

Mitmemõõtmelised aegridade mudelid

Brooks, C. „Introductory Econometrics for Finance“
Ch 8. Multivariate Models

Enders, W. „Applied Econometric Time Series“ 4th ed.
Ch 5. Multiequation Time-Series Models

Teemad

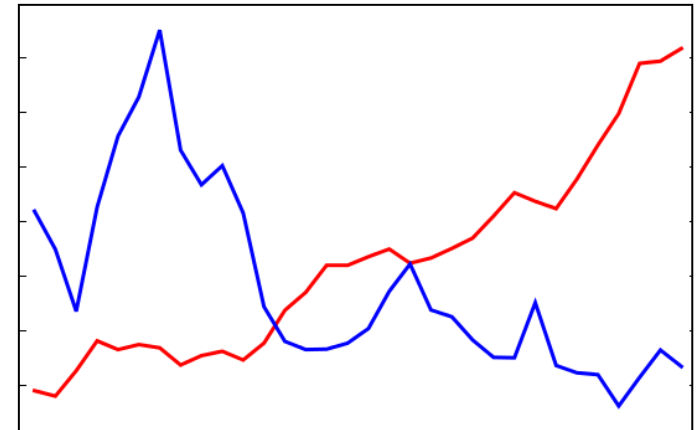
- Simultaansed võrrandid
 - endogeensed, eksogeensed ja eeldetermineeritud tunnused;
 - struktuurne ja standardne kuju;
 - identifitseerimise probleem
- Vektor-autoregressiivne mudel ehk VAR
 - VAR mudeli struktuurne ja standardkuju;
 - optimaalse viitaegade arvu määramine;
 - mudeli stabiilsuse kontroll.
- VAR mudeli jääkide testimine:
 - kas jäägid on valge müra;
 - kas jäägid alluvad normaaljaotusele.
- Grangeri põhjuslikkus ja eksogeensuse testimine VAR mudelis
- Impulssreaktsiooni funktsioon IRF
 - IRF leidmine ja probleemid sellega;
 - kohese mõju puudumine;
 - Cholesky dekompositsioon.
- Dispersiooni lahutus

VAR mudelid – miks?

- **Mitmemõõtmeline modelleerimine** (*multivariate modelling*): üheaegselt modelleeritakse mitut aegrida, mis on üksteisega vastasmõjus. On mitu võrrandit, mis moodustavad võrrandite süsteemi.
 - Näiteks vektorautoregressiivne mudel VAR (*Vector-AutoRegressive*)

Miks kasutatakse VAR modelleerimist?

- Prognoosimine.
- Dünaamika analüüs: ühe tunnuse aegrea šokkide mõju teiste tunnuste aegridadele:
 - impulssreaktsiooni funktsioon;
 - dispersiooni lahutus.



NÄIDE: nõudlus ja pakkumine, simultaansed võrrandid

D_t	nõutav kogus
S_t	pakutav kogus
P_t	hind
I_t	sissetulek

Kokku 3 võrrandit, mis korraga kehtivad.

Üheaegselt kehtivad võrrandid on **simultaansed võrrandid** (*simultaneous equations*).

Nõudlusfunktsioon $D_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + u_{1t}, \quad \alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0$

Pakkumisfunktsioon $S_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + u_{2t}, \quad \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$

Tasakaaluvõrrand $D_t = S_t$

Nõutav kogus D_t ja pakutav kogus S_t **endogeensed**.

Pakutav kogus S_t on pakkumisfunktsioonis sõltuv tunnus. Aga tasakaaluvõrrandis ei ole sõltuv tunnus.

Hind samal perioodil P_t , eelmisel perioodil P_{t-1} , sissetulek I_t **eksogeensed**

Simultaansete võrranditega mudel: struktuurne kuju

$$y_{1t} = \beta_{12}y_{2t} + \beta_{13}y_{3t} + \dots + \beta_{1n}y_{nt} + \\ + \gamma_{11}x_{1\tilde{t}} + \gamma_{12}x_{2\tilde{t}} + \dots + \gamma_{1K}x_{K\tilde{t}} + \varepsilon_{1t}$$

$$y_{2t} = \beta_{21}y_{1t} + \beta_{23}y_{3t} + \dots + \beta_{2n}y_{nt} + \\ + \gamma_{21}x_{1\tilde{t}} + \gamma_{22}x_{2\tilde{t}} + \dots + \gamma_{2K}x_{K\tilde{t}} + \varepsilon_{2t}$$

.....

$$y_{nt} = \beta_{n1}y_{1t} + \beta_{n2}y_{2t} + \dots + \beta_{nn-1}y_{n-1t} + \\ + \gamma_{n1}x_{1\tilde{t}} + \gamma_{n2}x_{2\tilde{t}} + \dots + \gamma_{nK}x_{K\tilde{t}} + \varepsilon_{nt}$$

$y_1, y_2, \dots, y_n$ – n **endogeenset**, ühiselt sõltuvat (*jointly dependent*) tunnust

$x_1, x_2, \dots, x_K$ – K **eeldetermineeritud** (*predetermined*) tunnust

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ – n juhuslikku liiget

$t = 1, 2, \dots, T$ – vaatluste arv kokku

$\tilde{t} \in \{t, t-1, t-2, \dots\}$

võivad olla ka viitajad

Struktuurne kuju peegeldab majandusnähtuse **struktuuri** ja samal ajal iseloomustab selle majandusnähtuse **käitumist**.
Ka käitumisvõrrandid.

Structural form, behavioural form

β_{ij}, γ_{ij} struktuursed parameetrid. Otse hinnata ei saa, sest endogeensed tunnused on ka võrrandite paremal poolel.

Tunnuste klassifikatsioon

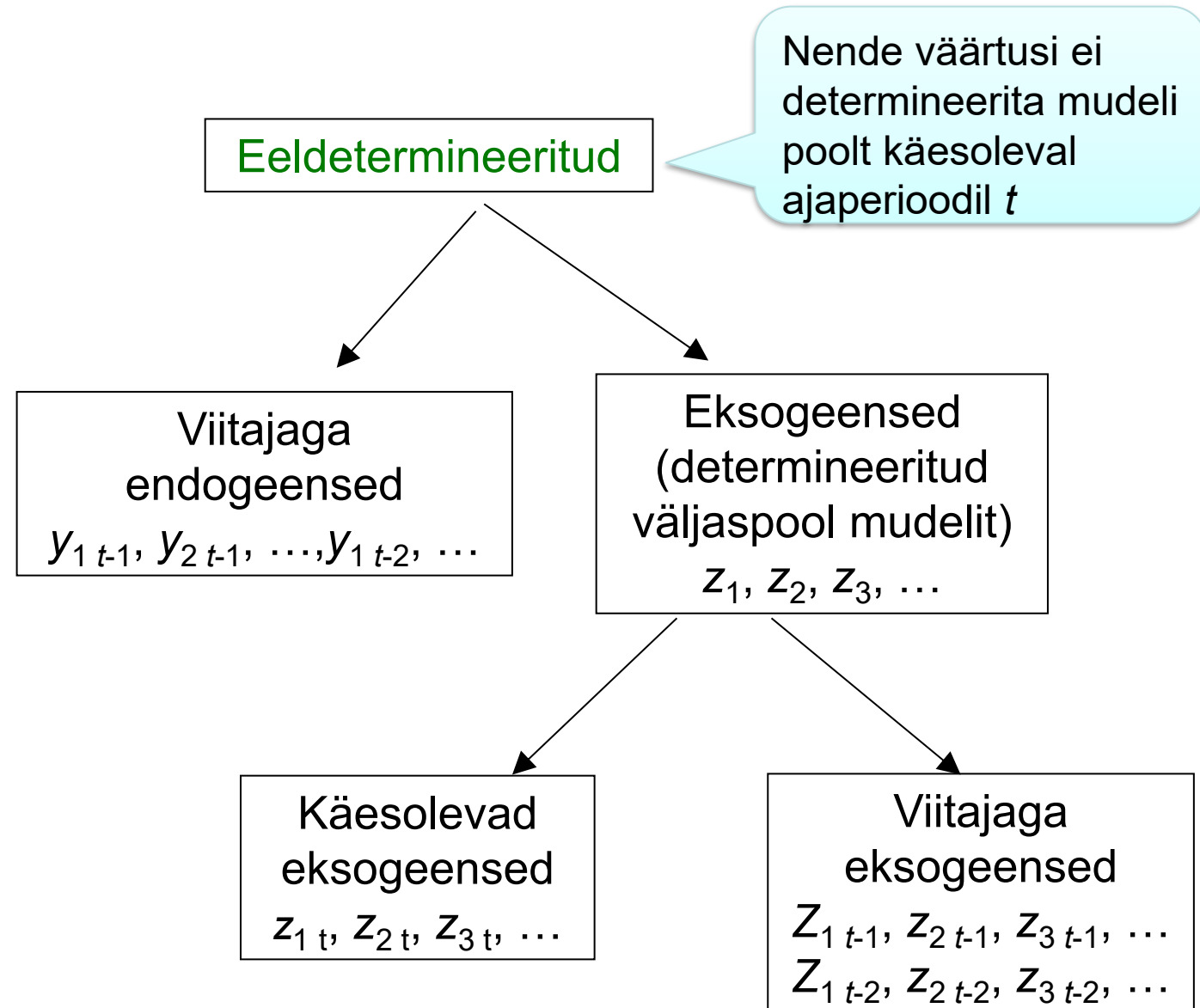
$$\begin{aligned} y_{1t} = & \beta_{12}y_{2t} + \beta_{13}y_{3t} + \dots + \beta_{1n}y_{nt} + \\ & + \gamma_{11}x_{1\tilde{t}} + \gamma_{12}x_{2\tilde{t}} + \dots + \gamma_{1K}x_{K\tilde{t}} + \varepsilon_{1t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{2t} = & \beta_{21}\mathbf{y}_{1t} + \beta_{23}\mathbf{y}_{3t} + \dots + \beta_{2n}\mathbf{y}_{nt} + \\ & + \gamma_{21}\mathbf{x}_{1\tilde{t}} + \gamma_{22}\mathbf{x}_{2\tilde{t}} + \dots + \gamma_{2K}\mathbf{x}_{K\tilde{t}} + \varepsilon_{2t} \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{nt} = & \beta_{n1} \mathbf{y}_{1t} + \beta_{n2} \mathbf{y}_{2t} + \dots + \beta_{nn-1} \mathbf{y}_{n-1t} + \\ & + \gamma_{n1} \mathbf{x}_{1\tilde{t}} + \gamma_{n2} \mathbf{x}_{2\tilde{t}} + \dots + \gamma_{nK} \mathbf{x}_{K\tilde{t}} + \varepsilon_{nt} \end{aligned}$$

Endogeensed: väärtused
determineeritakse mudeli siseselt.

 y_t 

Parameetrite hindamiseks standardkuju

Struktuursed võrrandid teisendatakse kujule, kus paremal pool endogeenseid tunnuseid pole.

Struktuurne kuju

[illegible]

Maatriks- arvutus

Standardkuju

$$\begin{aligned} y_{1t} &= a_{11}x_{1\tilde{t}} + a_{12}x_{2\tilde{t}} + \dots + a_{1K}x_{K\tilde{t}} + u_{1t} \\ y_{2t} &= a_{21}x_{1\tilde{t}} + a_{22}x_{2\tilde{t}} + \dots + a_{2K}x_{K\tilde{t}} + u_{2t} \\ &\vdots \\ y_{nt} &= a_{n1}x_{1\tilde{t}} + a_{n2}x_{2\tilde{t}} + \dots + a_{nK}x_{K\tilde{t}} + u_{nt} \end{aligned}$$

Standardkujul ehk redutseeritud kujul (*reduced form*) on endogeensed tunnused esitatud eeldetermineeritud tunnuste ja juhuslike liikmete kaudu.

Standardkuju võrrandeid saab eraldi hinnata.

Struktuurne *versus* standardkuju

- **Struktuurne** kuju kirjeldab majandusprobleemi erinevaid aspekte, majandussubjektide käitumist.
- **Standardkuju** korral on endogeensed tunnused väljendatud eeldetermineeritud tunnuste ja juhuslike liikmete kaudu.
- **Standardkuju** on parameetrite hindamiseks parem, kuid majandusprotsesside modelleerimine nõuab tihti **struktuurset** kuju.
 - Paljude autorite arvates on mudeli standardkuju majandusteoorial mittepõhinev (*atheoretical*) ja selle tulemusi on raske teoreetiliselt interpreteerida.
 - Nende arvates on standardkuju struktuurse mudeli redutseeritud ehk lihtsustatud vorm. Struktuurset kuju on parem interpreteerida.

Identifikatsiooniprobleem

The parameter identification problem

Standardkuju parameetrite a_{ij} hinnangud saame kätte, kasutades iga võrrandi jaoks eraldi OLS-i. Aga kas nende põhjal saab arvutada struktuurse kuju parameetreid?

