4. Võnkeringid ja resonaatorid

IEE2560 – Raadiosageduslik elektroonika

Filter

- Üldiselt on filter seade, mis teostab mingite tunnuste alusel eristamist.
  - Näiteks kohvifilter laseb läbi vedeliku aga takistab tahkete osakeste edasipääsu.
  - Punane valgusfilter taskulambi ees laseb läbi ainult punast valgust jne.
- Elektroonikas on filter seade mis eristab elektrisignaale nende mingite parameetrite alusel.
- Tavaliselt eristab filter signaale nende **sageduse** *f* põhjal.

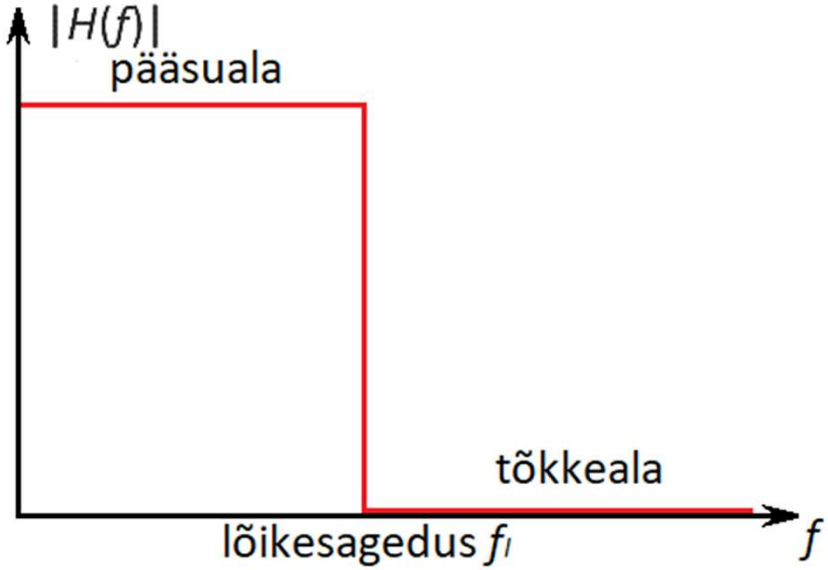


Sageduskarakteristik

- Sageduskarakteristik $H(f)$ on süsteemi **ülekande sagedussõltuvus** harmoonilise sisendsignaali korral.
- Sageduskarakteristiku **moodul** $|H(f)|$ näitab väljund- ja sisendsignaali amplituudide suhet.
- Viimast nimetatakse ka **amplituud-sageduskarakteristikuks** sest näitab väljundpinge amplituudi sõltuvust signaali sagedusest f.
  - Seda eeldusel, et sisendsignaali amplituud on konstantne.
- Sageduskarakteristiku faas $\angle H(f)$ näitab faasinihet väljundi- ja sisendsignaali vahel.
- Süsteemi sageduskarakteristik $H(f)$ on leitav selle impulsskaja $h(t)$ Fourier' teisendusena ja vastupidi.

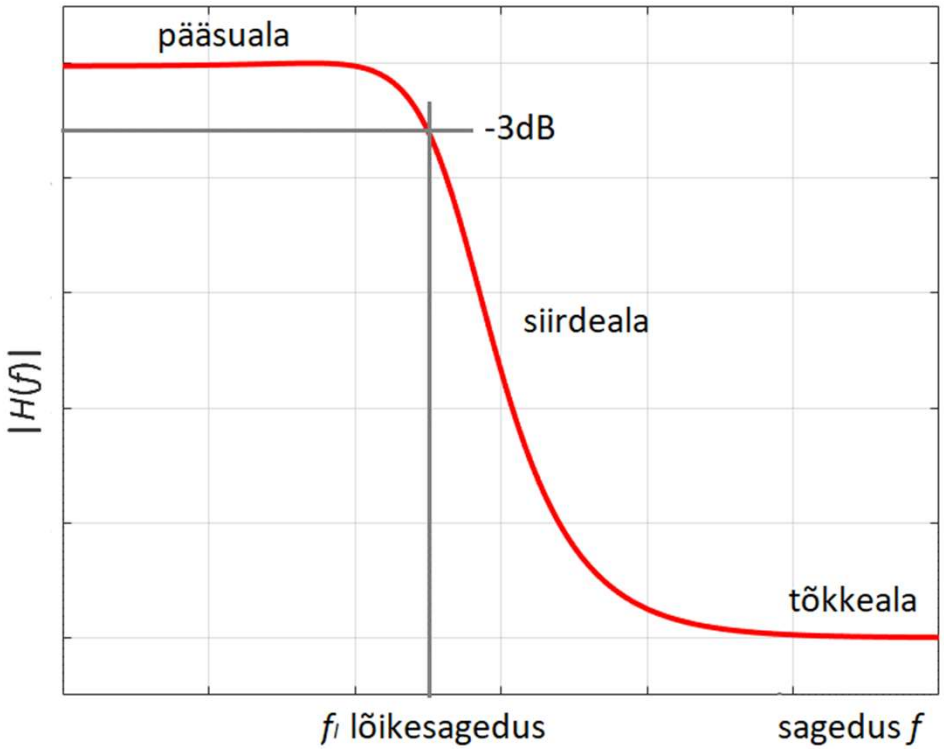
Madalpääsfilter

- Madalpääsfilter (*low-pass filter*) laseb läbi kõiki signaale mille sagedus on madalam filtri **lõikesagedusest** f_l.
- Sagedusvahemiku mille ulatuses filter signaale läbi laseb nimetatakse **pääsualaks** (*passband*).
- Sagedusvahemiku mille ulatuses signaale läbi ei lasta nimetatakse **tõkkealaks** (*stopband*)



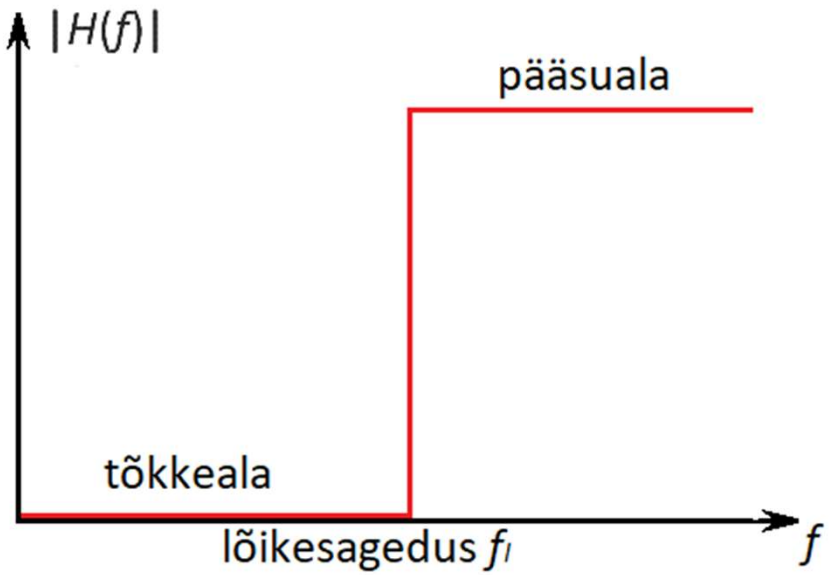
Reaalne filter

- Reaalsel filtril toimub üleminek pääsualast tõkkealase sujuvalt, mitte hüppeliselt.
- Pääsu- ja tõkkeala vahelist üleminekutsooni nimetatakse **siirdealaks** (*transition band*).
- **Lõikesagedus** on punkt pääsuala servas, kus filtri ülekanne on vähenenud 3 dB võrra.

