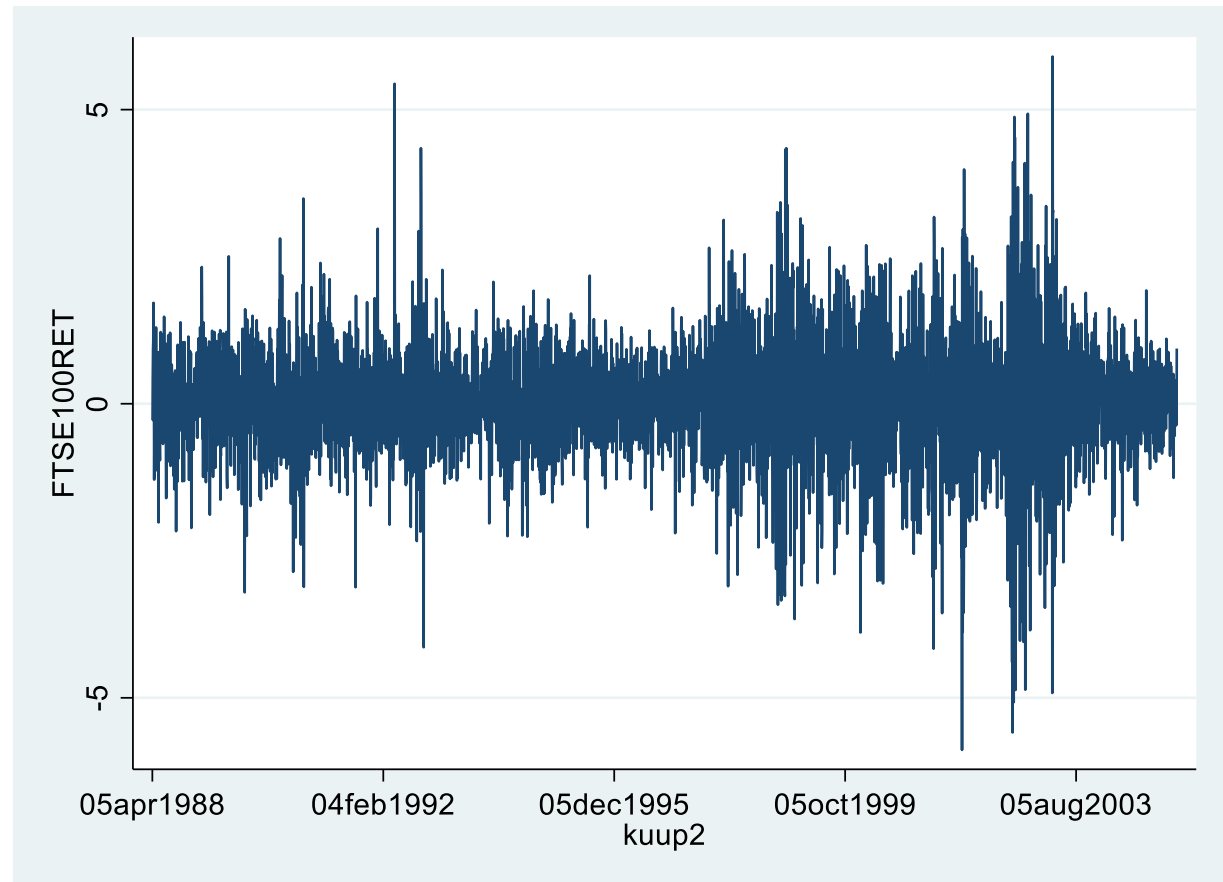
Kui GARCH mudeli korral ei õnnestu koonduvat lahendit saada, tuleks proovida erinevaid algväärtustamisi.

NÄIDE: FTSE100 indeks

FTSE100 indeks sisaldab Londoni börsil noteeritud
100 suurima ettevõtte aktsiat.
5. apr 1988 – 6. apr. 2005, päevased andmed.

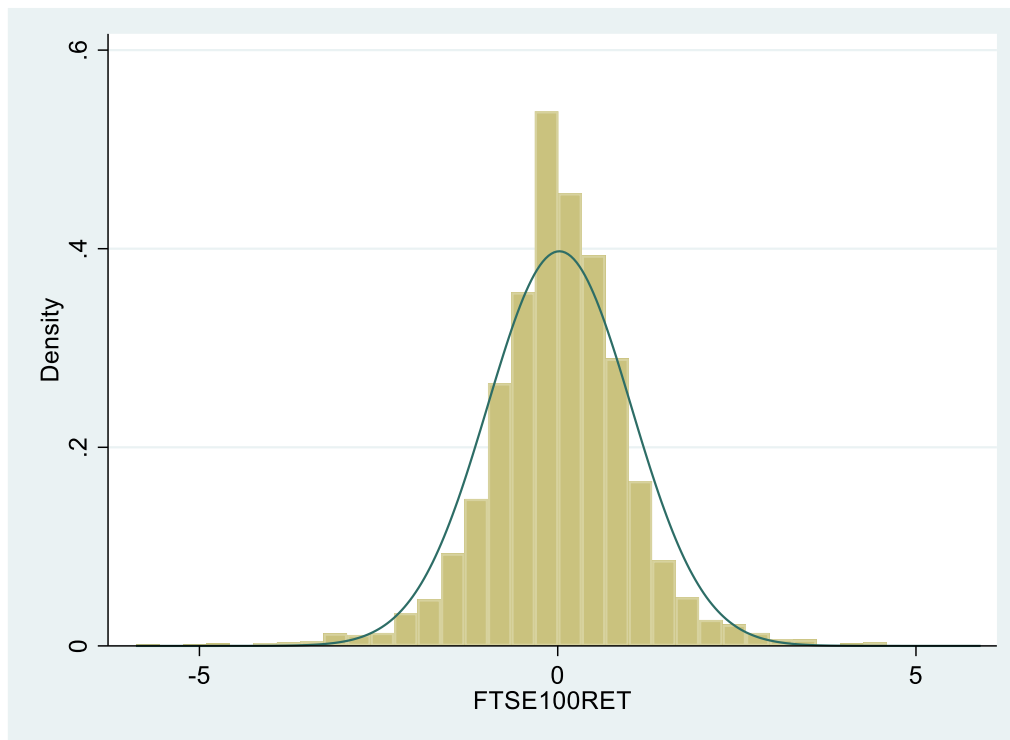


Indeksi logaritmiline tulumäär FTSE100RET,
protsentides.



NÄIDE: indeksi logaritmilise tulumäära kirjeldav statistika

Histogramm koos normaaljaotuskõveraga ja kirjeldav statistika.