Strukturne kuju

$$\begin{aligned}
y_{1t} &= \beta_{12} y_{2t} + \beta_{13} y_{3t} + \dots + \beta_{1n} y_{nt} + \\
&\quad + \gamma_{11} x_{1\tilde{t}} + \gamma_{12} x_{2\tilde{t}} + \dots + \gamma_{1K} x_{K\tilde{t}} + \varepsilon_{1t} \\
y_{2t} &= \beta_{21} y_{1t} + \beta_{23} y_{3t} + \dots + \beta_{2n} y_{nt} + \\
&\quad + \gamma_{21} x_{1\tilde{t}} + \gamma_{22} x_{2\tilde{t}} + \dots + \gamma_{2K} x_{K\tilde{t}} + \varepsilon_{2t} \\
&\vdots \\
y_{nt} &= \beta_{n1} y_{1t} + \beta_{n2} y_{2t} + \dots + \beta_{nn-1} y_{n-1t} + \\
&\quad + \gamma_{n1} x_{1\tilde{t}} + \gamma_{n2} x_{2\tilde{t}} + \dots + \gamma_{nK} x_{K\tilde{t}} + \varepsilon_{nt}
\end{aligned}$$



Standardkuju

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \textcolor{teal}{a}_{11}x_{1\tilde t} + \textcolor{teal}{a}_{12}x_{2\tilde t} + \dots + \textcolor{teal}{a}_{1K}x_{K\tilde t} + u_{1t} \\[6pt] y_{2t} &= \textcolor{teal}{a}_{21}x_{1\tilde t} + \textcolor{teal}{a}_{22}x_{2\tilde t} + \dots + \textcolor{teal}{a}_{2K}x_{K\tilde t} + u_{2t} \\[6pt] &\vdots \\[6pt] y_{nt} &= \textcolor{teal}{a}_{n1}x_{1\tilde t} + \textcolor{teal}{a}_{n2}x_{2\tilde t} + \dots + \textcolor{teal}{a}_{nK}x_{K\tilde t} + u_{nt} \end{aligned}$$

Struktuurse kuju parameetreid on enamasti rohkem kui standardkujul.

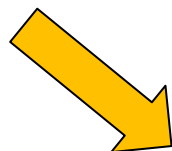
Aga m tundmatu leidmiseks on vaja vähemalt m võrrandit. Järelikult süsteem on tihti **alaidendifitseeritud** (*unidentified*) ja struktuurse kuju parameetrite leidmiseks on tihti vaja lisaeeldusi.

VAR MUDEL

Simsi kriitika ja VAR idee

- Probleemid simultaansete võrrandite korral.
 - Osa tunnuseid on endogeensed, osa on eeldetermineeritud (eksogeensed või viitajaga endogeensed).
 - Peame uurima identifitseerimise probleemi: süsteem peab olema kas täpselt identifitseeritud või üleidentifitseeritud.
- C. Sims (1980): kui on tegemist simultaansusega, siis kõik tunnused peavad olema **võrdväärised**, st ei tohiks teha vahet endogeensete ja eksogeensete tunnuste vahel.

Ühemõõtmelised
autoregressiivsed mudelid



Simultaanseid
võrrandid



Vektor-autoregressiivsed

Vektor-autoregressiivne ehk VAR mudel

- Üldiselt n tunnust, n võrrandit.
- Kõik tunnused on endogeensed: väärtused määratud mudeli siseselt.
- Kõikidel tunnustel kõikides võrrandites ühepalju viitaegu.

$$\begin{aligned}
y_{1t} &= b_{10} + b_{12}y_{2t} + b_{13}y_{3t} + \dots + b_{1n}y_{nt} + \sum_{i=1}^k \gamma_{11,i}y_{1t-i} + \sum_{i=1}^k \gamma_{12,i}y_{2t-i} + \dots + \sum_{i=1}^k \gamma_{1n,i}y_{nt-i} + \varepsilon_{1t} \\
y_{2t} &= b_{20} + b_{21}y_{1t} + b_{23}y_{3t} + \dots + b_{2n}y_{nt} + \sum_{i=1}^k \gamma_{21,i}y_{1t-i} + \sum_{i=1}^k \gamma_{22,i}y_{2t-i} + \dots + \sum_{i=1}^k \gamma_{2n,i}y_{nt-i} + \varepsilon_{2t} \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

ε_{it} on impulsid, šokid, innovatsioonid (impulses, shocks, innovations)

$$y_{nt} = b_{n0} + b_{n1}y_{1t} + b_{n3}y_{3t} + \dots + b_{nn-1}y_{n-1t} + \sum_{i=1}^k \gamma_{n1,i}y_{1t-i} + \sum_{i=1}^k \gamma_{n2,i}y_{2t-i} + \dots + \sum_{i=1}^k \gamma_{nn,i}y_{nt-i} + \varepsilon_{nt}$$

Kohene mõju.
Võib ka puududa.

Igal tunnusel $y_1, \dots, y_n$ on igas võrrandis k viitaega.

See on VAR mudeli struktuurne kuju.

Kahemõõtmeline VAR(1) mudel, üleminek standardkujule

Kahemõõtmeline vektor-autoregressiivne mudel 1. järku viitaegadega VAR(1), struktuurne kuju.

$$\begin{aligned}y_{1t} &= b_{10} - b_{12}y_{2t} + \gamma_{11}y_{1t-1} + \gamma_{12}y_{1t-1} + \varepsilon_{1t} \\y_{2t} &= b_{20} - b_{21}y_{1t} + \gamma_{21}y_{1t-1} + \gamma_{22}y_{2t-1} + \varepsilon_{2t}\end{aligned}\quad \begin{aligned}\varepsilon_{it} &\sim i.i.d(0, \sigma_{\varepsilon i}^2), \\ \text{Cov}(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) &= 0\end{aligned}$$

Maatrikskuju

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t-1} \\ y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{Y}_t = \mathbf{\Gamma}_0 + \mathbf{\Gamma}_1\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{\varepsilon}_t$$

Üleminekuks standardkujule
korrutatakse vasakult poolt
maatriksi $\mathbf{B}$ pöördmaatriksiga

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Gamma}_0 + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{\varepsilon}_t$$

Standardkuju

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

kus standardkuju maatriksid
struktuurse kuju maatriksite kaudu

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Gamma}_0; \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Gamma}_1; \quad \mathbf{u}_t = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{\varepsilon}_t$$

NÄIDE: Rahapakkumine ja intressimäär

Kanada andmed 1979 I kv – 1987 IV kv (kvartaalsed).

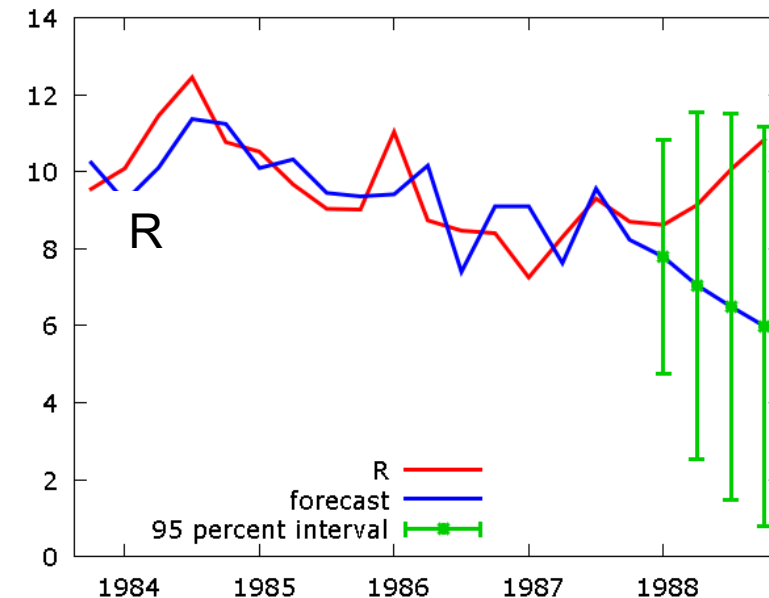
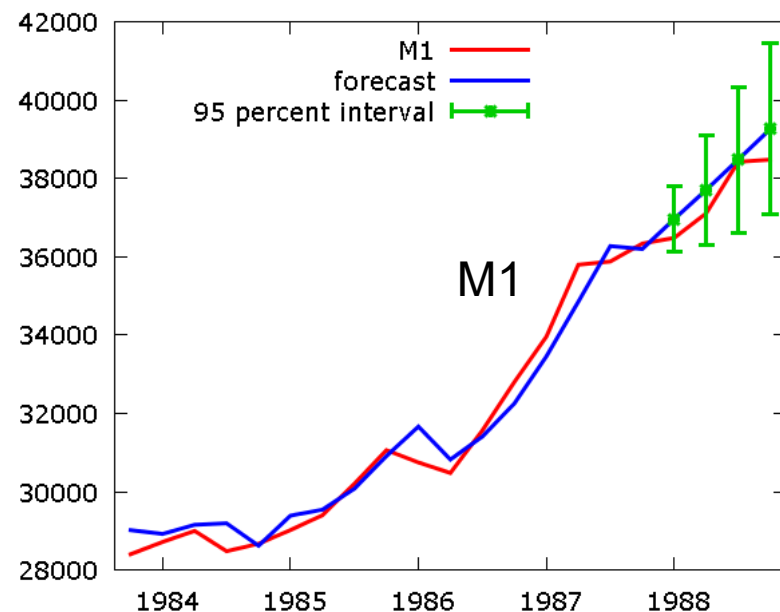
Raha pakkumine $M1$ (mln CAD), intressimäär R .

VAR(2) mudel

$$M1_t = 1452 + 1,04M1_{t-1} - 0,045M1_{t-2} - 235R_{t-1} + 160R_{t-2} + \varepsilon_{1t}$$

$$R_t = 5,8 + 0,0011M1_{t-1} - 0,0013M1_{t-2} + 1,07R_{t-1} - 0,223R_{t-2} + \varepsilon_{2t}$$

Tehtud prognoos 4 kvartalit edasi, võrdluseks ka tegelikud väärtused.



NÄIDE: Bitcoinini hinnad ja muud finantsnäitajad

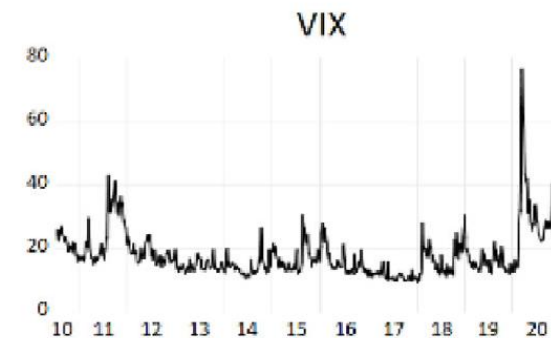
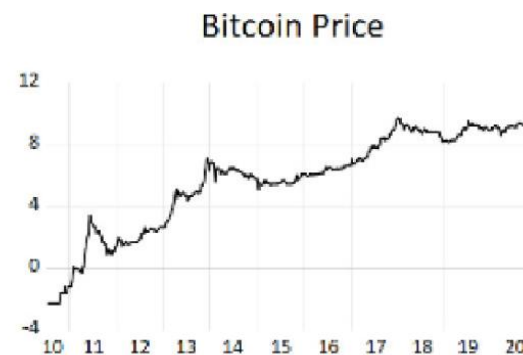
Chi ja Shin kasutasid VAR mudelit analüüsimaks inflatsiooni šokkide mõju bitcoini hindadele.

21. juuli 2010 kuni 31. dets 2020.
Nädalane sagedus, kokku 539 vaatlust.

VAR mudelis 6 aegrida:

- 1) bitcoini hinna logaritm;
- 2) kulla hinna logaritm;
- 3) S&P 500 logaritm;
- 4) volatiilsuse indeks VIX;
- 5) 1-aastased USA võlakirjad (*Treasury Bill rate*);
- 6) inflatsiooni ootused.

Choi, S., & Shin, J. (2022). Bitcoin: An inflation hedge but not a safe haven. *Finance Research Letters*, 46, 102379.



m -mõõtmeline VAR mudel standardkujul

Üldiselt võib olla m tunnust k viitajaga.

Viitaegade arv kõigil ühesugune.

$$y_{1t} = \alpha_1 + \sum_{i=1}^k \beta_{1i} y_{1t-i} + \sum_{i=1}^k \gamma_{1i} y_{2t-i} + \dots + \sum_{i=1}^k \theta_{1i} y_{mt-i} + u_{1t}$$

$$y_{2t} = \alpha_2 + \sum_{i=1}^k \beta_{2i} y_{1t-i} + \sum_{i=1}^k \gamma_{2i} y_{2t-i} + \dots + \sum_{i=1}^k \theta_{2i} y_{mt-i} + u_{2t}$$

.....

$$y_{mt} = \alpha_m + \sum_{i=1}^k \beta_{mi} y_{1t-i} + \sum_{i=1}^k \gamma_{mi} y_{2t-i} + \dots + \sum_{i=1}^k \theta_{mi} y_{mt-i} + u_{mt}$$

Kõik tunnused on **endogeensed**: nende väärtused ajahetkel t on määratud süsteemi siseselt.

Vektorkujul
$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{Y}_{t-2} + \dots + \mathbf{A}_k \mathbf{Y}_{t-k} + \mathbf{u}_t$$

$\mathbf{Y}_t$ ($m \times 1$) mõõtmeline tunnuste vektor

$\mathbf{A}_0$ ($m \times 1$) mõõtmeline vabaliikmete vektor

$\mathbf{A}_i$ ($m \times m$) mõõtmelised koefitsientide matriksid, k tükki

$\mathbf{u}_t$ ($m \times 1$) mõõtmeline juhuslike liikmete vektor

$m + km^2$ Hinnatavate parameetrite arv kokku.

Parameetreid on väga palju, võib olla üleparametriseeritud, mitmed koefitsiendid võivad olla nullid. Aga kitsendusi ei tohi panna: valesti pandud kitsendused moonutavad seoseid.

VAR mudeli hindamismeetodid

Standardkuju iga võrrandit hinnatakse eraldi, kasutades

- vähimruutude meetodit OLS

Kui kehtivad järgmised eeldused:

- võrrandite paremal pool ainult eeldetermineeritud tunnused;
- juhuslikud liikmed on konstantse dispersiooniga;
- puudub juhuslike liikmete autokorrelatsioon.

Siis on hinnangud mõjusad ja asümptootiliselt efektiivsed.

- suurima tõepära meetodit ML.
 - Stata kasutatakse seda

Kas aegread peavad olema statsionaarsed?