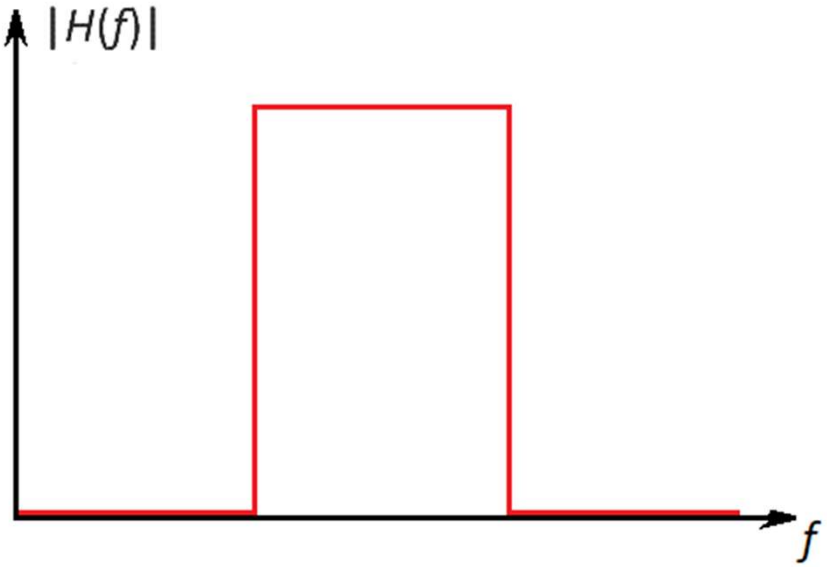


Kõrgpääsfilter

- Vastupidiselt madalpääsfiltrile laseb **kõrgpääsfilter** (*high-pass filter*) läbi signaale, mille sagedus on lõike-sagedusest f_l **suurem**.
- Juuresoleval joonisel on kujutatud ideaalse kõrgpääsfiltri amplituud-sageduskarakteristikut.



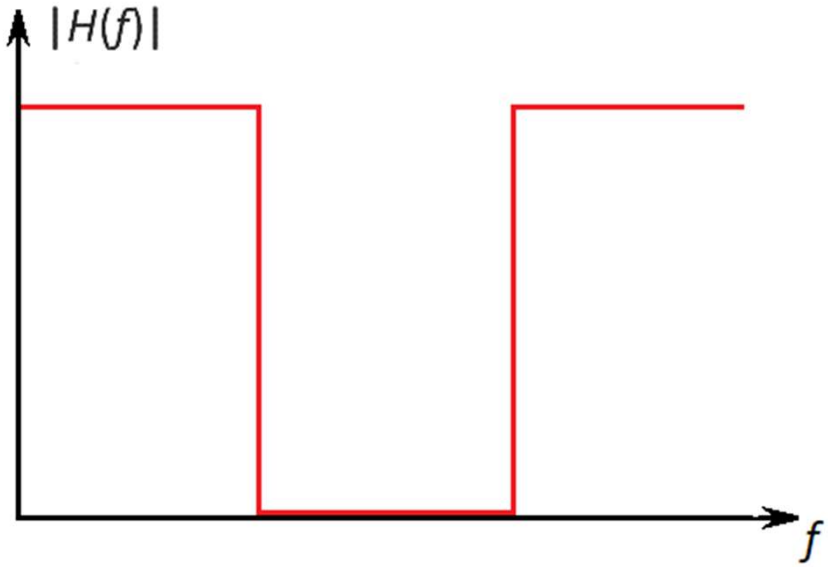
Ribafilter



- **Ribafiltril** (*band-pass filter*) on kaks lõikesagedust, alumine f_a – ja ülemine $f_ü$.
- Samuti on tal kaks tõkke- ja üks pääsuala.
- Ribafilter laseb läbi signaale, mis jäävad selle alumise- ja ülemise lõikesageduse vahele.
- Pääsuala laiust nimetatakse ka filtri **ribalaiuseks** $B = f_ü - f_a$.
- Ribafiltrit kasutatakse mingi sagedusvahemiku eraldamiseks kogu spektrist.

Tõkkefilter

- **Tõkkefiltril** (*band-stop filter*) on samuti kaks lõikesagedust $f_{ü}$ ja f_{a} .
- Pääsualasid on aga nüüd kaks ja tõkkealasid ainult üks.
- Tõkkefilter tõkestab lõikesageduste vahele jääva sagedusega signaalide edasipääsu ribas *B*.
- Kasutatakse mingi sageduse või sagedusvahemiku eemaldamiseks spektrist.



Süsteemi ülekandefunktsioon

- Süsteemi ülekandefunktsioon on esitatav kujul

$$H(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_M)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_N)}.$$

- Kus konstandid z_m on ülekandefunktsiooni nullkohad ehk **nullid** (*zeros*), konstandid p_n ülekandefunktsiooni nimetaja nullkohad, ehk **poolused** (*poles*) ning K on reaalarvuline kordaja.
- Nullide arv M on alati **väiksem või võrdne** kui pooluste arv N.
- Tehes asenduse $s = \mathrm{j}\omega$ saame süsteemi **sageduskarakteristiku** kujul

$$H(\mathrm{j}\omega) = K\frac{(\mathrm{j}\omega-z_1)(\mathrm{j}\omega-z_2)\ldots(\mathrm{j}\omega-z_M)}{(\mathrm{j}\omega-p_1)(\mathrm{j}\omega-p_2)\ldots(\mathrm{j}\omega-p_N)}.$$