Obs	4,436
Sum of wgt.	4,436
Mean	.0235038
Std. dev.	1.003832
Variance	1.007679
Skewness	-.1172909
Kurtosis	6.235883

Püstakus > 3,
teravatipuline jaotus

Skewness and kurtosis tests for normality

Variable	Obs	Pr(skewness)	Pr(kurtosis)	—— Joint test ——	
				Adj chi2(2)	Prob>chi2
FTSE100RET	4,436	0.0015	0.0000	285.70	0.0000

Ei allu
normaaljaotusele

NÄIDE: FTSE100 logaritmilise tulumäära GARCH mudel

Xelakaki kasutas järgmist süsteemi:

$y_t = c + \phi y_{t-1} + u_t$ AR(1) mudel FTSE100RET tingliku keskväärtuse jaoks

$u_t = v_t \sigma_t$ $v_t \sim i.i.d N(0,1)$ valge müra

$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$ GARCH(p,q) mudel tingliku dispersiooni jaoks

GARCH mudeli korral prooviti läbi järgmised järgud:

autoregressiivsed liikmed $p = 0, 1, 2$

libiseva keskmise liikmed $q = 1, 2, 3$

Kokku 9 mudelit.

Võrdlemiseks kasutas Akaike informatsioonikriteeriumit AIC.

AIC oli minimaalne mudeli GARCH(1,1) korral.

NÄIDE: indeksi logaritmiline tulumäär, GARCH(1,1)

AR(1) $y_t = 0,0367 + 0,026(y_{t-1} - 0,0367) + u_t$ Keskväärtuse mudel



FTSE100RET	OPG					
	Coefficient	std. err.	z	P> z	[95% conf. interval]	
FTSE100RET						
_cons	.0367447	.0126211	2.91	0.004	.0120079	.0614815
ARMA						
ar L1.	.0260805	.015869	1.64	0.100	-.0050223	.0571832
ARCH						
α_1 arch L1.	.070785	.0058166	12.17	0.000	.0593846	.0821854
β garch L1.	.9165969	.0070188	130.59	0.000	.9028402	.9303535
α_0 _cons	.0120002	.0023402	5.13	0.000	.0074135	.0165869

GARCH (1,1) $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 =$
 $= 0,012 + 0,0708 u_{t-1}^2 + 0,917 \sigma_{t-1}^2$ Tingliku dispersiooni mudel

Tingliku dispersiooni hinnangud peale mudeli hindamist

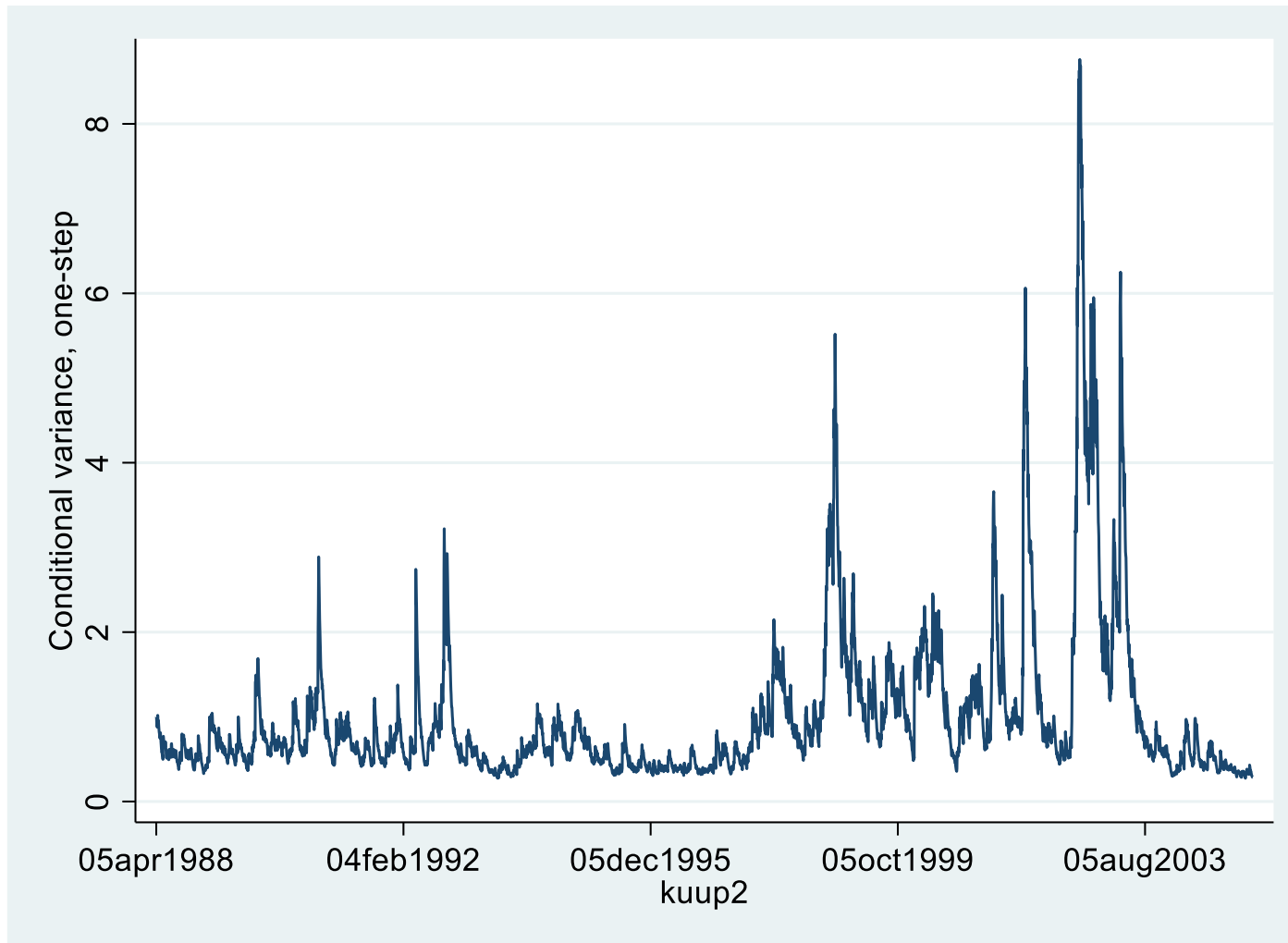
Valimi sees: iga ajahetke t jaoks leitakse tingliku dispersiooni ühesammuline prognoos, mis põhineb ajahetkel $t-1$ olnud informatsioonil Ω_{t-1}

$$\sigma_t^2 = Var(y_t(\boldsymbol{\theta}) | \Omega_{t-1})$$

Seejärel saab vaadata nende väärtusi ja graafikut.

NÄIDE: tingliku dispersiooni graafik

Indeksi logaritmiline tulumäär FTSE100RET, tingliku dispersiooni graafik



GARCH MUDELI DIAGNOSTIKA

GARCH mudeli diagnostika

- 1) Kas keskväärtuse mudeli jäägid alluvad normaaljaotusele?
 - Kui ei allu normaaljaotusele, siis tuleks kasutada mudeli hindamisel teistsugust jääkide jaotust:
 - Studenti t -jaotus;
 - üldistatud normaaljaotus GED.
- 2) Kas keskväärtuse mudel on õigesti spetsifitseeritud?
- 3) Kas tingliku dispersiooni mudel on õigesti spetsifitseeritud?