- Sims (1980), Doan(1992) jt: ei tohiks diferentsida ka siis, kui esineb ühikjuur. VAR analüüsi eesmärgiks on tunnuste vaheliste seoste leidmine. Diferentsimisel kaob informatsioon pikaajalistest seostest.
- Teine seisukoht: enne VAR mudeli hindamist tuleks saavutada statsionaarsus. Statsionaarsus on vajalik testimiseks.
 - mittestatsionaarsete aegridade korral võib esineda näiv regressioon (mudeli kordajate t -testid);
 - Grangeri kausaalsuse testimine eeldab statsionaarsust.
- Enamik autoreid kasutab VAR-i **statsionaarsete** aegridade korral.
- Alternatiiv, kui on mittestatsionaarsed: kasutada vektor veaparandusmudelit VECM (*vector error correction model*).

Jäakliikmete kovariatsiooni maatriks

Milline arvuline suurus iseloomustab tervet süsteemi korraga?

Jäakliikmete kovariatsiooni maatriksi determinant

*determinant of
covariation matrix*

Jäakliikmete
kovariatsiooni
maatriks m -
mõõtmelisel juhul

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \text{Var}(u_{1t}) & \text{Cov}(u_{1t}, u_{2t}) & \text{Cov}(u_{1t}, u_{3t}) & \cdots & \text{Cov}(u_{1t}, u_{mt}) \\ \text{Cov}(u_{2t}, u_{1t}) & \text{Var}(u_{2t}) & \text{Cov}(u_{2t}, u_{3t}) & \cdots & \text{Cov}(u_{2t}, u_{mt}) \\ \text{Cov}(u_{3t}, u_{1t}) & \text{Cov}(u_{3t}, u_{2t}) & \text{Var}(u_{3t}) & \cdots & \text{Cov}(u_{3t}, u_{mt}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(u_{mt}, u_{1t}) & \text{Cov}(u_{mt}, u_{2t}) & \text{Cov}(u_{mt}, u_{3t}) & \cdots & \text{Var}(u_{mt}) \end{pmatrix}$$

$\text{Cov}(u_{it}, u_{kt})$ on kovariatsioon kahe erineva võrrandi jäakliikmete vahel.

Jäakliikmete kovariatsiooni maatriksit kasutatakse mitmete näitajate arvutamisel, mis iseloomustavad võrrandsüsteemi kui tervikut.

Märkus: mõnikord nimetatakse ka jäakliikmete dispersiooni-kovariatsioonimaatriksiks, sest diagonaalil on dispersioonid. Aga dispersioonid on kovariatsioonid iseendaga.

Statistikud terve VAR süsteemi jaoks

Kovariatsiooni maatriksi determinant

$$|\hat{\Omega}|$$

Mida väiksem, seda parem.

Logaritmiline tõepära
(*log-likelihood*)

$$l = -\frac{T}{2} \left\{ k(1 + \ln 2\pi) + \ln |\hat{\Omega}| \right\}$$

Suurima tõepära meetodi korral
seda maksimeeritakse.

Informatsioonikriteeriumid.
Võib kasutada erinevate VAR
mudelite võrdlemiseks.
Mida väiksem, seda parem.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Akaike} & \text{AIC} = -\frac{2l}{T} + \frac{p}{T} \cdot 2 \\ \text{Schwarzi-Bayesi} & \text{SBIC} = -\frac{2l}{T} + \frac{p}{T} \cdot \ln T \quad \text{Parameetrite lisamise} \\ & \quad \text{suhtes konservatiivsem} \\ \text{Hannan-Quinni} & \text{HQIC} = -\frac{2l}{T} + \frac{p}{T} \cdot 2 \ln(\ln T) \quad \text{AIC ja BIC vahepealne} \end{array} \right.$$

Lõpliku prognoosi viga

(Akaike poolt soovitatud enne AIC kasutuselevõttu)

$$\text{FPE} = |\hat{\Omega}| \frac{T+p}{T-p}$$

final predict error

T on aegridade pikkus, p parameetrite arv kõigis võrrandites kokku, $p = (k \cdot m + 1)m$
 m võrrandite (tunnuste) arv ja k viitaegade arv igas võrrandis.

Märkus: on kasutusel ka teistsugused valemid. Siin toodud need, mida kasutatakse Statas.

Optimaalse viitaegade arvu määramine

- Majandus- või finantsteooria üldiselt ei ütle, kui pikka ajavahemikku minevikus tuleks arvesse võtta ehk milline on maksimaalne viitaegade arv.
- Kui liiga palju viitaegasid, siis on probleem
 - vabadusastmete arvuga (vaja hinnata liiga palju parameetreid);
 - multikollineaarsusega.
- Vähe viitaegasid: mudeli spetsifikatsioonivead (olulised tunnused puudu).
- Optimaalse viitaegade arvu hindamiseks kasutatakse erinevaid meetodeid:
 - võrranditele ühiste kitsenduste testimine (*cross-equation restrictions*) tõepära suhte LR testiga;
 - informatsioonikriteeriumid Akaike, Schwarzi, Hannan-Quinni;
 - lõpliku prognoosi viga FPE (*Final Prediction Error*).

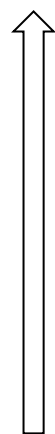
Järjestikused LR testid, metoodika

- Alustatakse etteantud viitaegade arvuga k : kitsendamata (*Unrestricted*) mudel.
- Võrreldakse kitsendatud (*Restricted*) mudeliga, kus viitaegade arv $k-1$.
- Teststatistik $LR = T \left(\ln |\hat{\mathbf{\Omega}}_R| - \ln |\hat{\mathbf{\Omega}}_U| \right) \sim \chi^2(s)$ $|\hat{\mathbf{\Omega}}|$ jääkliikmete kovariatsiooni maatriksi determinant.
- Kui tulemus H_0 , võib viitaegade arvu vähendada, kitsenduste panekul süsteem oluliselt ei halvene.

Järgmine samm:

- uus kitsendamata mudel viitaegade arvuga $k-1$;
 - kitsendatud mudel viitaegade arvuga $k-2$;
 - testitakse, kas võib vastu võtta nullhüpoteesi.
- Jätkatakse seni, kuni järjekordsel viitaegade vähendamisel süsteemi kirjeldatavuse tase halveneb niivõrd, et nullhüpotees on ümber lükatud. Siis enam viitaegasid vähendada ei tohi.

Näiteks



$$k = 1 \quad \mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

$\Uparrow \mathbf{H}_1$

$$k = 2 \quad \mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{Y}_{t-2} + \mathbf{u}_t$$

$\Uparrow \mathbf{H}_0$

$$k = 3 \quad \mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{Y}_{t-2} + \mathbf{A}_3 \mathbf{Y}_{t-3} + \mathbf{u}_t$$

Kasutada VAR(2) mudelit

Informatsioonikriteeriumite kasutamine

- Informatsioonikriteeriumite kasutamine on teine võimalus optimaalse viitaegade arvu määramiseks.
- Hinnatakse erinevate viitaegade arvuga mudeleid ja vaadatakse järgmisi informatsioonikriteeriumeid
 - Akaike,
 - Schwarzi,
 - Hannan-Quinni.
- Valitakse selline viitaegade arv, mille korral on informatsioonikriteerium kõige väiksem.
- Soovitused*)
 - kuiste andmete korral kõige parem Akaike kriteerium AIC;
 - kvartaalsete andmete korral:
 - suure valimi korral Hannan-Quinni HQIC;
 - kui valimi maht väiksem kui 120, siis Schwarzi SBIC.

*) Ivanov, V., & Kilian, L. (2001). *A practitioner's guide to lag-order selection for vector autoregressions* (Vol. 2685). London: Centre for Economic Policy Research.

NÄIDE: tööstustoodang, töötuse määr ja intressimäärad, I

USA, 1960 I kv – 2012 IV kv, kvartaalsed andmed.

Tööstustoodangu indeks

IndProd

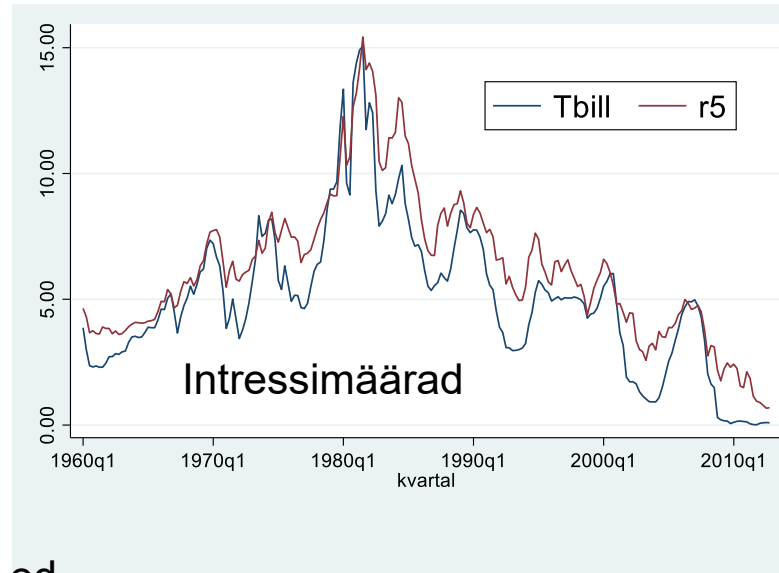
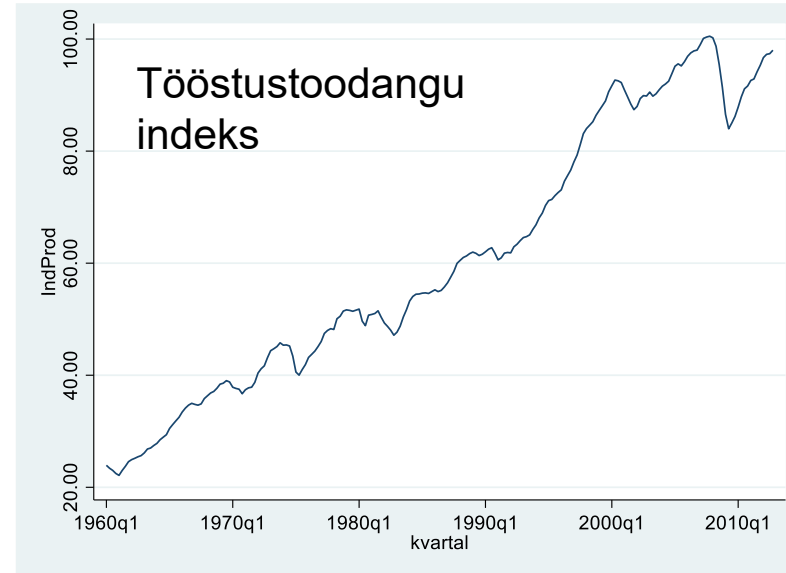
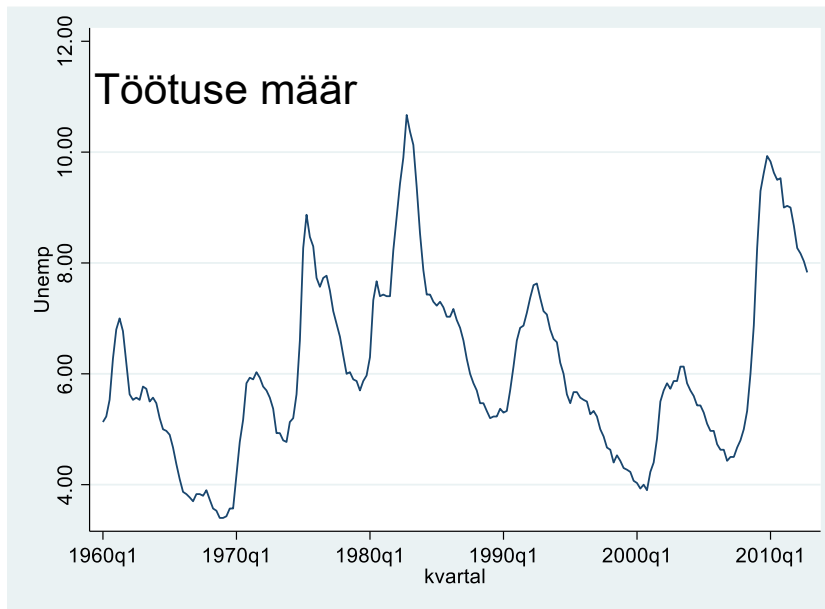
töötuse määr