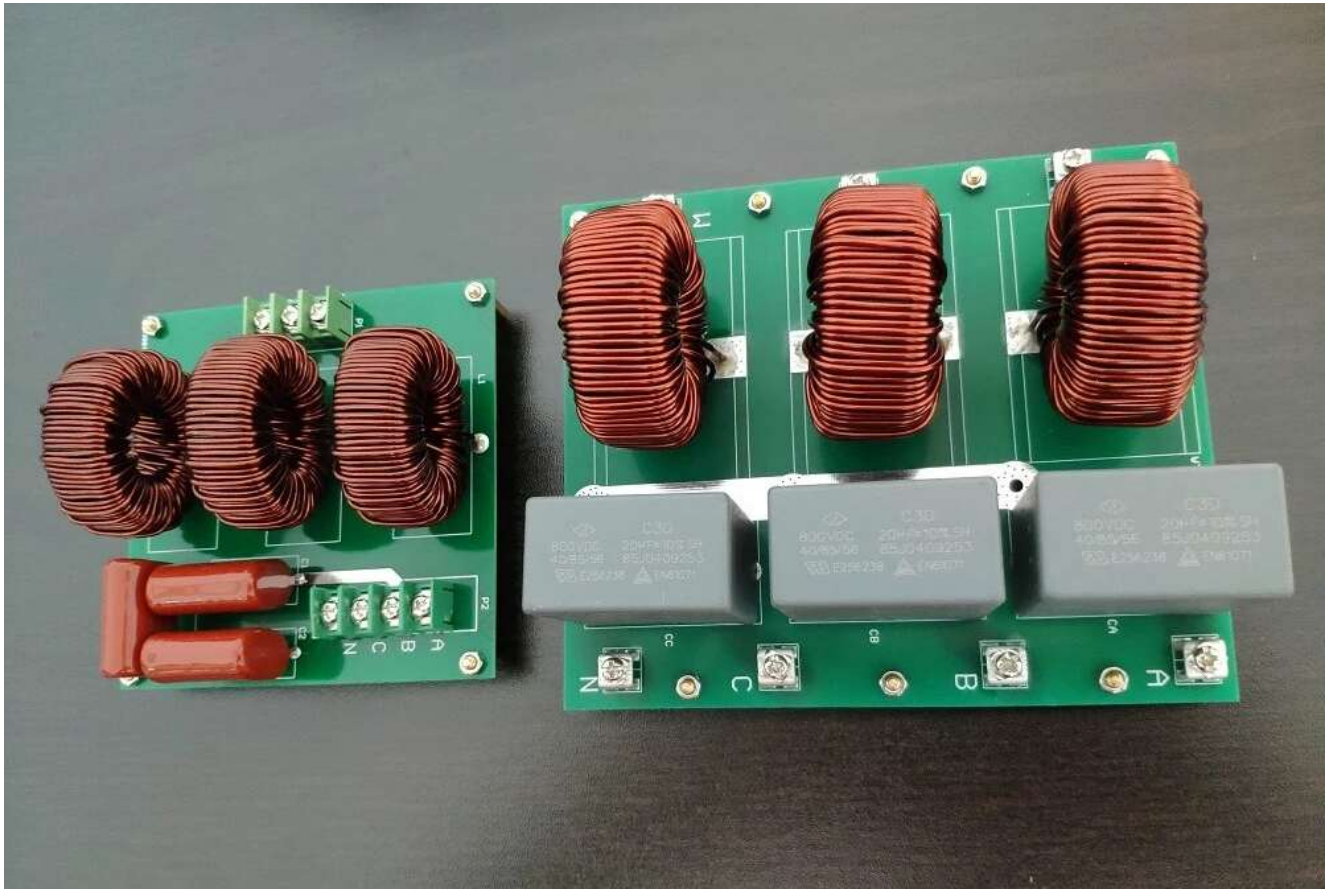
Sageduskarakteristik

- Sageduskarakteristiku lugeja ja nimetaja on üldjuhul kompleksarvud.
- Sageduskarakteristiku mooduli saab leida kui

$$|H(j\omega)| = \frac{\prod_{m=1}^{M}|j\omega - z_m|}{\prod_{n=1}^{N}|j\omega - p_n|} \ .$$

- Sageduskarakteristiku faasi aga kui

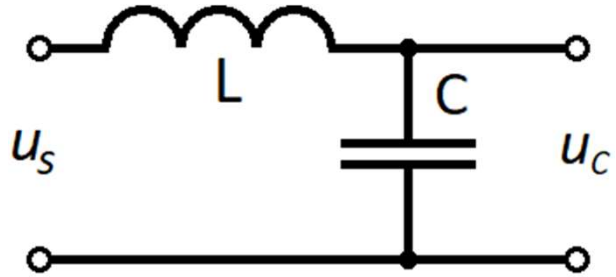
$$\angle H(j\omega) = \sum_{m=1}^{M} \angle(j\omega - z_m) - \sum_{n=1}^{N} \angle(j\omega - p_n) \ .$$

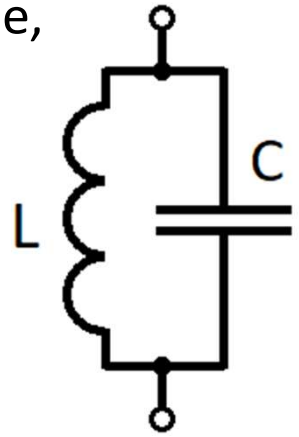


Võnkering (LC – ahel)

Võnkering

- Induktiivpoolist L ja kondensaatorist C koosnevat elektriahelat nimetatakse **võnkeringiks** (LC – ahelaks).
- Vastavalt nende kahe komponendi omavahelisele ühendusele eristatakse jada- ja rööpvõnkeringi.
- Alljärgnevalt vaatame lähemalt, vasakpoolsel joonisel kujutatud, LC-jadaahelat.
  - Esmalt vaatame juhtu, kui tegemist on ideaalsete, kaovabade, komponentidega.





Kaovaba jadavõnkeringi impedants

- Kaovaba jadavõnkeringi impedants on

$$Z = X_L + X_C = \mathrm{j}\omega L - \frac{\mathrm{j}}{\omega C}.$$

- Näeme, et impedants on puhtalt imaginaarne – reaalosa puudub.
- Täiendavalt näeme, et madalatel sagedustel on mahtuvtakistus suurem ning summaarne impedants *Z* on seega negatiivne – terve ahel käitub nagu kondensaator (mille mahtuvus on sagedusest sõltuv).
- Analoogiliselt on kõrgetel sagedustel domineerivaks komponendiks induktiivsus L (samuti sagedusest sõltuv) ja kogu ahela impedants on positiivne.