Standardiseeritud jäägid

Keskväärtuse mudel üldjuhul $y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j u_{t-j} + \sum_{l=0}^L \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_{t-l} + u_t$

Selle jääkliikmed $u_t = \sigma_t v_t$ kus $v_t \sim N(0,1)$

Eeldus, et v_t alluvad normaaljaotusele. St tuleb testida, kas $v_t \sim N(0,1)$?

Järelikult tuleb testida standardiseeritud jääke

$$\hat{v}_t = \frac{\hat{u}_t}{\hat{\sigma}_t}$$

Mudeli jääk jagatud standardhälbega on standardiseeritud jääk.

kus $\hat{u}_t$ on keskväärtuse mudeli jääkliikmete hinnangud ja $\hat{\sigma}_t$ tingliku standardhälbe hinnangud

$$\hat{\sigma}_t = \sqrt{\hat{\sigma}_t^2}$$

Normaaljaotusele ei allu jäägid u_t , sest nende dispersioon muutub (normaaljaotusel konstantne). Eeldatakse, et standardiseeritud jäägid alluvad normaaljaotusele.

Kui standardiseeritud jäägid ei allu normaaljaotusele

- Engle eeldas, et GARCH mudeli jääkliikmed alluvad normaaljaotusele.
- Mandelbrot (1963) ja paljud teised aga on märkinud, et aktsiate tulumäärade jaotus on suure püstakusega (*leptokurtic*): ekstreemseid väärtusi on suurema sagedusega kui normaaljaotuse korral eeldaks (sabad on paksemad).
- Seepärast on GARCH mudeli hindamisel võimalik kasutada ka paksemate sabadega jaotusi:
 - Studenti t -jaotus;
 - üldistatud normaaljaotus GED.

Jääkliikmete normaaljaotus või t -jaotus

Suurima tõepära meetodi kasutamise eeldus on, et **jääkide jaotus on õigesti määratud**. GARCH modelleerimisel on võimalik kasutada mitut erinevat jääkliikmete jaotust. Jaotuse valikust sõltub maksimeeritava logaritmilise tõepära funktsiooni kuju.

1. Normaaljaotus ehk Gaussi jaotus. $v_t \sim N(0, \sigma^2)$

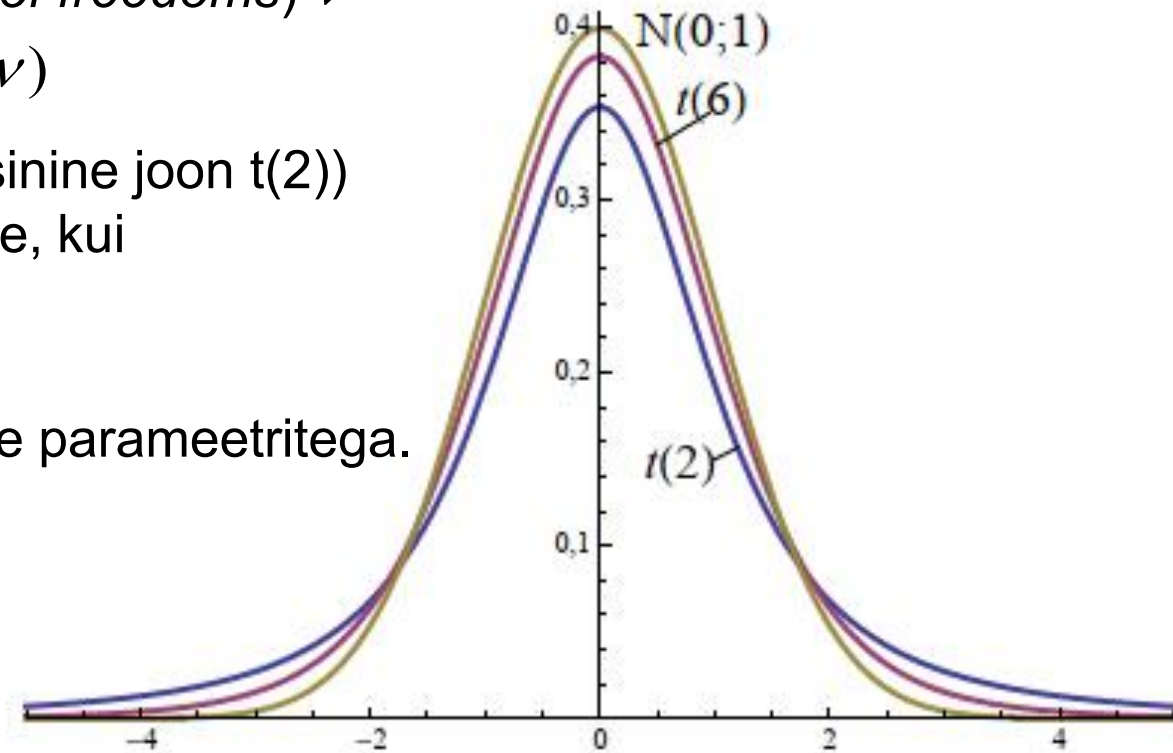
2. Studenti t -jaotus vabadusastmete arvuga (*degree of freedoms*) ν

$$v_t \sim t(\nu)$$

t -jaotuse korral on sabad paksemad (joonisel näit sinine joon $t(2)$)
 t -jaotus läheneb standardiseeritud normaaljaotusele, kui
vabadusastmete arv kasvab, $\nu \rightarrow \infty$

2a) Sobiv vabadusastmete arv hinnatakse koos teiste parameetritega.

2b) Vabadusastmete arv antakse ette.



Üldistatud normaaljaotus GED

3. Üldistatud normaaljaotus (*generalized normal distribution*) või ka üldistatud vealiikmete jaotus GED (*generalized error distribution*) või ka *exponential power distribution*.