Unemp

3-kuuliste võlakirjade intressimäär

Tbill

5-aastaste USA võlakirjade intressimäär r5



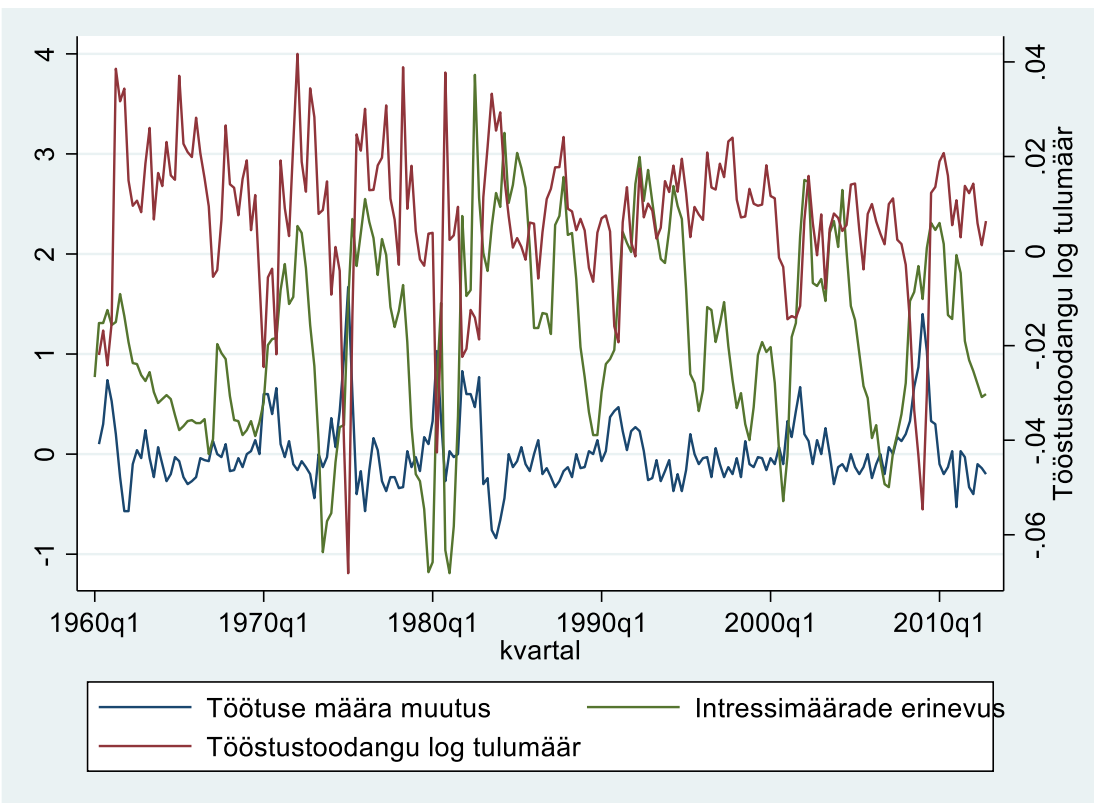
NÄIDE: tööstustoodang, töötuse määr ja intressimäärad, II

Statsionaarsuse saavutamiseks on leitud

tööstustoodangu indeksi logaritmiline tulumäär $\text{ld_ip} = \ln\left(\frac{\text{IndProd}_t}{\text{IndProd}_{t-1}}\right) = y_1$

töötuse määra muutus (diferents) $\text{d_ur} = \Delta(\text{Unempl}) = y_2$

intressimäärade erinevus (*spread*) $s = r5 - \text{Tbill} = y_3$



VAR(k) süsteemis on 3 võrrandit, k viitaega.

$$y_{1t} = \alpha_1 + \sum_{i=1}^k \beta_{1i} y_{1t-i} + \sum_{i=1}^k \gamma_{1i} y_{2t-i} + \sum_{i=1}^k \delta_{1i} y_{3t-i} + u_{1t}$$
$$y_{2t} = \alpha_2 + \sum_{i=1}^k \beta_{2i} y_{1t-i} + \sum_{i=1}^k \gamma_{2i} y_{2t-i} + \sum_{i=1}^K \delta_{2i} y_{3t-i} + u_{2t}$$
$$y_{3t} = \alpha_3 + \sum_{i=1}^k \beta_{3i} y_{1t-i} + \sum_{i=1}^k \gamma_{3i} y_{2t-i} + \sum_{i=1}^K \delta_{3i} y_{3t-i} + u_{3t}$$

NÄIDE: sobiva viitaegade arvu leidmine

Maksimaalseks viitaegade arvuks võetud 5 (soovituslik kvartaalsete andmete korral).

Hinnatakse erinevate viitaegade arvuga (*Lag*) VAR süsteeme: 5, 4, ..., 0 viitaega.

Et tulemused oleksid võrreldavad, peab erinevate viitaegade arvuga mudelites olema aegridade pikkus ühesugune. Selleks on valimit algusest piiratud, et oleks võimalik leida maksimaalselt 5 viitaega.

LL logaritmiline tõepära;
LR tõepära suhte teststatistik;
df vabadusastmete arv;
p LR statistikule vastav olulisuse tõenäosus.

Edasi ülejäänud näitajad.

Sample: 1961q3 thru 2012q4

Number of obs = 206

Lag	LL	LR	df	p	FPE	AIC	HQIC	SBIC
0	330.837				8.3e-06	-3.18289	-3.16329	-3.13442
1	557.38	453.09	9	0.000	1.0e-06	-5.29495	-5.21655*	-5.10109*
2	565.696	16.633	9	0.055	1.0e-06	-5.28831	-5.15111	-4.94906
3	577.473	23.554*	9	0.005	9.9e-07*	-5.31527*	-5.11927	-4.83063
4	585.332	15.717	9	0.073	1.0e-06	-5.30419	-5.04938	-4.67416
5	592.212	13.761	9	0.131	1.0e-06	-5.28361	-4.97001	-4.50819

* optimal lag

$p = 0,005$ on kitsenduste LR testi tulemus, kui viitaegade arvu vähendame 3->2

LR test soovitab 3 viitaega.

FPE ja AIC soovitavad 3, HQIC ja SBIC soovitavad 1.

Valime 3 viitaega.

NÄIDE: VAR mudeli hindamise aruanne, I

Aruanne on pikk.

Esimene osa: terve süsteemi statistikud, informatsioonikriteeriumid, kolme võrrandi näitajad.

logaritmiline tõepära
lõpliku prognoosi viga
kovariatsiooni
maatriksi determinant

Vector autoregression

Sample: **1961q1** thru **2012q4**

Number of obs = **208**

Log likelihood = **574.6529**

AIC = **-5.237047**

FPE = **1.07e-06**

HQIC = **-5.042404**

Det(Sigma_ml) = **8.00e-07**

SBIC = **-4.755672**

Equation	Parms	RMSE	R-sq	chi2	P>chi2
ld_ip	10	.012408	0.4061	142.236	0.0000
d_ur	10	.238132	0.5203	225.6477	0.0000
s	10	.469662	0.7724	706.0838	0.0000

Iga võrrandi jaoks eraldi

Parms parameetrite arv $1 + 3^2$

RMSE juuritud ruutkeskmise viga

R-sq determinatsioonikordaja

P>chi2 näitab, kas see
võrrand tervikuna on
statistiliselt oluline (LR test).

NÄIDE: VAR mudeli hindamise aruanne, II

Esimese võrrandi aruanne, kus sõltuvaks `ld_ip`

Võrrand
(sõltuv tunnus)

Tunnuse enda
viitajad

Teiste
tunnuste
viitajad

	Coefficient	Std. err.	z	P> z	[95% conf. interval]	
ld_ip						
ld_ip						
L1.	.5545049	.0985866	5.62	0.000	.3612788	.7477311
L2.	-.0900057	.103401	-0.87	0.384	-.2926679	.1126564
L3.	.1924135	.0982229	1.96	0.050	-.0000998	.3849269
d_ur						
L1.	-.0063937	.0050882	-1.26	0.209	-.0163663	.0035789
L2.	.0071884	.0052436	1.37	0.170	-.003089	.0174657
L3.	.0047991	.0046689	1.03	0.304	-.0043517	.0139499
s						
L1.	.0013731	.001795	0.76	0.444	-.0021449	.0048912
L2.	.0006631	.0025374	0.26	0.794	-.0043101	.0056362
L3.	.0006503	.0018325	0.35	0.723	-.0029414	.004242
_cons	-.0008118	.0018556	-0.44	0.662	-.0044487	.0028252

Teatud
viitaegade
kordajad võivad
olla statistiliselt
mitteolulised.

LR testi järgi (eelmine slaid) oli võrrand tervikuna statistiliselt oluline.

NÄIDE: VAR mudeli hindamise aruanne, III

Teise võrrandi aruanne, kus sõltuvaks d_ur

d_ur	ld_ip					
	L1.	-7.156381	1.892086	-3.78	0.000	-10.8648
	L2.	.5197127	1.984483	0.26	0.793	-3.369803
	L3.	-2.563641	1.885105	-1.36	0.174	-6.258379
	d_ur					
	L1.	.3415206	.0976527	3.50	0.000	.1501249
	L2.	-.0630381	.1006366	-0.63	0.531	-.2602821
	L3.	-.0422616	.0896053	-0.47	0.637	-.2178847
	s					
	L1.	-.0117866	.0344492	-0.34	0.732	-.0793057
	L2.	.0036597	.0486976	0.08	0.940	-.0917859
	L3.	-.071255	.0351703	-2.03	0.043	-.1401876
	_cons	.1652309	.035613	4.64	0.000	.0954308

LR testi järgi oli võrrand tervikuna statistiliselt oluline.

Kolmanda võrrandi aruanne, kus sõltuvaks s.

s	ld_ip					
	L1.	-1.764213	3.73172	-0.47	0.636	-9.07825
	L2.	-.9524357	3.913954	-0.24	0.808	-8.623645
	L3.	-3.039262	3.717953	-0.82	0.414	-10.32632
	d_ur					
	L1.	.3237642	.1925983	1.68	0.093	-.0537215
	L2.	-.3086322	.1984833	-1.55	0.120	-.6976524
	L3.	.1766491	.1767266	1.00	0.318	-.1697287
	s					
	L1.	1.033164	.0679434	15.21	0.000	.8999977
	L2.	-.345819	.0960453	-3.60	0.000	-.5340643
	L3.	.1757318	.0693657	2.53	0.011	.0397776
	_cons	.1996016	.0702387	2.84	0.004	.0619363

LR testi järgi oli võrrand tervikuna statistiliselt oluline.

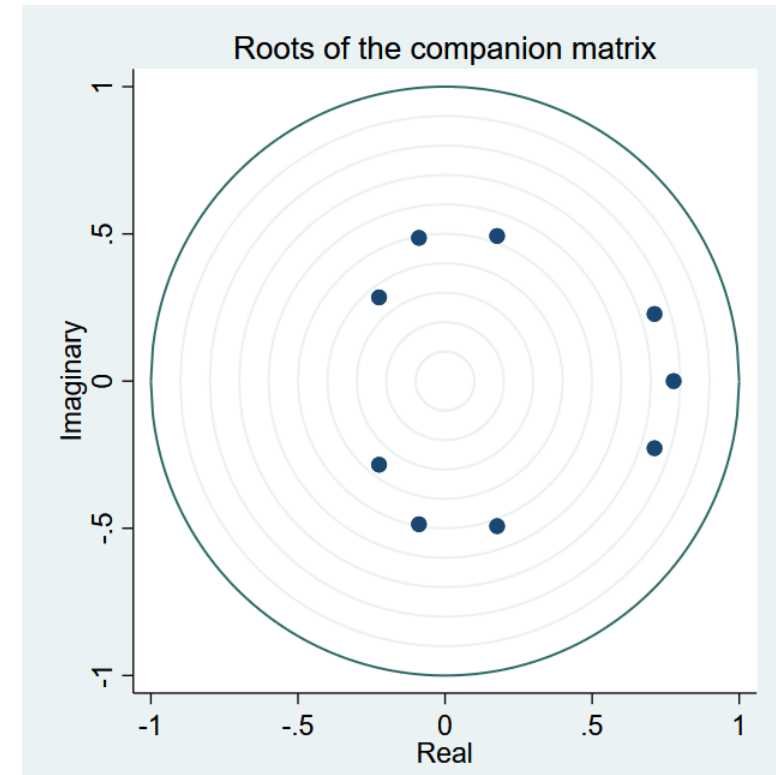
Kas VAR mudel on stabiilne?

VAR mudel on stabiilne, kui matriksi **A** (vt VAR vektorkujul) omaväärtused (*eigenvalues*) on ühikringis (moodulid < 1).

Näiteks

Eigenvalue stability condition		
Eigenvalue		Modulus
.7771009		.777101
.71211 + .228053i		.747736
.71211 - .228053i		.747736
.176985 + .4927905i		.523609
.176985 - .4927905i		.523609
-.08872604 + .4863306i		.494358
-.08872604 - .4863306i		.494358
-.2243245 + .2841975i		.362063
-.2243245 - .2841975i		.362063

All the eigenvalues lie inside the unit circle.
VAR satisfies stability condition.



See VAR mudel on stabiilne, sest omaväärtused jäävad ühikringi sisse.

Kui VAR mudel pole stabiilne, siis standardvead pole õiged.

VAR MUDELI JÄÄKLIIKMETE TESTIMINE

Jääkliikmete testid

VAR mudelit võib vaadelda kui filtrit, mis teisendab aegridade rühma (m aegrida) m –mõõtmeliseks valgeks müraks.

Testimiseks tuleb kasutada mitmemõõtmelisi teste, mis on ühemõõtmeliste testide üldistused.

- Kas jäägid on valge müra, st autokorrelatsioon puudub? Erinevad testid:
 - Lagrange kordajate LM test (*Lagrange Multiplier test*);
 - mitmemõõtmeline Portmanteau test;
 - Rao F -test.
- Jääkide normaaljaotuse testimine. Oluline, kuna suurima tõepära meetodi kasutamine eeldab seda.
 - Jarque-Bera test mitmemõõtmelise normaaljaotuse kohta.

Valge müra LM test

Põhineb Breusch-Godfrey autokorrelatsiooni testil.
On selle laiendus mitmemõõtmelisele juhule.

Kui VAR mudelis on m võrrandit, siis jääke on m .
Saab koostada uue, laiendatud (*augmented*) VAR mudeli, kus on nende jääkliikmete viitajad.
Jääkliikmete viitaegade järk on s .

Teststatistik $LM_s = (T - d - 0,5) \left(\ln |\hat{\mathbf{\Omega}}| - \ln |\hat{\mathbf{\Omega}}_s| \right) \sim \chi^2(m^2)$

$\hat{\mathbf{\Omega}}$ hinnatud VAR mudeli jääkliikmete kovariatsiooni maatriks

$\hat{\mathbf{\Omega}}_s$ laiendatud VAR mudeli jääkliikmete kovariatsiooni maatriks,
 d laiendatud VAR mudeli parameetrite arv.