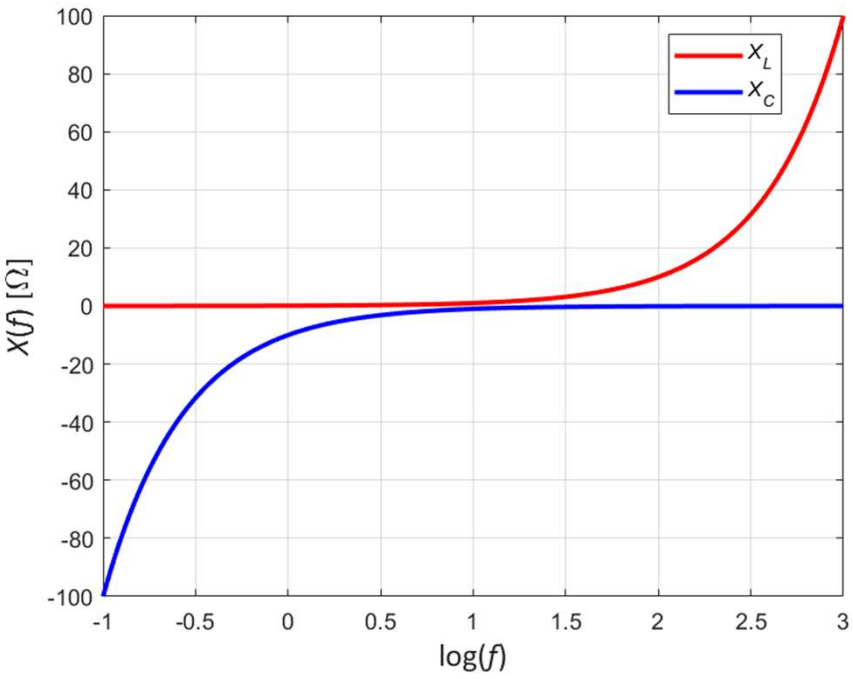
Resonantssagedus

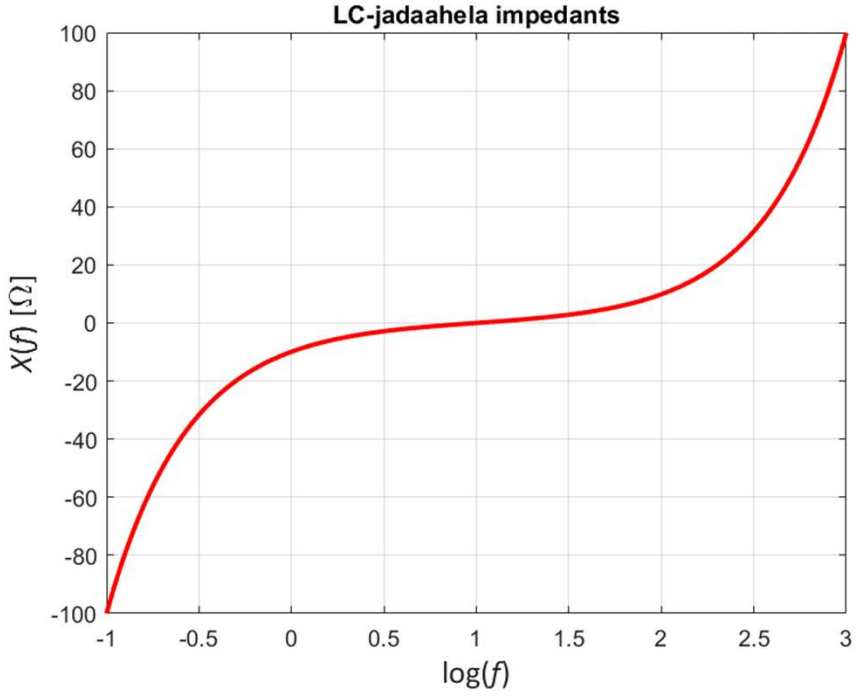
- Kuna induktiivtakistus on sagedusega võrdeline ja mahtuvtakistus pöördvõrdeline, siis peab leiduma mingi sagedus f_0 mille juures on nende moodulid omavahel võrdsed.
- Samas on induktiivtakistus positiivne ja mahtuvtakistus negatiivne, seega sellel sagedusel f_0 peab jadaahela impedants olema võrdne nulliga $Z = 0$.
- Taolist olukorda nimetatakse resonantsiks ja sagedust f_0, mille juures olukord avaldub ahela **resonants**- ehk **omavõnkesageduseks**

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} .$$

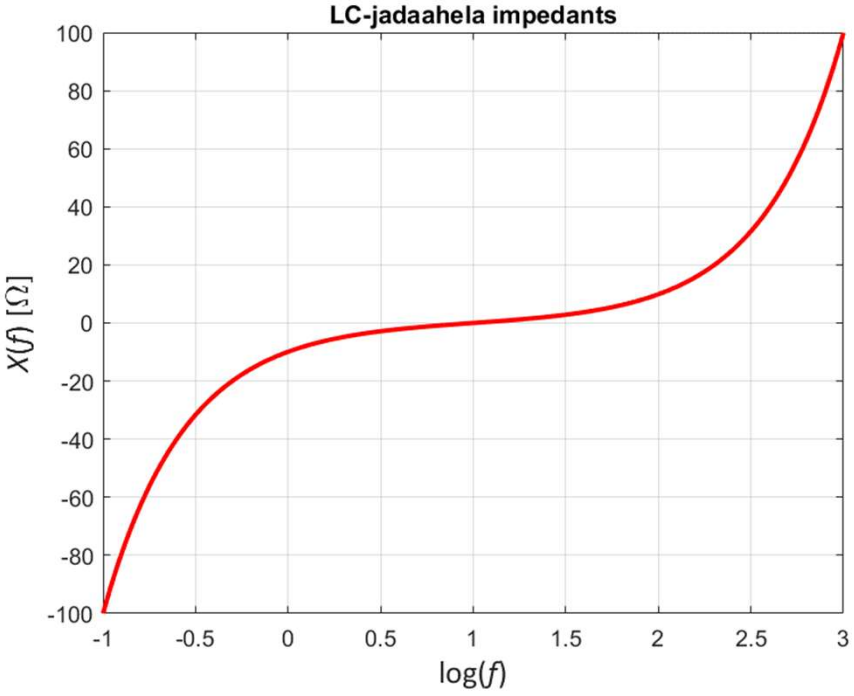
- Viimast avaldist resonantssageduse leidmiseks tuntakse **Thompsoni valemi** nime all.