$$v_t \sim GED(s)$$

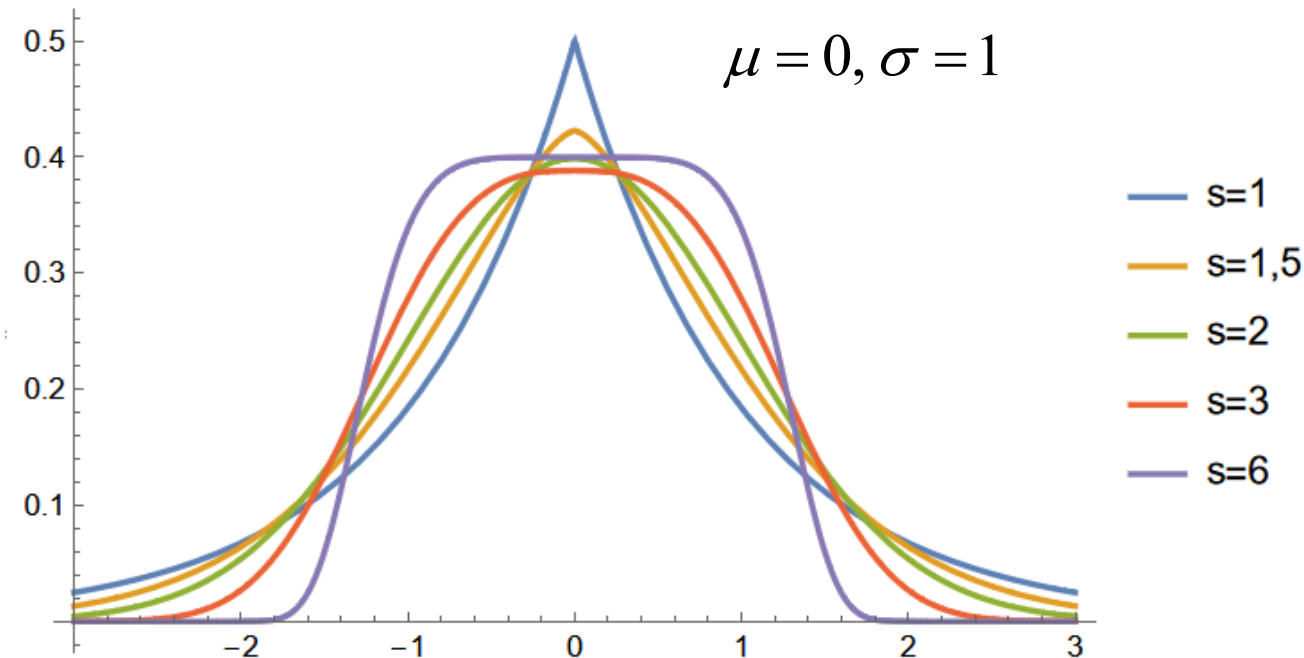
Kolm parameetrit: keskväärtus μ , standardhälve σ ja kuju parameeter s (*shape parameter*). Viimane üldistab normaaljaotust:

Kui $0 < s < 2$, siis sabad paksemad;
 $s = 2$, siis GED = normaaljaotus;
 $s > 2$, siis sabad õhemad;
 $s \rightarrow \infty$, läheneb riskülikjaotusele.

GARCH mudeli hindamisel 2 võimalust:

3a) kuju parameeter s hinnatakse koos teiste parameetritega;

3b) kuju parameeter s antakse ette.



NÄIDE: Varssavi börsi indeks ja GED

Czyżycki analüüsis Varssavi börsi indeksi WIG20 päevaseid tulumäärasid perioodil 18.04.1994 – 18.11.2013. Periood oli jagatud 8 alamperioodiks.

B – *bull market*, H – *bear market*

Iga alamperioodi korral leidis GED jaotuse kuju parameetri s .

Lisaks kasutas jaotuse sobivuse χ^2 -testi kontrollimaks, kas jaotus langeb kokku GED jaotusega (viimane veerg)

Table 2. Basic statistics describing GED in analyzed subperiods.

period		s	λ	chi-squared (chi2)
18.04.1994r. - 29.03.1995r.	B1	1,41489	24,19981	chi2=1,94644; p=0,856505
29.03.1995r. - 03.03.1998r.	H1	1,14925	56,44365	chi2=11,47523; p=0,176198
03.03.1998r. - 12.10.1998r.	B2	1,51227	27,66117	chi2=2,51433; p=0,642072
12.10.1998r. - 27.03.2000r.	H2	1,27543	47,82500	chi2=10,91912; p=0,206324
27.03.2000r. - 04.10.2001r.	B3	1,68096	41,97033	chi2=5,81487; p=0,830569
04.10.2001r. - 06.07.2007r.	H3	1,27532	72,23224	chi2=18,41355; p=0,782499
06.07.2007r. - 18.02.2009r.	B4	1,34577	43,68876	chi2=14,00531; p=0,122136
18.02.2009r. - 18.11.2013r.	H4	1,13660	80,37132	chi2=24,36023; p=0,143577

Source: own elaboration.

Czyżycki, R. (2013) Using GED (Generalized Error Distribution) for modeling distribution of the rates of return. *CeON Repository*, <https://depot.ceon.pl/handle/123456789/3213>

NÄIDE: FTSE100 logaritmilise tulumäära GARCH(1,1) mudel erinevate jaotuste korral

Gaussi ehk normaaljaotus

FTSE100RET	Coefficient	OPG std. err.
FTSE100RET _cons	.0367447	.0126211
ARMA ar L1.	.0260805	.015869
ARCH arch L1.	.070785	.0058166
garch L1.	.9165969	.0070188
_cons	.0120002	.0023402

Panna tähele, et kõigi kordajate hinnangud on veidi erinevad. Nii keskväärtuse kui dispersiooni mudelil.

t-jaotus, vabadusastmete arv hinnatakse valimi alusel.

FTSE100RET	Coefficient	OPG std. err.
FTSE100RET _cons	.0423069	.0122759
ARMA ar L1.	.0219152	.0158288
ARCH arch L1.	.0660058	.0076421
garch L1.	.9234498	.0087125
_cons	.0100112	.002641
/lndfm2	2.277954	.1616051
df	11.75669	1.576731

vabadusastmete arv

GED jaotus, kuju parameeter hinnatakse valimi alusel

FTSE100RET	Coefficient	OPG std. err.
FTSE100RET _cons	.0388794	.0121663
ARMA ar L1.	.0187713	.0156254
ARCH arch L1.	.0678476	.0075545
garch L1.	.9206252	.008851
_cons	.0109408	.0028175
/lnshape	.4616825	.0247416
shape	1.586741	.0392586

kuju parameeter s

Kas keskväärtuse mudel on õigesti spetsifitseeritud?

Keskväärtuse mudel üldjuhul

$$y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j u_{t-j} + \sum_{l=0}^L \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{x}_{t-l} + u_t$$

Selle jääkliikmed $u_t = \sigma_t v_t$

Standardiseeritud jäägid $\hat{v}_t = \frac{\hat{u}_t}{\hat{\sigma}_t}$

Standardiseeritud jääkliikmed peavad olema valge müra.

Sellisel juhul on keskväärtuse mudel õigesti spetsifitseeritud: kogu autokorrelatsioon on õnnestunud panna mudelisse.

Testimiseks **standardiseeritud jääkliikmete korrelogramm**.

Peale mudeli hindamist.

1. Leida jääkide hinnangud $\hat{u}_t$
2. Leida tingliku dispersiooni hinnangud $\hat{\sigma}_t^2$
3. Arvutada standardiseeritud jäägid $\hat{v}_t = \frac{\hat{u}_t}{\sqrt{\hat{\sigma}_t^2}}$
4. Vaadata standardiseeritud jääkide korrelogrammi, Q-statistiku olulisuse tõenäosust. Kui tuleb vastu võtta **nullhüpotees**, siis on keskväärtuse mudeli spetsifikatsioon õige.

Kas tingliku dispersiooni mudel on õigesti spetsifitseeritud?