Nullhüpoteesi korral jääkide autokorrelatsioon puudub, jäägid on valge müra.
Järelikult kogu autokorrelatsiooni struktuur on VAR mudelis.

Kui ei ole valge müra, siis on VAR mudeliga probleemid ja prognoosid ei tule head.

Mitmemõõtmelise normaaljaotuse Jarque-Bera test

Jarque-Bera statistik ühemõõtmelise normaaljaotuse korral. $JB = T \left(\frac{M_3^2}{6} + \frac{(M_4 - 3)^2}{24} \right) \sim \chi^2(2)$

T aegrea pikkus,

M_3 asümmeetria (3. järku moment)

M_4 püstakus (4. järku moment)

Normaaljaotuse korral $M_3=0$, $M_4=3$ ja $JB=0$

Mitmemõõtmelisel juhul

m tunnust, m võrrandit

On asümmeetriakordajate vektor $\mathbf{M}_3$
ja püstakuse kordajate vektor $\mathbf{M}_4$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} M_{31} \\ M_{32} \\ \vdots \\ M_{3m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} M_{41} \\ M_{42} \\ \vdots \\ M_{4m} \end{bmatrix}$$

Teststatistik asümmeetria testimiseks

$$\lambda_3 = T \frac{\mathbf{M}_3' \mathbf{M}_3}{6} \sim \chi^2(m)$$

Teststatistik püstakuse testimiseks

$$\lambda_4 = T \frac{(\mathbf{M}_4 - 3)' (\mathbf{M}_4 - 3)}{24} \sim \chi^2(m)$$

Ühine testimine

$$JB = \lambda_3 + \lambda_4 \sim \chi^2(m^2)$$

Nullhüpotees: jäägid alluvad mitmemõõtmelisele normaaljaotusele.

GRANGERI PÕHJUSLIKKUS JA EKSOGEENSUSE TESTIMINE VAR MUDELIS

VAR mudeli komplekteerimine

Tavaliselt tunnuste ehk aegridade arv VAR mudelis ei ole väga suur. Sagedasti $m=2$, enamasti $m<5$, peaaegu alati $m<10$.

Kuidas me teame, et VAR mudelisse võetud tunnused on kõik endogeensed, st määratud süsteemi siseselt?

Kasutatakse Grangeri põhjuslikkuse testi.

Grangeri põhjuslikkuse olemus

Grangeri põhjuslikkus ei näita, kas üks tunnus **mõjutab** teist.

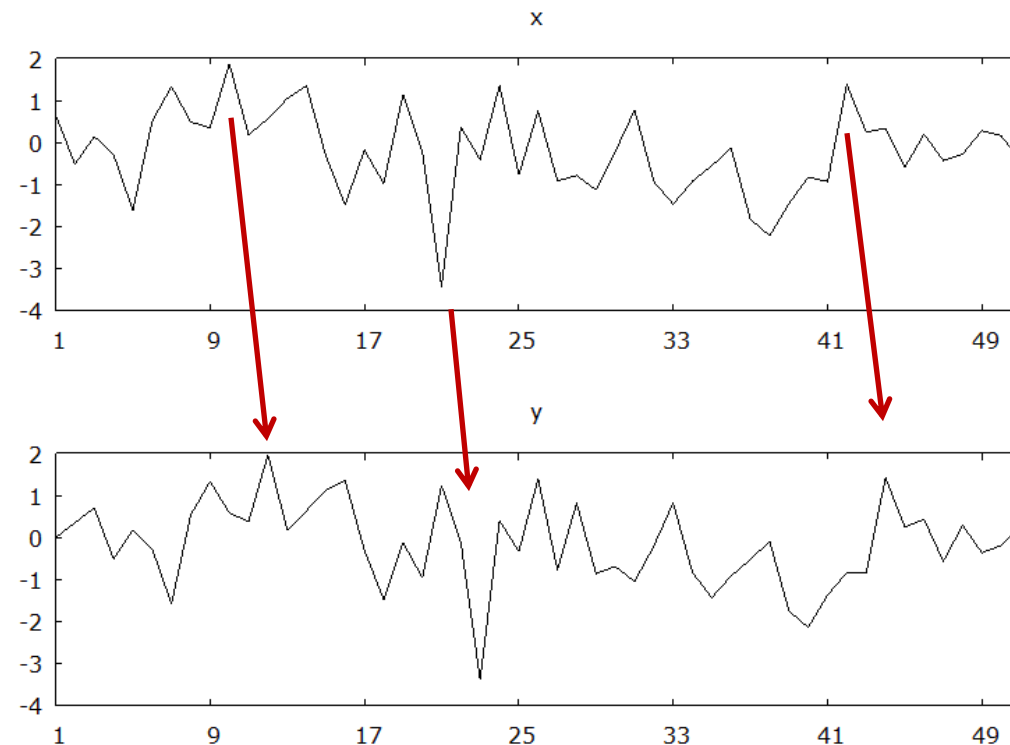
Kui Grangeri põhjuslikkuse testi näitab, et $X \rightarrow Y$, siis

- on tõestatud, et teades X minevikku (viitaegasid), saame Y_t väärtust paremini prognoosida, kui ainult Y mineviku (viitaegade) abil;
- ei ole tõestatud, et X mõjutab Y .

Y is Granger –caused by X

X Granger causes Y

X on Grangeri seoses aegreaga Y



Grangeri põhjulikkuse testi võimalikud tulemused

Vaatleme kaht
viitaegadega mudelit

$$Y_t = \sum_{i=1}^k \alpha_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^k \beta_i Y_{t-i} + u_{1t}$$

$$X_t = \sum_{i=1}^k \lambda_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^k \delta_i Y_{t-i} + u_{2t}$$

Kumbagi mudelit testitakse eraldi.
Testimisel kasutatakse tunnuste
komplekti eemaldamist, st
võrreldakse kitsendamata ja
kitsendatud mudelit.

Kokku 4 erinevat võimalust.

1. Ühepoolne põhjuslikkus
(*unidirectional causality*)

$$X \rightarrow Y$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \neq 0 \quad \sum_{j=1}^k \delta_j = 0$$

2. Ühepoolne põhjuslikkus
 $X \leftarrow Y$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0 \quad \sum_{j=1}^k \delta_j \neq 0$$

3. Kahepoolne põhjuslikkus
(*bilateral causality*)

$$X \leftrightarrow Y$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \neq 0 \quad \sum_{j=1}^k \delta_j \neq 0$$

4. Põhjuslikkus puudub
 $X \nrightarrow Y$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0 \quad \sum_{j=1}^k \delta_j = 0$$

VAR mudel ja Grangeri põhjuslikkuse test

Näiteks 3-mõõtmeline VAR(2) mudel, tunnused X , Y ja Z .

Võrrand X jaoks

$$x_t = \alpha_1 + \beta_{11}x_{t-1} + \beta_{12}x_{t-2} + \gamma_{11}y_{t-1} + \gamma_{12}y_{t-2} + \delta_{11}z_{t-1} + \delta_{12}z_{t-2} + u_{1t}$$

Võib testida ükshaaval:

kas $Y \rightarrow X$? eemaldame Y viitajad: $\gamma_{1i} = 0$

kas $Z \rightarrow X$? eemaldame Z viitajad: $\delta_{1i} = 0$

VAR mudeli koostamise seisukohalt on olulisem **koos testimine** (*joint test*)

kas Y ja $Z \rightarrow X$? Eemaldame korraga Y ja Z viitajad: $\gamma_{1i} = \delta_{1i} = 0$.

Kui viimase testi korral on tulemuseks nullhüpotees, siis teiste endogeensete tunnuste viitaegade eemaldamine ei halvenda X võrrandit =>

X ei sõltu teistest endogeensetest tunnustest =>

X on eksogeenne.

NÄIDE: tööstustoodang, töötuse määr ja intressimäärade erinevus, Grangeri põhjuslikkuse test

Nende viitajad on eemaldatud. *ALL* tähendab, et vastavast võrrandist on eemaldatud kõikide muude tunnuste viitajad.

Granger causality Wald tests

Equation	Excluded	chi2	df	Prob > chi2
ld_ip	d_ur	4.9662	3	0.174
ld_ip	s	7.696	3	0.053
ld_ip	ALL	13.742	6	0.033
d_ur	ld_ip	17.058	3	0.001
d_ur	s	18.704	3	0.000
d_ur	ALL	34.335	6	0.000
s	ld_ip	1.2488	3	0.741
s	d_ur	4.6464	3	0.200
s	ALL	18.215	6	0.006

3 võrrandit

Ühepoolne põhjuslikkus
ld_ip → d_ur

VAR mudel on õigesti komplekteeritud: kõik 3 tunnust on endogeensed, sest iga võrrandi korral, kui ülejäänud tunnused eemaldada, on nullhüpotees ümber lükatud.

NÄIDE: Lääne-Saksamaa makroandmed

Investeeringud *inv*, sissetulek *inc* ja tarbimine *consump*. Kvartaalsed andmed 1960 I kv kuni 1982 IV kv.
Statsionaarsuse saavutamiseks kõikide tunnuste korral leitud logaritmi diferents.

Granger causality Wald tests

Equation	Excluded	chi2	df	Prob > chi2
dln_inv	dln_inc	.55668	2	0.757
dln_inv	dln_consump	1.9443	2	0.378
dln_inv	ALL	7.3184	4	0.120
dln_inc	dln_inv	6.2466	2	0.044
dln_inc	dln_consump	5.1029	2	0.078
dln_inc	ALL	13.087	4	0.011
dln_consump	dln_inv	4.2446	2	0.120
dln_consump	dln_inc	16.275	2	0.000
dln_consump	ALL	21.717	4	0.000

dln_inc ja *dln_consump* viitaegade eemaldamine ei halvenda tunnuse *dln_inv* võrrandit (H_0) =>
dln_inv aegrida ei ole mõjutatud ülejäänud tunnuste poolt =>
dln_inv (investeeringud) on **eksogeenne** tunnus.

Eksogeensus

Tunnus Z on **eksogeenne**, kui ülejäänud tunnuste viitajad ei mõjuta tunnust Z .

Kui Z on eksogeenne, võib selle VAR mudelist eemaldada.

Võib proovida kasutada VARX mudelit: lisada see tunnus VAR mudelisse eksogeense tunnusena.

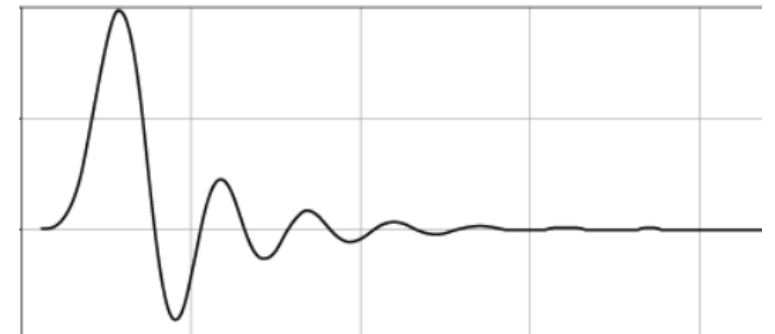
Miks on vaja VAR dünaamika analüüsi?

- Grangeri kausaalsuse analüüs näitab, milliste tunnuste viitaegadel on statistiliselt oluline mõju.
- Kausaalsuse testimine aga ei näita
 - mis suunas on mõju (positiivne või negatiivne);
 - kui kaua mõju kestab.
- Uurimiseks vaja analüüsida VAR mudeli dünaamikat.
 - Impulssreaktsiooni funktsioon IRF (*impulse-response function*)
 - Modelleerib üksikute šokkide mõju süsteemi dünaamikale. Kuidas mõjub y_1 šokk $\varepsilon_{y_1 t}$ talle endale, kuidas y_2 -le, y_3 -le.
 - Prognoosi vea dispersiooni lahutus FEVD (*forecast error variance decomposition*)
 - Iga võrrandi jaoks: kui suur osa sõltuva tunnuse muutumisest on põhjustatud tema enda šokkidest, kui suur osa teiste tunnuste šokkidest.

IMPULSSREAKTSIOONI FUNKTSIOON

Impulssreaktsioon

- Impulssreaktsioon ehk impulssreaktsiooni funktsioon IRF (*impulse response function*) kirjeldab dünaamilise süsteemi reaktsiooni mingile üksikule impulsile.
- Uuritakse selle impulsi nõ „kaja“: kuidas ajahetkel t esinenud impulss mõjutab süsteemi käitumist hilisema aja vältel.
- Kasutamine
 - signaalitöötluses,
 - elektroonikas,
 - majanduses.
- Makroökonomikas analüüsitakse, kuidas teatud majandusnäitaja aegrida reageerib aja jooksul mingile üksikule impulsile (šokile).
 - Nt valitsuskulude, maksumäära, rahapoliitika muutus.
 - Analüüsimisel kasutatakse VAR mudelit.



MA protsessi impulssreaktsioon

Suvalise ARMA mudeli jaoks võib küsida: milline on ajahetkel s toimunud ühikulise šoki mõju aegrea väärtusele y_t ajahetkel t ($t > s$)?