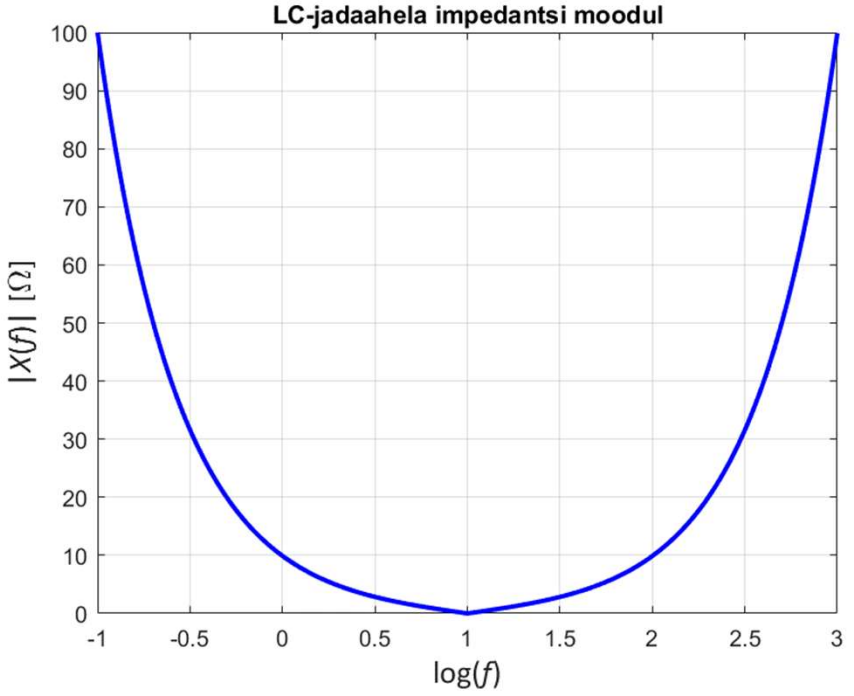
Kaovaba jadavõnkeringi impedants





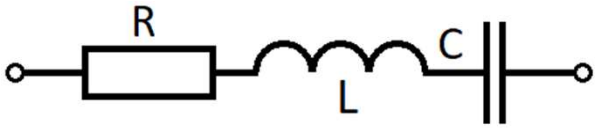
Kaovaba jadavõnkeringi resonants

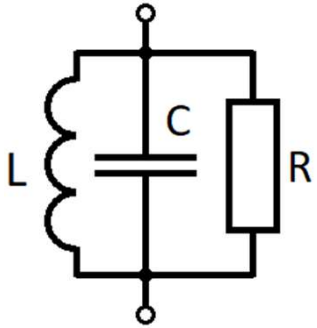




Reaalne võnkering (RLC – ahel)

- Reaalsetes elektriahelates tekivad alati suuremad või väiksemad energiakaod.
- Seega on ka reaalsel LC-ahelal alati mingi aktiivtakistus, millega on võnkeringide ja filtrite analüüsi juures vaja kindlasti arvestada.
- Praktikas sõltuvad võnkeringi omadused lisaks filtrielementidele (L ja C) ka koormuse ning allika takistustest.
- Järgnevalt vaatlemegi kolmest komponendist, takistusest R, induktiivsusest L ja mahtuvusest C koosnevat RLC-ahelat.





Jadavõnkeringi poolused

- Analüüsime eelmisel slaidil kujutatud jadavõnkeringi skeemi.
- Leiame, et ülekandefunktsioonil $Z(\omega) = U(\omega)/I(\omega)$ on üks nullkoht $z_1 = 0$ ja komplekspooluste paar. Viimase leidmiseks peame lahendama ülekandefunktsiooni nimetajas oleva ruutvõrrandi:

$$s^2LC + sRC + 1 = 0.$$

- Tulemuseks saame

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Jadavõnkeringi poolused

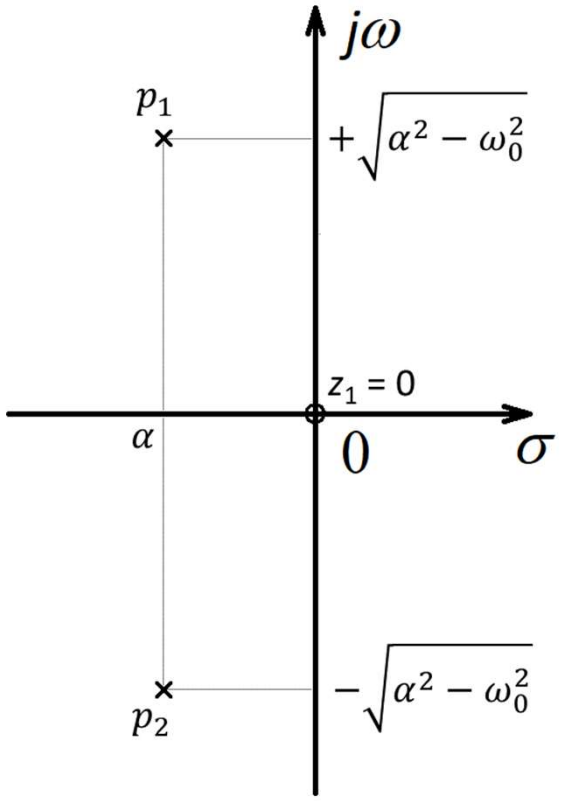
- Suhet $R/(2L)$ nimetatakse **sumbeteguriks** ja see näitab, kui kiiresti ahelase antud elektrienergia muudeks energialiikideks (peamiselt soojuseks) muutub. Sumbeteguri tähiseks on tavaliselt kreeka täht α.
- Arvestades, et omavõnkesagedus $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, saame pooluste paari avaldada kujul

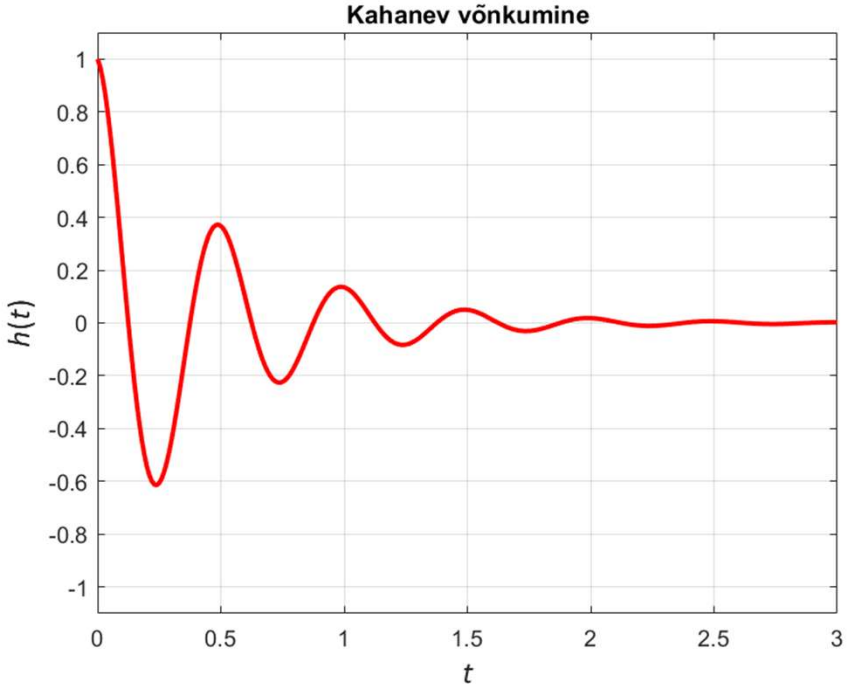
$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + \mathrm{j}\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2};$$

$$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - \mathrm{j}\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

- Taolise süsteemi impulsskajaks on eksponentsiaalselt sumbuvad harmoonilised võnkumised sagedusega $\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$.