Keskväärtuse mudeli jääkliikmed $u_t = \sigma_t v_t$ Standardiseeritud jäägid $\hat{v}_t = \frac{\hat{u}_t}{\hat{\sigma}_t}$

Kui tingliku dispersiooni mudel on õigesti spetsifitseeritud, siis standardiseeritud jääkide aegreal ei tohiks olla jäänud ARCH efekti.

Standardiseeritud jääkliikmete ruutude aegrida peab olema valge müra.

Kui standardiseeritud jääkide korral esineb ARCH efekt, st jääkide ruutude aegreal esineb autokorrelatsioon

$$\hat{v}_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{v}_{t-1}^2 + \gamma_2 \hat{v}_{t-2}^2 + \dots + \gamma_q \hat{v}_{t-q}^2 + \varepsilon_t$$

siis ei ole GARCH mudel õigesti spetsifitseeritud. Siis muuta spetsifikatsiooni.

Testimiseks standardiseeritud jääkliikmete ruutude korrelogramm.

Peale mudeli hindamist, kui on leitud standardiseeritud jäägid.

1. Arvutada standardiseeritud jääkide ruudud $\hat{v}_t^2$
2. Vaadata standardiseeritud jääkide ruutude korrelogrammi, Q-statistiku olulisuse tõenäosust.
Kui tuleb vastu võtta nullhüpotees, siis on spetsifikatsioon õige.

GARCH mudeli diagnostika kokkuvõte

Testitakse **standardiseeritud jääke**

$$\hat{v}_t = \frac{\hat{u}_t}{\hat{\sigma}_t}$$

- Kui eeldatakse, et jäägid alluvad normaaljaotusele, tuleb testida standardiseeritud jääkide normaaljaotust.
 - Kui ei allu normaaljaotusele, siis võib kasutada mudeli hindamisel teistsugust jaotust: Studenti või üldistatud normaaljaotus GED (eelistatud).
- Kas keskväärtuse mudel on õigesti spetsifitseeritud?
 - Standardiseeritud jääkliikmed peavad andma valge müra.
 - Testimiseks **standardiseeritud jääkliikmete korrelogramm**.
 - Kui ei ole valge müra, tuleb keskväärtuse mudeli spetsifikatsiooni muuta.
- Kas tingliku dispersiooni mudel on õigesti spetsifitseeritud?
 - Standardiseeritud jääkliikmete ruudud peavad andma valge müra.
 - Testimiseks **standardiseeritud jääkliikmete ruutude korrelogramm**.
 - Kui ei ole valge müra, siis pole GARCH mudelisse kõiki vajalikke liikmeid võetud ja muuta spetsifikatsiooni.

PROGNOOSIMINE

Proгноосimine

Nagu aegreа ARIMA mudelite korral, on dispersiooni прогноосimisel samuti võimalik

- **staatiline прогноосimine** valimi sees;
 - Alati прогноositakse 1 samm edasi.
- **dünaamiline прогноосimine** valimist välja.
 - Võib прогноосida kuitahes pikalt.

Прогноositakse

- aegreа taset (tinglikku keskväärtust);
- tinglikku dispersiooni.

Tingliku dispersiooni prognoos GARCH(1,1) mudeli põhjal, I

Olgu meil GARCH(1,1) mudel:

$$y_t = \mu + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_t^2), \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Ühesammuline prognoos

$$\sigma_{1,t}^{2F} = \sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_t^2 + \beta \sigma_t^2$$

Prognoos 2 sammu edasi?

$$\sigma_{2,t}^{2F} = \sigma_{t+2}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t+1}^2 + \beta \sigma_{t+1}^2$$

See pole teada

On teada selle prognoos

u_{t+1}^2 prognoosiks on selle tinglik keskväärtus, mis on tingliku dispersiooni prognoos.

$$E[u_{t+1}^2 | \Omega_t] = \sigma_{t+1}^2 = \sigma_{1,t}^{2F}$$

$$\sigma_{2,t}^{F2} = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{1,t}^{2F} + \beta \sigma_{1,t}^{2F} = \alpha_0 + \sigma_{1,t}^{2F} (\alpha_1 + \beta)$$

Tingliku dispersiooni prognoos GARCH(1,1) mudeli põhjal, II

Analoogselt jätkates prognoos 3 sammu edasi

$$\begin{aligned}\sigma_{3,t}^{2F} &= \alpha_0 + \alpha_1 E[u_{t+2}^2 | \Omega_t] + \beta \sigma_{2,t}^{2F} = \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{2,t}^{2F} + \beta \sigma_{2,t}^{2F} = \alpha_0 + \sigma_{2,t}^{2F} (\alpha_1 + \beta) = \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) [\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) \sigma_{1,t}^{2F}] = \\ &= \alpha_0 + \alpha_0 (\alpha_1 + \beta) + (\alpha_1 + \beta)^2 \sigma_{1,t}^{2F}\end{aligned}$$