MA(1) protsessi korral

$$y_t = u_t + \theta_1 u_{t-1}$$

$u:$	0	1	0	0	0
$y:$	0	1	θ_1	0	0



MA(q) protsessi korral

$u:$	0	1	0	0	...	0	0
$y:$	0	1	θ_1	θ_2	...	θ_q	0

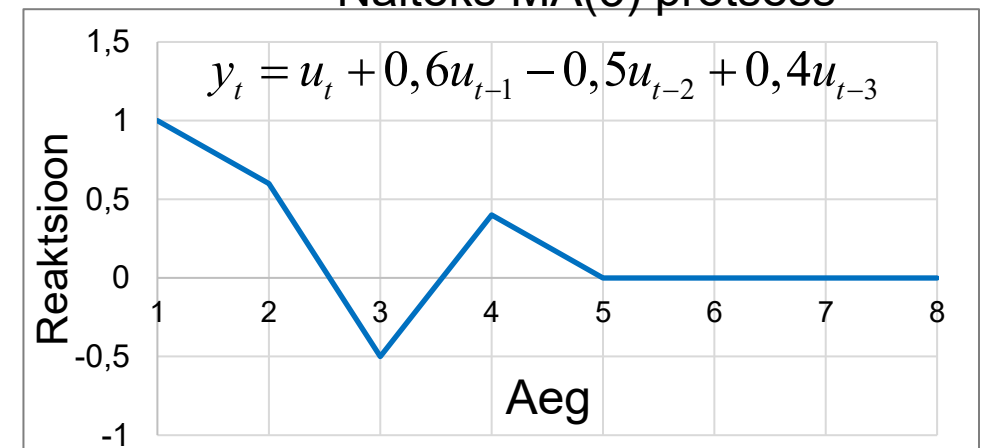
$$y_t = u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q}$$

MA protsessi korral on mingi ühikulise šoki hilisema mõju leidmine lihtne.

Aga kuidas leida seda AR protsessi korral?

AR protsess tuleb esitada MA esituses!

Näiteks MA(3) protsess



Impulssreaktsiooni funktsioon VAR(1) korral

$$\mathbf{B}\mathbf{Y}_t = \mathbf{\Gamma}_0 + \mathbf{\Gamma}_1\mathbf{Y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

VAR(1) mudel struktuursel kujul, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ on struktuurse kuju šokid

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

VAR(1) mudel standardkujul, $\mathbf{u}_t$ on standardkuju jäägid

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Theta}_i \mathbf{u}_{t-i}$$

VAR(1) mudeli libiseva keskmise ehk MA esitus

Aga kuidas vektor $\mathbf{Y}_t$ on määratud struktuurse kuju šokkidega $\boldsymbol{\varepsilon}_t$?

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Theta}_i \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}$$

Impulssreaktsiooni funktsioon IRF.

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}(i)\boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(i) = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\Theta}_i$$

Impulssreaktsiooni funktsioon näitab, kuidas struktuurse kuju šokid mõjutavad tunnuste väärtusi.

Impulssreaktsiooni funktsiooni struktuur VAR(1) korral

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}(i) \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}$$

2 aegrida
 $\{y_1\}, \{y_2\}$

$$\boldsymbol{\Phi}(i) \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(i) & \Phi_{12}(i) \\ \Phi_{21}(i) & \Phi_{22}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{y1\,t-i} \\ \varepsilon_{y2\,t-i} \end{bmatrix}$$

Kui VAR(1) mudelis on 2 komponenti, siis impulssreaktsiooni funktsioonil $\boldsymbol{\Phi}(i)$ on iga perioodi i korral 4 komponenti.

3 aegrida
 $\{x\}, \{y\}, \{z\}$

$$\boldsymbol{\Phi}(i) \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(i) & \Phi_{12}(i) & \Phi_{13}(i) \\ \Phi_{21}(i) & \Phi_{22}(i) & \Phi_{23}(i) \\ \Phi_{31}(i) & \Phi_{32}(i) & \Phi_{33}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x\,t-i} \\ \varepsilon_{y\,t-i} \\ \varepsilon_{z\,t-i} \end{bmatrix}$$

3 aegrea korral $3 \times 3 = 9$ komponenti

Üldiselt: kui VAR mudelis m tunnust, siis impulssreaktsiooni funktsioonil m^2 komponenti.

Kohesed multiplikaatorid

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Phi(i) \varepsilon_{t-i}$$

Vaatleme indeksile $i=0$ vastavat liidetavat.

contemporaneous multipliers

$$\Phi(0) \varepsilon_t = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(0) & \Phi_{12}(0) \\ \Phi_{21}(0) & \Phi_{22}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{y t} \\ \varepsilon_{z t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(0)\varepsilon_{y t} + \Phi_{12}(0)\varepsilon_{z t} \\ \Phi_{21}(0)\varepsilon_{y t} + \Phi_{22}(0)\varepsilon_{z t} \end{pmatrix} \begin{matrix} y \\ z \end{matrix}$$

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(0) & \Phi_{12}(0) \\ \Phi_{21}(0) & \Phi_{22}(0) \end{pmatrix} \quad \text{Selle matriksi elemendid on kohesed multiplikaatorid.}$$

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & \Phi_{12}(0) \\ \Phi_{21}(0) & 1 \end{pmatrix}$$



$\Phi_{11}(0)$ tunnuse y šoki $\varepsilon_{y t}$ kohene mõju tunnuse y väärtusele y_t

$$\Phi_{11}(0) = 1$$

$\Phi_{22}(0)$ tunnuse z šoki $\varepsilon_{z t}$ kohene mõju tunnusele z väärtusele z_t

$$\Phi_{22}(0) = 1$$

$\Phi_{12}(0)$ tunnuse z šoki $\varepsilon_{z t}$ kohene mõju tunnuse y väärtusele y_t

$\Phi_{21}(0)$ tunnuse y šoki $\varepsilon_{y t}$ kohene mõju tunnuse z väärtusele z_t

1. perioodi multiplikaatorid

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Phi(i) \varepsilon_{t-i} \quad \text{Vaatleme indeksile } i=1 \text{ vastavat liidetavat}$$

$$\Phi(1) \varepsilon_{t-1} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(1) & \Phi_{12}(1) \\ \Phi_{21}(1) & \Phi_{22}(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{y\,t-1} \\ \varepsilon_{z\,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(1)\varepsilon_{y\,t-1} + \Phi_{12}(1)\varepsilon_{z\,t-1} \\ \Phi_{21}(1)\varepsilon_{y\,t-1} + \Phi_{22}(1)\varepsilon_{z\,t-1} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} y \\ z \end{matrix}$$

$$\Phi(1) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(1) & \Phi_{12}(1) \\ \Phi_{21}(1) & \Phi_{22}(1) \end{pmatrix} \quad \text{Selle matriksi elemendid on 1. perioodi multiplikaatorid}$$

$\Phi_{11}(1)$ suuruse y šoki $\varepsilon_{y\,t-1}$ mõju suurusele y_t

$\Phi_{12}(1)$ suuruse z šoki $\varepsilon_{z\,t-1}$ mõju suurusele y_t

$\Phi_{21}(1)$ suuruse y šoki $\varepsilon_{y\,t-1}$ mõju suurusele z_t

$\Phi_{22}(1)$ suuruse z šoki $\varepsilon_{z\,t-1}$ mõju suurusele z_t

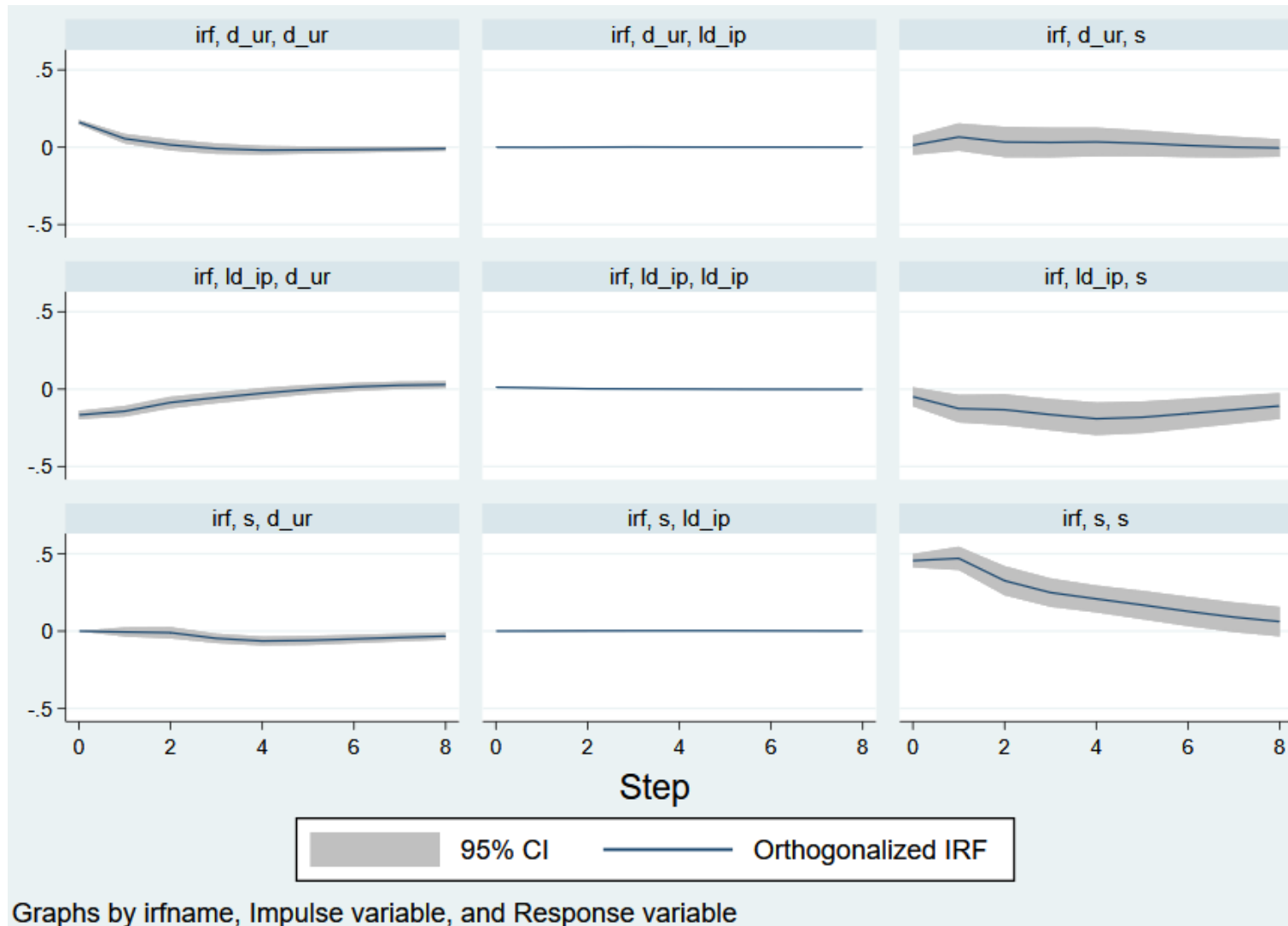
NÄIDE: tööstustoodang, töötuse määr ja intresside erinevus

Impulssreaktsiooni funktsioonil on 9 komponenti.

$\Phi_{11, i}$ d_ur -> d_ur	$\Phi_{12, i}$ d_ur -> ld_ip	$\Phi_{13, i}$ d_ur -> s
$\Phi_{21, i}$ ld_ip -> d_ur	$\Phi_{22, i}$ ld_ip -> ld_ip	$\Phi_{23, i}$ ld_ip -> s
$\Phi_{31, i}$ s -> d_ur	$\Phi_{32, i}$ s -> ld_ip	$\Phi_{33, i}$ s -> s

Diagonaalil mõju iseendale

Paneme tähele, et püsttelje skaala on ühesugune.



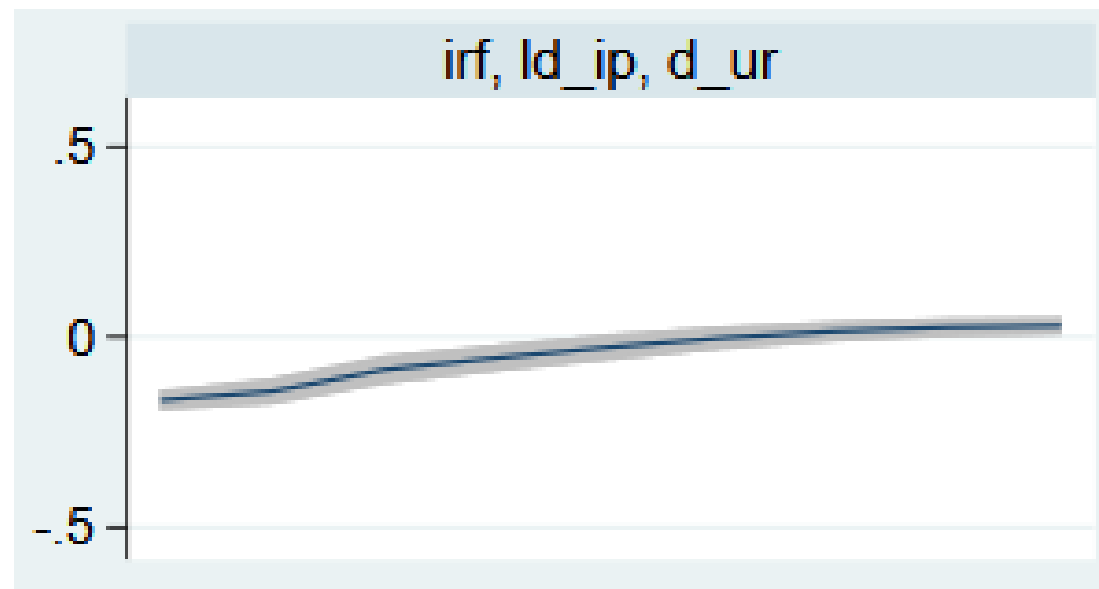
Impulssreaktsiooni funktsiooni skaleerimine

Kui VAR mudelis olevad aegread on erinevates mõõtühikutes, on erinevate impulssreaktsiooni funktsiooni graafikute võrdlemine raske.