Kadudega võnkering

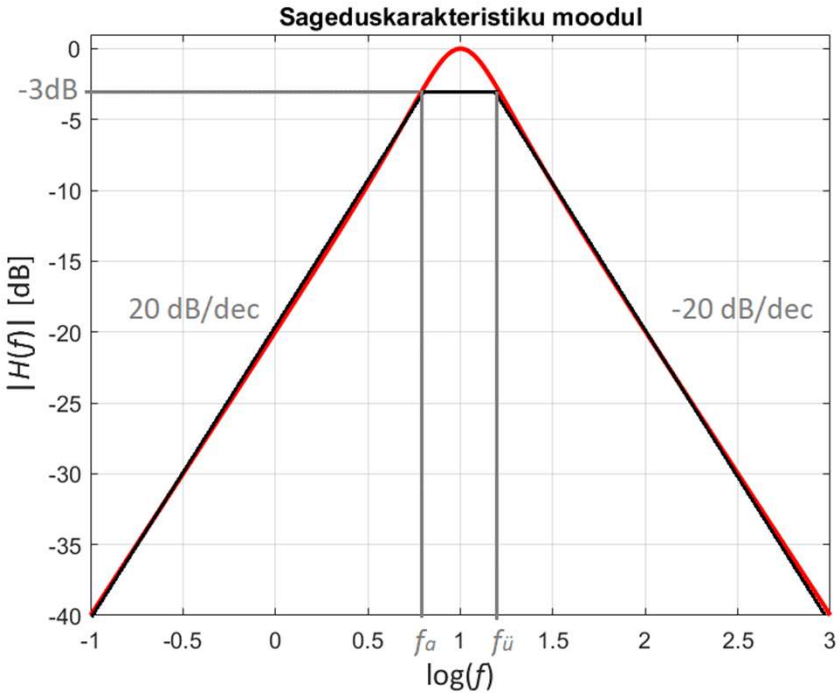




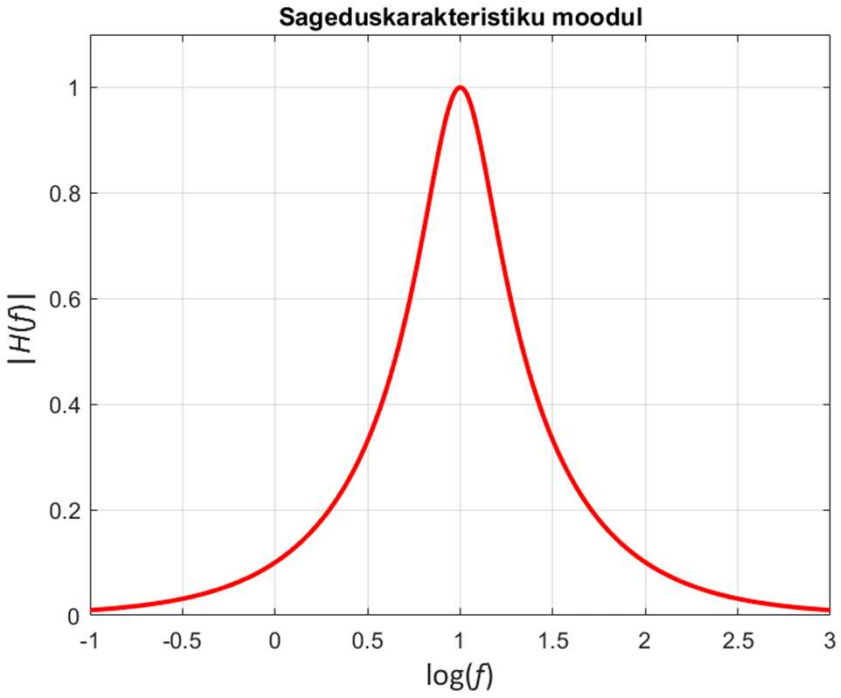
Jadavõnkeringi amplituud-sageduskarakteristik

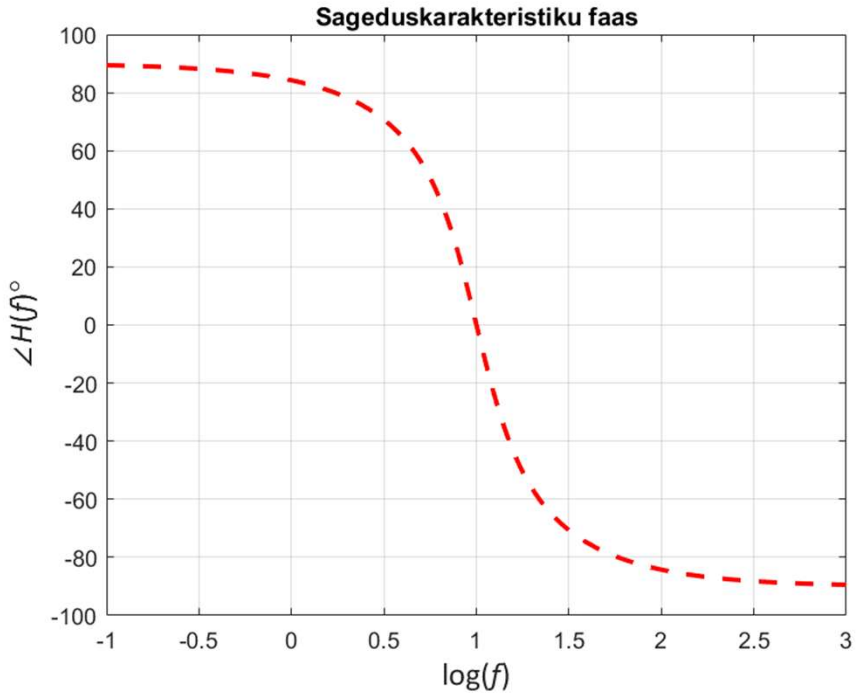
- Näeme, et taolise ahela ülekanne on maksimaalne selle resonants-sagedusel f_0.
- Nii sageduse suurenemisel kui vähenemisel võnkeringi ülekanne väheneb – tegemist on **ribafiltriga**.
- Pääsuala on määratud ülemise- $f_{ü}$ ja alumise f_a lõikesageduse vahega.
- Võnkeringi ribalaius -3 dB nivool:

$$B = f_{\text{ü}} - f_a$$

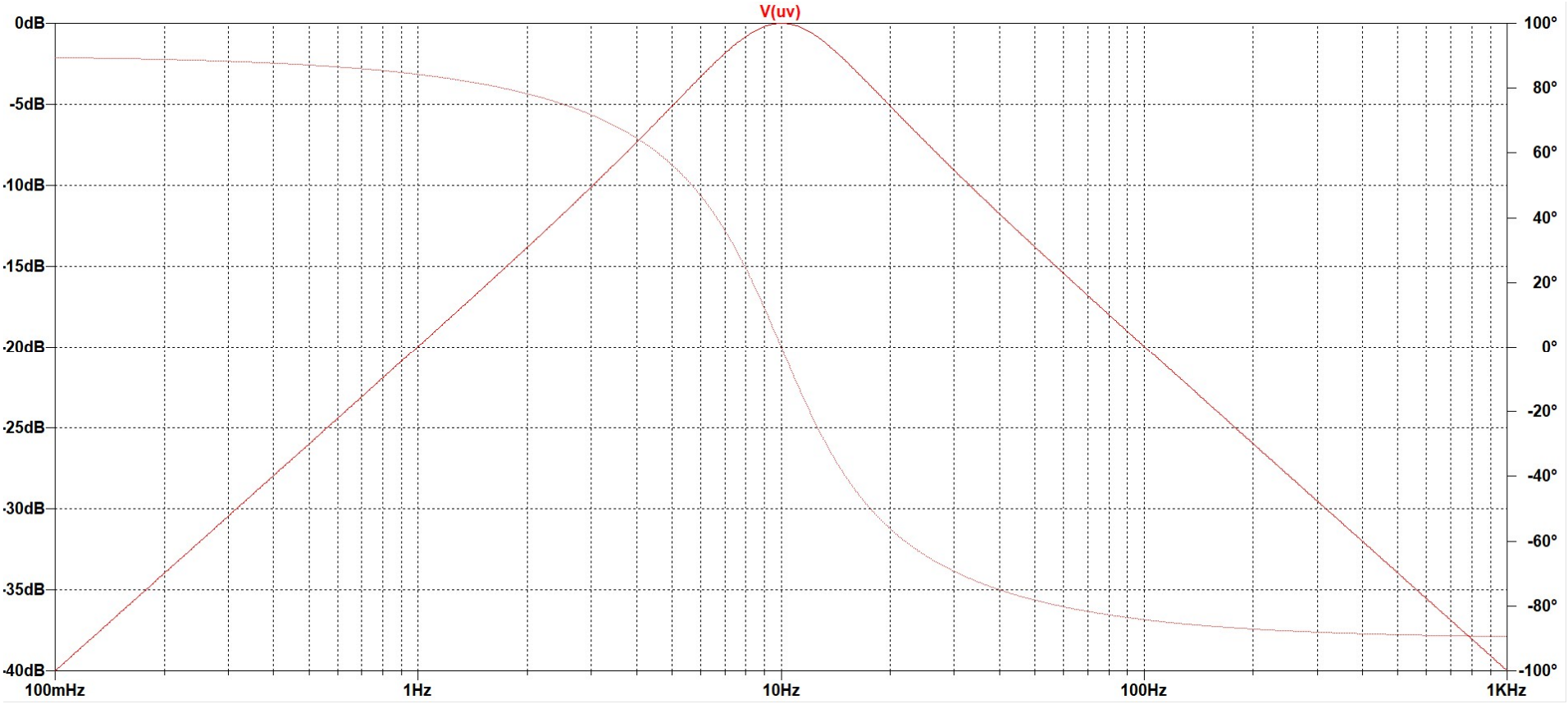


Jadavõnkeringi sageduskarakteristik

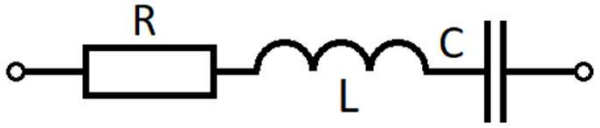




Jadavõnkeringi sageduskarakteristik (simuleeritud)



Jadavõnkeringi hüvetegur



- Koormamata jadavõnkeringi hüvetegur on

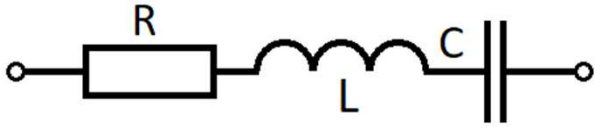
$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

- Hüveteguri suurendamiseks tuleb kas vähendada kadusid (takistus *R*) või suurendada suhet *L*/*C*.
- Hüvetegur on seotud võnkeringi ribalaiusega – 3 dB nivool

$$Q_0 = \frac{f_0}{B}.$$

- Suurele hüvetegurile vastab väike ribalaius – selline võnkering või **resonaator** on suure selektiivsusega.

Jadavõnkeringi impedants



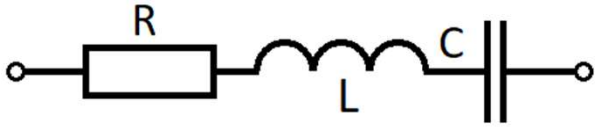
- Vaatleme jadavõnkeringi impedantsi resonantssageduse läheduses ringsagedusel $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$:

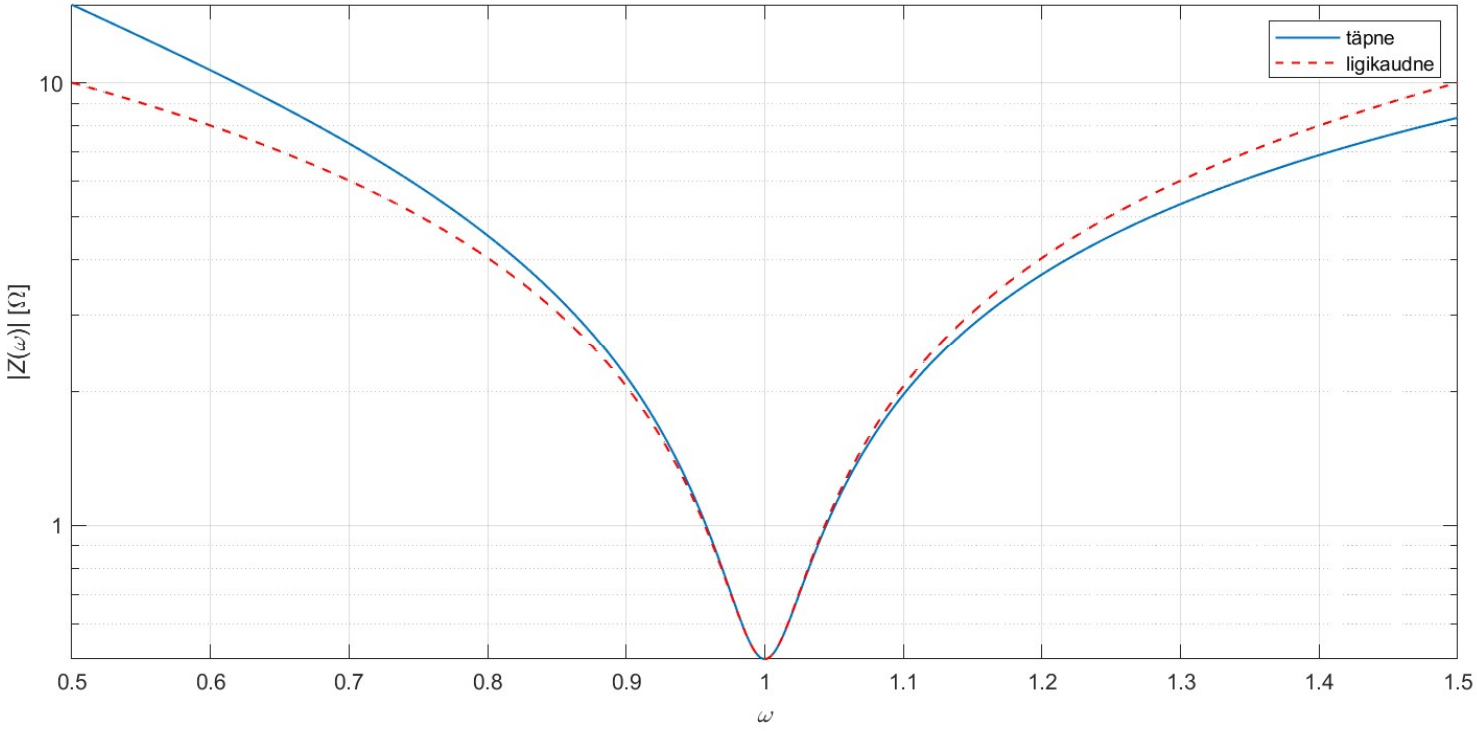
$$Z = R + \mathrm{j}\omega L\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)$$
$$= R + \mathrm{j}\omega L\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2}\right).$$