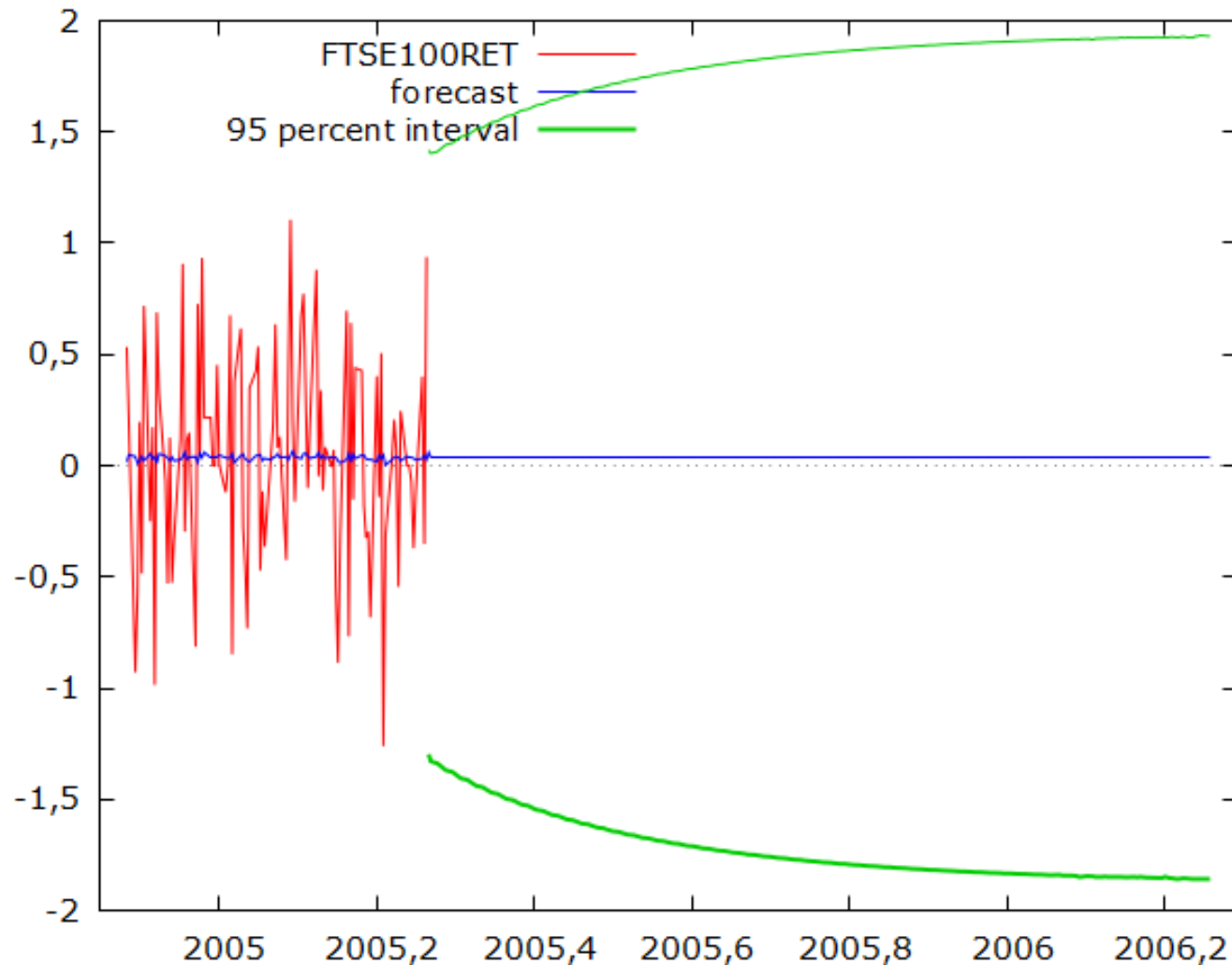
Prognoos s sammu edasi

$$\sigma_{s,t}^{2F} = \alpha_0 \sum_{i=1}^{s-1} (\alpha_1 + \beta)^{i-1} + (\alpha_1 + \beta)^{s-1} \sigma_{1,t}^{2F}$$

Prognoos lõpmata pika aja peale, $s \rightarrow \infty$. Kuna $\alpha_1 + \beta < 1$, siis viimane liidetav muutub nulliks, aga esimene on lõpmatu geomeetrilise rea summa:

$$\sigma_{s \rightarrow \infty, t}^{2F} = \sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)} \quad \text{See on tingmusteta dispersioon.}$$

NÄIDE: FTSE100 logaritmilise tulumäära prognoos 1 aasta edasi



Sinine joon – keskväärtuse prognoos

Roheline joon – usalduspiirid:

$$E[y_{t+1}] \pm 2\sigma_{t+1}$$

Usaldatavus 95%

Normaaljaotuse korral täpsemalt $1,96\sigma_{t+1}$

Studenti või GED jaotuse korral
on kordaja veidi suurem kui 2.

Parameetrite summa GARCH mudelis

Paljude finantsaegridade analüüs on näidanud, et GARCH mudelis $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$

- kordajad α on väikesed;
- kordajate β summa on 1 lähedal;
- kordajate summa kokku ≈ 1 .

Näiteks Zivot modelleeris Microsofti aktsia ja indeksi S&P500 päevaseid ja kuiseid tulumäärasid GARCH(1,1) mudeliga perioodil 14.03.1986-30.06.2003.

Asset	GARCH Parameters			Residual Diagnostics		
	α_0	α_1	b_1	MQ(12)	LM(12)	JB
Daily Returns						
MSFT	2.80e ⁻⁵	0.0904	0.8658	4.787	4.764	1751
	(3.42e ⁻⁶)	(0.0059)	(0.0102)	(0.965)	(0.965)	(0.000)
	[1.10e ⁻⁵]	[0.0245]	[0.0371]			
S&P 500	1.72e ⁻⁶	0.0919	0.8990	5.154	5.082	5067
	(2.00e ⁻⁷)	(0.0029)	(0.0046)	(0.953)	(0.955)	(0.000)
	[1.25e ⁻⁶]	[0.0041]	[0.0436]			
Monthly Returns						
MSFT	0.0006	0.1004	0.8525	8.649	6.643	3.587
	[0.0006]	[0.0614]	[0.0869]	(0.733)	(0.880)	(0.167)
S&P 500	3.7e ⁻⁵	0.0675	0.9179	3.594	3.660	72.05
	[9.6e ⁻⁵]	[0.0248]	[0.0490]	(0.000)	(0.988)	(0.000)

Notes: QML standard errors are in brackets.

$$\hat{\alpha}_1 + \hat{b}_1 \approx 0,956$$

$$\hat{\alpha}_1 + \hat{b}_1 \approx 0,982$$

$$\hat{\alpha}_1 + \hat{b}_1 \approx 0,953$$

$$\hat{\alpha}_1 + \hat{b}_1 \approx 0,985$$

IGARCH mudel

Engle, Bollerslev (1986): integreeritud GARCH mudel, ehk IGARCH
(*Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Mudelile lisatakse kitsendus $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$

Ühikjuurt omav GARCH protsess.

Sellisel juhul tinglik dispersioon pika aja jooksul ei koonu.
Mingi juhusliku šoki mõju volatiilsusele säilib, ei vaibu.

GARCH MUDELI LAIENDUSED

GARCH mudeli laiendused

- Probleemid GARCH(p,q) mudelitega:
 - kitsendus parameetrite mittenegatiivsusele ei pruugi olla rahuldatud;
 - GARCH mudelid ei suuda prognoosida finantsvõimenduse efekti, mis väljendub asümmeetrias.
- Võimalikud asümmeetrilised GARCH mudelid:
 - EGARCH, eksponentsiaalne GARCH mudel;
 - GJR, asümmeetriline GARCH mudel;
 - TARARCH, asümmeetriline GARCH (*threshold GARCH model*).
- Muud laiendused
 - GARCH-X dispersiooni mudel eksogeensete tunnustega.
 - GARCH-M aegrea keskväärtuse sõltuvus volatiilsusest (*GARCH in mean*);

Raamatus Xekalaki, E., Degiannakis, S. (2010) „ARCH Models for Financial Applications“ on 40 erinevat GARCH mudeli varianti, mis on erinevate autorite poolt pakutud.

EGARCH mudel

Eksponentsiaalne GARCH mudel EGARCH. Modelleeritakse tingliku dispersiooni logaritmi

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^q \left(\alpha_i \left(|u_{t-i}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) + \gamma_i u_{t-i} \right) + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2)$$

1. σ^2 on alati positiivne, ka siis kui mõni mudeli parameeter on negatiivne. Seega pole vaja mittenegatiivsuse kitsendusi.
2. Lubatud on asümmeetria: kui parameeter γ_i on negatiivne, siis negatiivne šokk u_{t-i} suurendab dispersiooni, positiivne šokk vähendab dispersiooni.