Järelikult on mõistlik multiplikaatorid $\Phi_{jk}(i)$ läbi jagada juhuslike šokkide standardhälvetega, st anda standardhälvete skaalas.

$$\Phi_{jk}(i) \rightarrow \frac{\Phi_{jk}(i)}{\sigma(\varepsilon_j)}$$

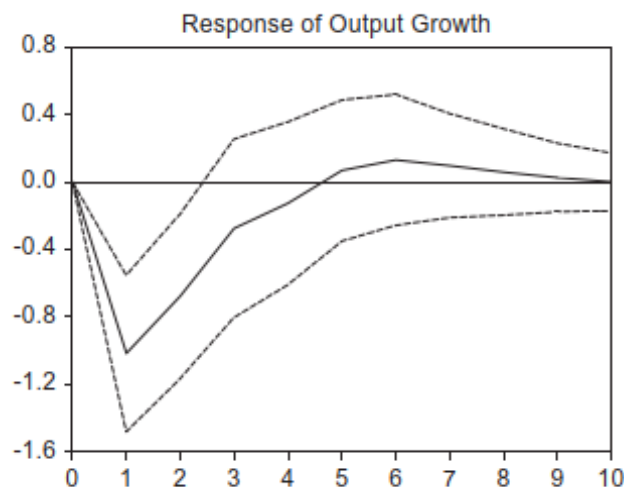
ühikuks on $\sigma(\varepsilon_j)$



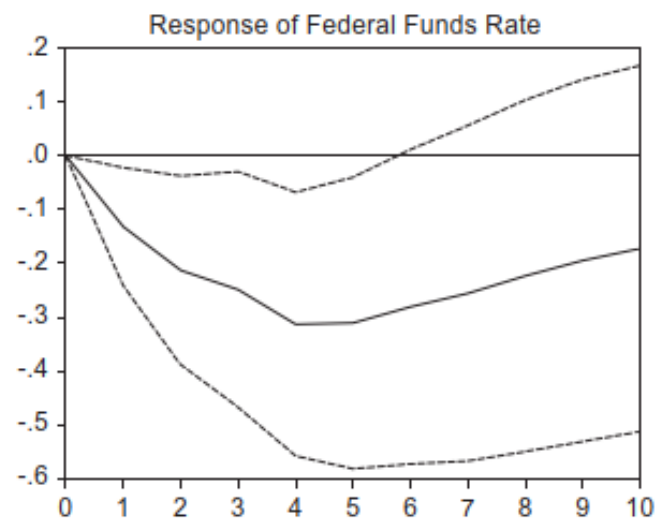
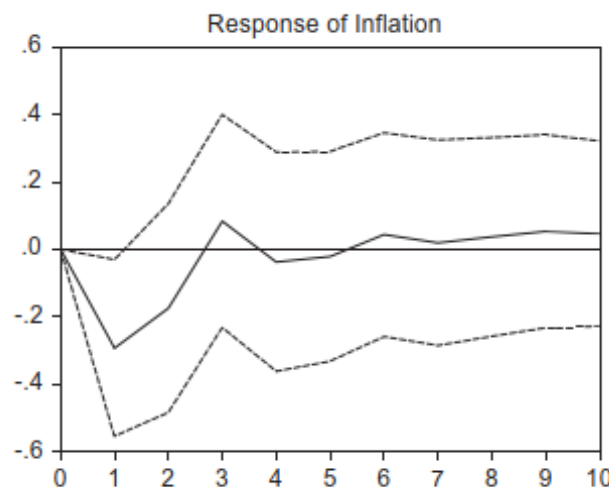
NÄIDE: aktsiaturu volatiilsuse mõju makroökonomika näitajatele

Beetsma ja Giuliodori uurisid USA andmete põhjal, kuidas on seotud Dow Jonesi indeksi volatiilsus ja tulumäär, SKP elaniku kohta kasvumäär, inflatsiooni määr ning föderaalfondide intressimäär. Periood 1950 – 2011, kvartaalsed andmed.

Esitatud on makronäitajate reageerimine aktsiaturu volatiilsuse šokile.



1 kvartal peale volatiilsuse šokki vähenevad nii SKP kasvumäär kui ka inflatsioonimäär. 1-1,5 aasta pärast šoki mõju vaibub.



Föderaalfondide intressimäär langeb ka kohe ja langus on maksimaalne ühe aasta (4 kv) pärast.

Kumulatiivsed ja pikaajalised multiplikaatorid

Šokkide $\varepsilon_{y t}$ ja $\varepsilon_{z t}$ akumul eeruva mõju saab leida, summeerides erinevatele perioodidele vastavad multiplikaatorid.

Kumulatiivsed multiplikaatorid peale n perioodi

$$\varepsilon_{y t} \text{ mõju väärtusele } y_{t+n} \quad \sum_{i=0}^n \Phi_{11}(i)$$

$$\varepsilon_{z t} \text{ mõju väärtusele } y_{t+n} \quad \sum_{i=0}^n \Phi_{12}(i)$$

Pikaajalised multiplikaatorid (*long-run multipliers*)

$$\varepsilon_{y t} \text{ mõju väärtusele } y_{t+\infty} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{11}(i)$$

$$\varepsilon_{z t} \text{ mõju väärtusele } y_{t+\infty} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{12}(i)$$

Kui y ja z on statsionaarsed, siis on pikaajalised multiplikaatorid lõplikud. St lühiajalised muutuvad nulliks teatud arvu perioodide pärast.

Identifikatsiooni probleem

Impulssreaktsiooni funktsioon näitab, kuidas struktuurse kuju šokid mõjutavad tunnuste väärtusi.

VAR mudelite dünaamika analüüsi peamine probleem: kuidas dekomponeerida VAR standardkuju jääkliikmed u majandussuurusi tabavateks struktuurseteks šokkideks ε .

Hinnatava VAR mudeli
jääkliikmed (standardkujul)

Nende hinnangud
saame VAR mudeli
hindamisel.

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

struktuursed šokid



$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{B} \mathbf{u}_t$$

Probleemi lahendamiseks tuleb peale VAR mudeli standardkuju hindamist leida matriksi $\mathbf{B}$ komponendid (struktuurse kuju kordajad).

Aga struktuurne kuju on üldjuhul **alaidentifitseeritud** ja siis pole neid kordajaid standardkuju kordajate põhjal võimalik leida.

Seega üldjuhul ei saa leida impulssreaktsiooni funktsiooni!

Kui kohene mõju puudub

Vaatleme lihtsaimat VAR mudelit: kahe komponendiga VAR(1) mudel.

Struktuurne kuju, kui kohene mõju on

$$y_{1t} = b_{10} - b_{12}y_{2t} + \gamma_{11}y_{1t-1} + \gamma_{12}y_{2t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$y_{2t} = b_{20} - b_{21}y_{1t} + \gamma_{21}y_{1t-1} + \gamma_{22}y_{2t-1} + \varepsilon_{2t}$$

Standardkuju

$$y_{1t} = a_{10} + a_{11}y_{1t-1} + a_{12}y_{2t-1} + u_{1t}$$

$$y_{2t} = a_{20} + a_{21}y_{1t-1} + a_{22}y_{2t-1} + u_{2t}$$

Struktuurne kuju, kui kohene mõju **puudub**

$$y_{1t} = b_{10} + \gamma_{11}y_{1t-1} + \gamma_{12}y_{2t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$y_{2t} = b_{20} + \gamma_{21}y_{1t-1} + \gamma_{22}y_{2t-1} + \varepsilon_{2t}$$

Sellisel juhul on struktuurse mudeli parameetrite arv sama, mis standardkujul => täpselt identifitseeritud, struktuurse kuju kordajad saab leida => IRF on leitav.

Aga kuidas me teame, et kohene mõju puudub?

VAR standardkuju juhuslike liikmete kovariatsioon

Üleminekul struktuurselt kujult standardkujule saadi standardkuju juhuslikud liikmed teisendusega:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad \mathbf{B}_t = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

Kordajad b_{12} ja b_{21} on **kohese mõju** (*contemporaneous effect*) kordajad struktuurses kujus:

$$y_{1t} = b_{10} - b_{12}y_{2t} + \gamma_{11}y_{1t-1} + \gamma_{12}y_{2t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$y_{2t} = b_{20} - b_{21}y_{1t} + \gamma_{21}y_{1t-1} + \gamma_{22}y_{2t-1} + \varepsilon_{2t}$$

Üldiselt on erinevate tunnuste korral standardkuju juhuslikud liikmed korrelatsioonis.

$$\text{Cov}(u_{1t}, u_{2t}) = -\frac{1}{(1 - b_{12}b_{21})^2} (b_{21}\sigma_1^2 + b_{12}\sigma_2^2)$$

$$\text{Cov}(u_{1t}, u_{2t}) \neq 0$$


$$\text{Aga kui } b_{12} = b_{21} = 0 \Rightarrow \text{Cov}(u_{1t}, u_{2t}) = 0$$

Kohese mõju olemasolu testimiseks vaadata standardkuju jääkliikmete u_{it} vahelist korrelatsiooni. Kui korrelatsioon esineb, siis kohene mõju on ja dünaamika uurimisel tuleb seda arvestada. Kui korrelatsioon puudub, siis kohest mõju ei ole.

Identifikatsiooni probleemi lahendusvõimalusi

Vaja sisse viia teatud kitsendused, mis võimaldaks määrata struktuursete võrrandite parameetreid.

- Võtame $Cov(u_{jt}, u_{kt}) = 0$ st eeldame, et endogeensed tunnused ei mõjuta üksteist kohe, puudub kohene mõju.
 - Tihti ei ole see reaalne.
 - Eeldust saab kontrollida, kui uurida VAR võrrandite jääkliikmete korrelatsioonimaatriksit.
- Ortogonaliseeritud impulssreaktsiooni funktsioon OIRF
 - Kasutatakse Cholesky järjestust (*Cholesky ordering, Cholesky decomposition*)
 - Mõned autorid: Simsi järjestus (*Sim's recursive ordering*)
- Üldistatud impulssreaktsiooni funktsioon GIRF (*generalized impulse reaction function*), mille pakkusid välja Pesaran ja Shin (1998).

Cholesky järjestuse idee

Näiteks kahe komponendilise VAR(1) korral.

$$\begin{aligned}\text{Standardkuju hindamisel} \quad y_t &= a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + u_{1t} \\ z_t &= a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + u_{2t}\end{aligned}$$

saab leida 9 tundmatu hinnangud:

3+3 parameetrit

+ 2 dispersiooni $Var(u_1), Var(u_2)$

+ 1 kovariatsioon $Cov(u_1, u_2)$

Struktuurse kuju määramiseks üldjuhul vaja teada 10

näitajat:

4+4=8 parameetrit + 2 dispersiooni (standardvigade jaoks).

$$y_t = b_{10} - b_{12}z_t + \gamma_{11}y_{t-1} + \gamma_{12}z_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$

$$z_t = b_{20} - b_{21}y_t + \gamma_{21}y_{t-1} + \gamma_{22}z_{t-1} + \varepsilon_{zt}$$

Kui struktuurse kuju parameetritele lisada 1 kitsendus, jääb 9 määramist vajavat parameetrit: süsteem on täpselt identifitseeritud.

Kui VAR mudelis on rohkem komponente, siis kasutatakse sama ideed ja saadakse rohkem erinevaid võimalikke kitsendusi.

Cholesky järjestus, üks võimalik kitsendus

Struktuurne kuju, alaidentifitseeritud

$$y_t = b_{10} - b_{12}z_t + \gamma_{11}y_{t-1} + \gamma_{12}z_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$

$$z_t = b_{20} - b_{21}y_t + \gamma_{21}y_{t-1} + \gamma_{22}z_{t-1} + \varepsilon_{zt}$$

Standardkuju

$$y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + u_{1t}$$

$$z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + u_{2t}$$

Kitsendus $b_{12} = 0$ Kitsendatud kujul:

$$y_t = b_{10} + \gamma_{11}y_{t-1} + \gamma_{12}z_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$

$$z_t = b_{20} - b_{21}y_t + \gamma_{21}y_{t-1} + \gamma_{22}z_{t-1} + \varepsilon_{zt}$$

z_t ei oma kohest efekti (*contemporaneous effect*) suurusele y_t

Standardkuju juhusliku liikmed
struktuursete šokkide kaudu

$$u_{1t} = \varepsilon_{yt}$$

$$u_{2t} = -b_{21}\varepsilon_{yt} + \varepsilon_{zt}$$

Šokil ε_{yt} on kohene mõju mõlemale suurusele y_t ja z_t .
Šokil ε_{zt} on kohene mõju ainult suurusele z_t .

Tunnused Y ja Z on järjestatud, Y on esimesel kohal, eelistatud.

1. Y Selle šokk mõjub kohe mõlemale.
2. Z Selle šokk mõjub kohe ainult Z -le. Y -le mõjub kaudselt, läbi viitaegade.

Cholesky järjestus tekitab asümmeetria.

Cholesky järjestus, teine võimalus

Võime järjestada ka vastupidi.

Struktuurne kuju, alaidentifitseeritud

$$y_t = b_{10} - b_{12}z_t + \gamma_{11}y_{t-1} + \gamma_{12}z_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$

$$z_t = b_{20} - b_{21}y_t + \gamma_{21}y_{t-1} + \gamma_{22}z_{t-1} + \varepsilon_{zt}$$

Kitsendus $b_{21} = 0$ Kitsendatud kujul:

$$y_t = b_{10} - b_{12}z_t + \gamma_{11}y_{t-1} + \gamma_{12}z_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$

$$z_t = b_{20} + \gamma_{21}y_{t-1} + \gamma_{22}z_{t-1} + \varepsilon_{zt}$$

Standardkuju

$$y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + u_{1t}$$

$$z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + u_{2t}$$

y_t ei oma kohest efekti suurusele z_t

Standardkuju juhusliku liikmed
struktuursete šokkide kaudu

$$u_{1t} = \varepsilon_{yt} - b_{12}\varepsilon_{zt}$$

$$u_{2t} = \varepsilon_{zt}$$

Šokil ε_{zt} on kohene mõju mõlemale suurusele y_t ja z_t .
Šokil ε_{yt} on kohene mõju ainult suurusele y_t .