Halbade uudiste korral $u_{t-i} < 0$

Kui $\gamma_i < 0$ siis „halva uudise“ korral $\ln(\sigma_t^2) \uparrow$

Asümmeetria testimine: kui kordaja γ_i on statistiliselt oluline, siis asümmeetria esineb.

NÄIDE: NASDAQ liitindeksi EGARCH mudel

Modelleeritakse logaritmilist tulumäära 13.11.2010-13.11.2020

Keskväärtuse mudel on AR(1)

$$LRET_t = c + \phi LRET_{t-1} + u_t$$

γ on negatiivne,
negatiivsed uudised
suurendavad dispersiooni

Tingliku dispersiooni mudel
mudel EGARCH(1,1)

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \gamma u_{t-1} + \alpha \left(|u_{t-1}| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right) + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

Asümmeetria esineb, sest γ
on statistiliselt oluline.

γ

α

β

ω

LRET	OPG			
	Coefficient	std. err.	z	P> z
LRET _cons	.0932203	.0150872	6.18	0.000
ARMA ar L1.	-.0454338	.0203996	-2.23	0.026
ARCH earch L1.	-.1867412	.01708	-10.93	0.000
earch_a L1.	.1657739	.0250166	6.63	0.000
egarch L1.	.9630981	.0059298	162.42	0.000
_cons	-.0020941	.0050868	-0.41	0.681

GJR mudel

Teine võimalus asümmeetria sisse toomiseks

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \gamma_i d_{t-i}^+ u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Asümmeetria tuuakse sisse fiktiivse tunnusega

$$d_{t-1}^+ = \begin{cases} 1, & u_{t-1} \geq 0 \\ 0, & u_{t-1} < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{„head uudised“, šokk on positiivne} \\ \text{„halvad uudised“, šokk on negatiivne} \end{array}$$

Märkus: sõltuvalt tarkvarast võib olla defineeritud ka vastupidi. Näiteks programmis EViews vastupidi.

Erineva märgiga šokid mõjutavad dispersiooni erinevalt:

$u_{t-i} > 0$, siis šoki mõju $\alpha_i + \gamma_i$

$u_{t-i} < 0$, siis šoki mõju α_i

Kui kordaja γ_i on statistiliselt oluline, siis asümmeetria esineb.

Kui $\gamma_i < 0$, siis positiivne šokk vähendab dispersiooni.

Nimetatakse ka TARARCH või TGARCH mudeliks: lävendiga (*threshold*) ARCH.

Glosten, L., Jagannathan, R. and Runkle, D. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*. 48, 1779-1801.

NÄIDE: NASDAQ liitindeksi GJR mudel

Modelleeritakse logaritmilist tulumäära 13.11.2010-13.11.2020

Keskväärtuse mudel on AR(1)

$$LRET_t = c + \phi LRET_{t-1} + u_t$$

Tingliku dispersiooni mudel
mudel GJR-GARCH(1,1)

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \gamma d_{t-1}^+ u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

γ on negatiivne,
positiivsete uudiste korral
dispersioon väiksem.

Asümmeetria esineb, sest γ
on statistiliselt oluline.

LRET		OPG		z	P> z
		Coefficient	std. err.		
LRET	_cons	.0940876	.0153261	6.14	0.000
ARMA	ar L1.	-.0415486	.0199324	-2.08	0.037
ARCH					
α	arch L1.	.244652	.029768	8.22	0.000
γ	tarch L1.	-.289536	.0330675	-8.76	0.000
β	garch L1.	.85584	.0158807	53.89	0.000
ω	_cons	.0442317	.0063723	6.94	0.000

NÄIDE: erinevate mudelite prognoosimisvõime

Agderi Ülikoolis 2014. a. kaitstud magistritöös võrreldi erinevate volatiilsusmudelite prognoosimisvõimet valimi sees ja valimist väljas. Periood 1.jaan 1990-7. veebr 2014.

Tabelis on NASDAQ liitindeksi prognoosimise tulemused kuu aega ette.

MSE alusel kõige parem GJR, vealiikmetel normaaljaotus.

MAE alusel kõige parem EGARCH(1,1), Studenti jaotus.

Einarsen, R. H. A Comparative Study of Volatility Forecasting Models. Master's Thesis, University of Agder, 2014.

NASDAQ Composite	MSE*	Rank	MAE	Rank
RW	0.065848	14	0.017643	14
SMA-6 months	0.082203	15	0.018748	15
SMA-12 months	0.097158	17	0.021382	17
EWMA	0.061012	12	0.016409	2
ARMA(1,1)	0.085893	16	0.019357	16
GARCH(1,1)-norm	0.056858	6	0.016653	6
GARCH(1,1)-skew.Student-t	0.056420	4	0.016762	10
GARCH(1,1)-skew.GED	0.056500	5	0.016751	9
EGARCH(1,1)-norm	0.063464	13	0.016879	11
EGARCH(1,1)-skew.Student -t	0.058488	9	0.016390	1
EGARCH(1,1)-skew.GED	0.059245	10	0.016442	3
tGARCH(1,1)-norm	0.059597	11	0.016693	8
tGARCH(1,1)-skew.Student-t	0.057351	7	0.016621	5
tGARCH(1,1)-skew.GED	0.057795	8	0.016619	4
GJR-GARCH(1,1)-norm	0.056006	1	0.016675	7
GJR-GARCH(1,1)-skew.Student-t	0.056282	3	0.017103	13
GJR-GARCH(1,1)-skew.GED	0.056218	2	0.017102	12

*MSE is multiplied by 100

GARCH mudel koos eksogeensete tunnustega ehk GARCH-X

Volatiilsus võib sõltuda ka eksogeensestest tunnustest x .

- Sageli kasutatakse eksogeensete tunnuste lisamisel tingliku dispersiooni mudelisse lineaarset lähenemist.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \gamma_1 x_{1(t,t-1)} + \gamma_2 x_{2(t,t-1)}$$

Sellist võimalust kasutatakse programmis EViews.

Selline mudel aga ei taga, et dispersioon on alati positiivne.

- Alternatiivne lähenemine:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + f(x_1, x_2, \dots)$$

kus funktsioon f on rangelt positiivne.

- Eksogeensed tunnused võivad olla ka fiktiivsed tunnused, mis jagavad vaadeldava perioodi mitmeks alamperioodiks.

NÄIDE: GARCH-X mudel

Engle ja Patton (2001) kasutasid GARCH(1,1)-X mudelit Dow Jones tööstusindeksi volatiilsuse modelleerimiseks. Ajavahemik 23. aug 1988 – 22. aug 2000, vaatlusi kokku 3131.

Eksogeenseks tunnuseks x oli USA 3-kuuliste võlakirjade intressimäär (*T-bill rate*) viitaeg x_{t-1} .

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \varphi x_{t-1}$$

Sellise mudeli puuduseks on, et kui x_{t-1} on negatiivne, võib σ_t^2 tulla negatiivne. Seda ei tohi juhtuda.

Table 5. Results from the GARCH(1,1)-X model.