Z on esimesel kohal, eelistatud.

1. Z Selle šokk mõjub kohe mõlemale
2. Y Selle šokk mõjub kohe ainult Y-le. Z-le mõjub kaudselt, läbi viitaegade

Cholesky järjestus üldiselt

Kui VAR mudelis rohkem kui 2 komponenti

- on vaja rohkem kitsendusi;
- järjestusvõimalusi rohkem;
- m aegrea korral $m!$ erinevat võimalust järjestamiseks.

Järjestuse interpretatsioon üldiselt:

iga tunnuse šokk mõjub koheselt talle endale ja järjestuses talle järgnevatele tunnustele.

1. kohal oleva tunnuse šokk mõjub koheselt kõigile;
 2. kohal oleva tunnuse šokk mõjub koheselt talle ja kõigile järgnevatele;
- jne

- Milline järjestus valida?
- Ühest vastus pole.
- Mõnikord teoreetilised kaalutlused: üks tunnus mõjub teistele vaid läbi viitaegadele (ei mõju kohe).
- Järjestamise tähtsus sõltub VAR mudeli võrrandite jääkliikmete vahelise korrelatsiooni tugevusest.
 - Kui nõrk seos (korrelatsioon puudub), siis erinev järjestus annab ca samad tulemused.
 - Kui tugev seos, siis impulssreaktsiooni funktsioon erinevate järjestuste korral väga erinev.

Cholesky järjestus -> ortogonaalne IRF

$\begin{Bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{Bmatrix}$ Kohene mõju $\Phi(0)\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(0) & \Phi_{12}(0) & \Phi_{13}(0) \\ \Phi_{21}(0) & \Phi_{22}(0) & \Phi_{23}(0) \\ \Phi_{31}(0) & \Phi_{32}(0) & \Phi_{33}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xt} \\ \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{zt} \end{bmatrix} =$

Kohesed šokid

$$= \begin{bmatrix} \Phi_{11}(0)\varepsilon_{xt} + \Phi_{12}(0)\varepsilon_{yt} + \Phi_{13}(0)\varepsilon_{zt} \\ \Phi_{21}(0)\varepsilon_{xt} + \Phi_{22}(0)\varepsilon_{yt} + \Phi_{23}(0)\varepsilon_{zt} \\ \Phi_{31}(0)\varepsilon_{xt} + \Phi_{32}(0)\varepsilon_{yt} + \Phi_{33}(0)\varepsilon_{zt} \end{bmatrix}$$

Cholesky järjestus

1. $x \quad \varepsilon_{xt} \rightarrow x_t, y_t, z_t$
2. $y \quad \varepsilon_{yt} \rightarrow y_t, z_t$
3. $z \quad \varepsilon_{zt} \rightarrow z_t$

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \Phi_{21}(0) & 1 & 0 \\ \Phi_{31}(0) & \Phi_{32}(0) & 1 \end{bmatrix}$$

IRF ortogonaalne maatriks OIRF

Cholesky järjestuse kasutamisel saadakse kohese mõju impulssreaktsiooni jaoks **ortogonaalne** maatriks. Seepärast tihti nimetatakse seda ka ortogonaliseeritud impulssreaktsiooni saamiseks (*orthogonalised impulse responses*), mille tähistuseks on **oirf**.

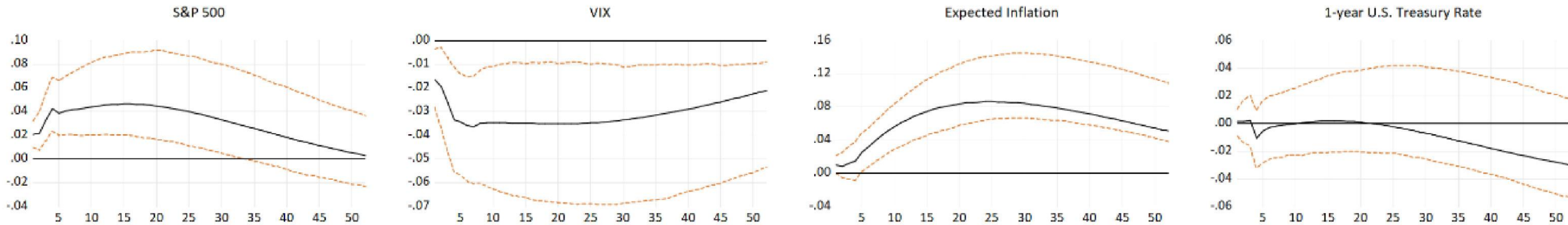
NÄIDE: Bitcoini hinnad, IRF

IRF leidmisel järgmine Cholesky järjestus:

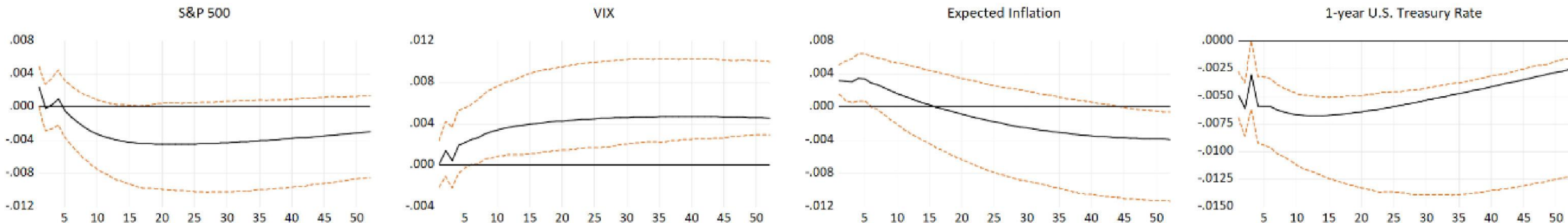
1. S&P 500 logaritm;
2. volatiilsuse indeks VIX;
3. inflatsiooni ootused;
4. 1-aastased USA võlakirjad;
5. kulla hinna logaritm;
6. bitcoini hinna logaritm.

Erinevate näitajate šokkide mõju bitcoini ja kulla hinnale. x-teljel nädalad.

Bitcoin Price



Gold Price



Choi, S., & Shin, J. (2022). Bitcoin: An inflation hedge but not a safe haven. *Finance Research Letters*, 46, 102379.

DISPERSIOONI LAHUTUS

Dispersiooni lahutus

forecast error variance decomposition

- Dispersiooni lahutus FEVD on teine võimalus VAR mudeli dünaamika uurimiseks.
- Iga võrrandi jaoks: kui suur osa sõltuva tunnuse muutumisest on põhjustatud tema enda šokkidest, kui suur osa teiste šokkidest.

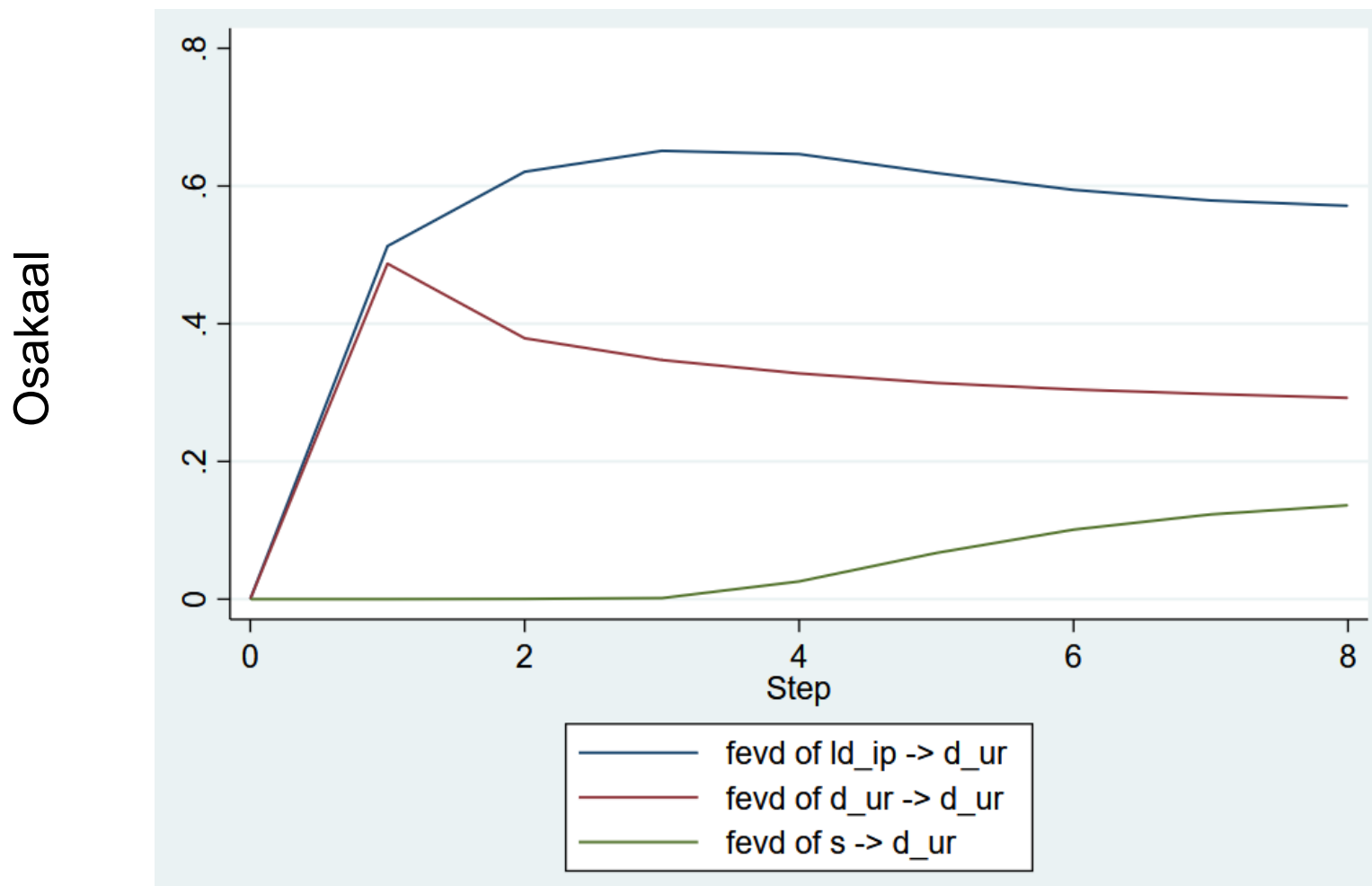
Dispersiooni lahutus võimaldab hinnata, kui suur osa s sammulise prognoosi vea dispersioonist on määratud erinevate tunnuste šokkidega sammudel $s = 1, 2, 3, \dots$

Praktikas enamasti suurem osa prognoosi vea dispersioonist on määratud tunnuse enda šokiga.

Kuna kasutatakse impulssreaktsiooni funktsiooni komponente, siis enne tuleb need leida ja selleks vajalik samuti Cholesky järjestus (kui esineb kohene mõju).

Erinevate Cholesky järjestuste korral saame erinevad tulemused.

NÄIDE: dispersiooni lahutus, töötuse määra muutus



Põhjustatud tööstustoodangu muutuse šokist

Põhjustatud töötuse määra muutuse enda šokist

Põhjustatud intressimäärade erinevuse šokist

Igal sammul kokku 100%.

NÄIDE: dispersiooni lahutus, Balti riikide aktsaiindeksid

Zieba kasutas VAR mudelit kolme Balti riigi aktsiandeksite korral
Kvartaalsed andmed 2002 I kv kuni 2021 IV kv.

Dispersiooni dekompositsioon Läti
indeksi OMXR korral.

Table 4. The decomposition of variance for the variable Latvia

period	std. error	d_Id_Latvia	d_Id_Estonia	d_Id_Lithuania
1	0.0940372	100.0000	0.0000	0.0000
2	0.115513	95.8350	3.3849	0.7801
3	0.117923	93.2927	5.5793	1.1280
4	0.124468	85.3590	9.4495	5.1915
5	0.124773	85.0961	9.7178	5.1861

Dispersiooni dekompositsioon Eesti
indeksi OMXT korral.

Table 5. The decomposition of variance for the variable Estonia

period	std. error	d_Id_Latvia	d_Id_Estonia	d_Id_Lithuania
1	0.123986	48.5775	51.4225	0.0000
2	0.152349	45.5031	54.3474	0.1495
3	0.15606	43.4620	56.3925	0.1455
4	0.162367	40.1756	56.5909	3.2335
5	0.164811	39.2176	57.5938	3.1886

Zieba, I. (2021) An analysis of the relationships among NASDAQ Baltic stock exchanges: VAR approach. *Central European Review of Economics & Finance*, vol. 34, No. 3, pp 51-65.

VAR mudeli modifikatsioonid

Kui aegridadel on deterministlik trend, võib VAR mudelisse lisada deterministliku trendi ja/või sesoonsuse.

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{B}t + \sum_{i=1}^k \mathbf{A}_i \mathbf{Y}_{t-i} + \mathbf{u}_t$$

Mõned autorid lisavad ka eksogeenseid tunnuseid $\mathbf{X}$, so VARX mudel.

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^k \mathbf{A}_i \mathbf{Y}_{t-i} + \sum_{i=1}^k \mathbf{B}_i \mathbf{X}_{t-i} + \mathbf{u}_t$$

On olemas ka paneelandmete VAR mudelid.

Struktuursed VAR mudelid ehk SVAR: ei kasutata standardkuju, parameetrite hindamiseks on keerulisemad meetodid.