	Coefficient	Robust standard error
Constant	0.0608	0.0145
ω	−0.0010	0.0016
α	0.0464	0.0040
β	0.9350	0.0065
φ	0.0031	0.0005

Antud valimis $2,6 \leq x_t \leq 9,4$

GARCH-X ja multiplikatiivne heteroskedastiivsus

multiplicative heteroskedasticity

Eksogeensete tunnuste lisamiseks tingliku dispersiooni mudelisse võib kasutada eksponent-funktsiooni. Sellega on tagatud, et eksogeensetest tunnustest sõltuv liidetav on alati positiivne.

Multiplikatiivne heteroskedastiivsus: vealiikme dispersioon on eksponentfunktsioon selgitavate tunnuste vektorist.

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \exp\left(\lambda_0 + \lambda_1 x_{1(t,t-1)} + \lambda_2 x_{2(t,t-1)} + \dots\right)$$

Tihti kasutatakse eksogeensete tunnuste viitaegu.

Saab hinnata, kas eksogeensed tunnused (või nende viitajad) on statistiliselt olulised.

Parameetrite λ_i märgid näitavad, kas mõju on positiivne või negatiivne.

Parameetrite λ_i arvuliste hinnangute tõlgendamine on komplitseeritud.

NÄIDE: GARCH-X multiplikatiivse heteroskedastiivsusega

Kasutatud samu andmeid, mis Engle ja Patton kasutasid DJ tööstusindeksi tulumäära volatiilsuse modelleerimiseks, kus eksogeenseks tunnuseks oli USA 3-kuuliste võlakirjade intressimäära (*m-tbill*) viitaeg x_{t-1}

Kasutatud mudel

$$\sigma_t^2 = \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \exp(\lambda_0 + \lambda_1 x_{t-1})$$

DJRet	OPG			
	Coefficient	std. err.	z	P> z
DJRet				
_cons	.0605242	.0144363	4.19	0.000
HET				
m_tbill L1.	.1990014	.0221394	8.99	0.000
_cons	-5.480688	.2538943	-21.59	0.000
ARCH				
arch L1.	.0433233	.0037416	11.58	0.000
garch L1.	.941382	.0058892	159.85	0.000

Eksogeenne tunnus on statistiliselt oluline.

Keskväärtus võib sõltuda volatiilsusest (GARCH-M)

GARCH in mean

- Finantsteooria väidab, et mõnede finantsaegridade korral võib aegrea keskväärtus olla mõjutatud volatiilsuse poolt. Näiteks
 - suur hinna varieerumine ja kõrge inflatsioon (hindade tase) esinevad koos;
 - väärtpaberite korral tulumäära suur varieerumine ja suurem tulumäär esinevad koos (riskipreemia).
- Engle jt (1987) andsid sellise võimaluse GARCH-M spetsifikatsiooniga.
- Tüüpiliselt lisatakse keskväärtuse mudelisse kas tinglik dispersioon või standardhälve.

$$y_t = c + bx_t + \delta \sigma_t^2 + u_t, \quad u_t \sim N(0, \sigma_t) \quad \text{keskväärtuse mudel}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad \text{GARCH}(p,q)$$

Suurust δ võib interpreteerida kui riskipreemiat, sest investorid ootavad kompensatsiooni kõrgema riski eest.

NÄIDE: GARCH-M ja valuutakursid

Erinevate valuutade kurss USD suhtes,
 R on tulumäär.

1. jaan 2002-31. märts 2008, 5-minutiliste
 intervallidega. Kokku 657216 vaatlust.

$$R_{t+1} \equiv \alpha + \beta \cdot \sigma_{t+1|t}^2 + \varepsilon_{t+1}$$

$$\varepsilon_{t+1} = z_{t+1} \cdot \sigma_{t+1|t}, z_{t+1} \sim N(0, 1), E(\varepsilon_{t+1}) = 0$$

$$E(\varepsilon_{t+1}^2 | \Omega_t) = \sigma_{t+1|t}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_t^2 + \gamma_2 \sigma_t^2$$

*Risk aversion
 parameter*

Table 40.4 Daily risk-return trade-off in foreign exchange markets based on the GARCH-in-mean model

Parameters	EUR	JPY	GBP	CHF	AUD	CAD
α	-0.0005 (-1.46)	-0.0002 (-0.30)	-0.0009 (-2.25)	-0.0003 (-0.72)	-0.0008 (-2.26)	-0.0008 (-2.70)
β	5.1772 (0.47)	4.4206 (0.28)	29.065 (1.77)	0.8693 (0.08)	11.042 (1.28)	22.399 (1.83)
γ_0	1.09×10^{-7} (0.65)	1.69×10^{-6} (1.76)	3.37×10^{-7} (2.32)	2.60×10^{-7} (1.00)	6.97×10^{-7} (0.92)	2.45×10^{-7} (2.21)
γ_1	0.0301 (4.25)	0.0587 (4.57)	0.0430 (4.51)	0.0331 (4.24)	0.0541 (3.81)	0.0420 (4.82)
γ_2	0.9672 (116.10)	0.8922 (35.85)	0.9443 (73.13)	0.9617 (107.35)	0.9318 (50.04)	0.9502 (93.08)

Bali, T. G., and Yilmaz, K. The Intemporal Relation Between Expected Return and Risk on Currency. In: Lee, C.F., Lee, J.C (eds), *Handbook of Financial Econometrics and Statistics*, ch 40. 2015, Springer.

Deterministlik ja stohhastiline volatiilsus

Kõik vaadeldud volatiilsuse mudelid on **deterministlikud**: neis puudub juhuslik liige. Tinglik dispersioon on deterministlikult ära määratud eelmise ajaperioodi jääkliikme ja dispersiooniga:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

Puudub sama perioodi juhuslik liige.

Stohhastilise volatiilsuse korral esineb tingliku dispersiooni mudelis ka sama perioodi juhuslik komponent. Selline mudel lubab volatiilsusel muutuda, kui esineb mingi juhuslik sündmus.

Mudeleid on erinevaid

- Hestoni mudel;
- CEV mudel;
- SABR mudel (*Stochastic Alpha, Beta, Rho*)
- jt

Stohhastiliste mudelite hindamine on oluliselt komplitseeritum.
Seepärast pole need väga laialdast kasutamist leidnud.

Andmete sagedus ja GARCH mudelid

- Andmed võivad olla erineva sagedusega:
 - tunnised,
 - päevased,
 - nädalased,
 - kuised.
- GARCH mudel, mis sobib päevaste andmete modelleerimiseks, ei pruugi sobida kuiste andmete modelleerimiseks.

ARCH mudelite kasutamine

Volatiilsuse modelleerimine:

- inflatsioon,
- intressimäärad,
- aktsiaindeksid,
- valuutade vahetuskursid,
- riskiväärtuse VaR (*Value-at-Risk*) prognoosimine,
- jms

GARCH mudel võib olla ka mitmemõõtmeline.

Selliseid mudeleid käsitleme järgmises loengus.