- Asutades ruutude vahe valemit saame $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) = \Delta\omega(2\omega + \Delta\omega) \approx \Delta\omega 2\omega$ ja seega

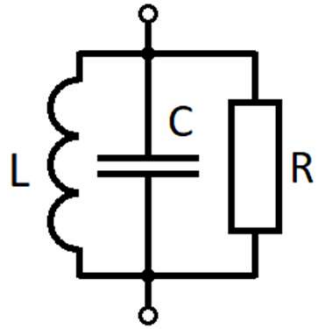
$$Z \approx R + \mathrm{j}2L\Delta\omega = R + \mathrm{j}\frac{2RQ\Delta\omega}{\omega_0}.$$

Jadavõnkeringi impedants





Rööpvõnkeringi hüvetegur



- Koormamata rööpvõnkeringi hüvetegur on

$$Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

- Hüveteguri suurendamiseks tuleb kas suurendada takistust *R* või suhet *C*/*L*.
- Seos ribalaiuse- ja hüveteguri puhul on sama

$$Q_0 = \frac{f_0}{B}.$$

- Praktilistes kasutusvaldkondades tuleb võnkering ühendada allika- ja koormuse külge. Mõlema takistus mõjutab võnkeringi hüvetegurit *Q*. Väliste mõjude tõttu viimase väärtus väheneb.

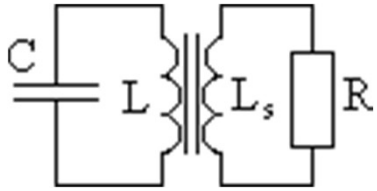
Koormatud võnkeringi hüvetegur.

- Jadavõnkeringi korral liitub väline takistus jadamisi võnkeringi enda omaga.
- Rööpvõnkeringi korral on allika ja koormuse takistused rööbiti võnkeringi enda takistusega.
- Juhul kui allika ja koormuse takistused on fikseeritud on ainus viis hüveteguri muutmiseks mahtuvuse ja induktiivsuse suhte valik.
- Praktikas ei ole soovitud hüvetegur tihtipeale realiseeritav. Vajalikud oleksid liiga väikesed, või isegi negatiivsed, induktiivsused või mahtuvused.

Koormuse mõju vähendamine

- Allika ja/või koormuse takistuste mõju vähendamiseks võib nad võnkeringiga sidestada transformatoorselt. Kui väline takistus on *R* ja trafo ülekandetegur $k = n/n_1$ siis ekvivalentne rööptakistus on

$$R' = R\left(\frac{n}{n_1}\right)^2 .$$

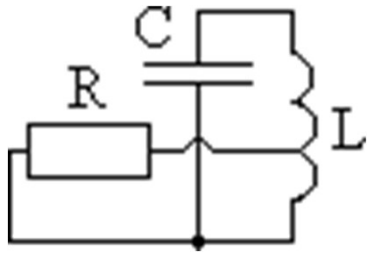


- Kus *n* on võnkeringi pooli keerdude arv ja n_1 on sidestusmähise L_S keerdude arv.
- Vaikimis eeldame, et sidestus kahe pooli vahel on tugev, tihtipeale ei pea see eeldus paika.
- Eeldab täiendavat sidestusmähist, alaliskomponent edasi ei kandu.

Koormuse mõju vähendamine

- Alternatiiviks on autotransformatoorne sidestus. Kui poolil on kokku *n* keeru ja sidestusharund võetakse n_1 keeru järelt siis on takistuse transformeerimise avaldis sama mis eelmisel juhul

$$R' = R\left(\frac{n}{n_1}\right)^2 .$$

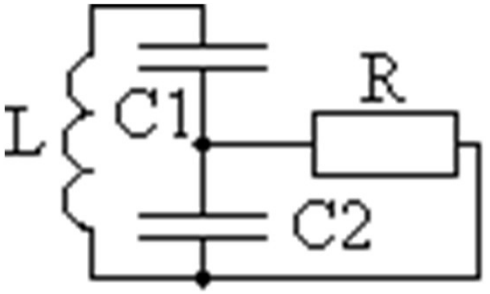


- Alaliskomponent pääseb läbi. Kui viimast on vaja takistada, tuleb lisada eralduskondensaator.

Koormuse mõju vähendamine

- Kolmanda variandina võib kasutada sidestamist läbi mahtuvusliku pingejaguri (*tapped capacitor network*).
- Ekvivalentse rööptakistuse ligikaudne avaldis on

$$R' \approx R\left(1+\frac{C2}{C1}\right)^2 .$$



- Ligikaudse avaldise saame kui paraleelahela RC2 hüvetegur teisendada jadaahela omaks ja leida ekvivalentne jadatakistus. Seejärel liita juurde C1 mahtuvus ja teisendada nüüd jadaahela hüveteguri kaudu tulemus kogu võnkeringiga rööbiti olevaks ekvivalentseks takistuseks *R´*.

Võnkeringide sidestamine

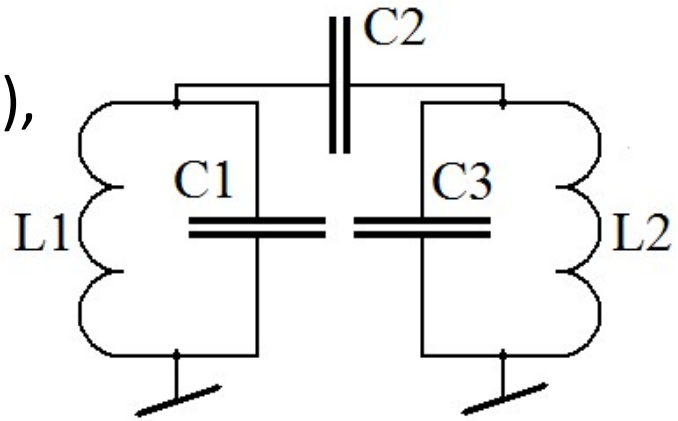
- Energia ülekandmiseks ühest võnkeringist, või üldisemalt ühest resonaatorist, teise kasutatakse **sidestamist** (*coupling*).
- Täiendavalt mõjutab sidestus saadava sageduskarakteristiku kuju ja ahelas tekkivaid kadusid.
- Võnkeringe saab sidestada kas transformatoorselt, induktiivselt või mahtuvuslikult. Praktikas on enamlevinud just viimane.
- Sidestuse tugevuse järgi eristatakse nõrka **alakriitilist sidestust** (*under coupling*), tugevat **ülekriitilist sidestust** (*over coupling*) ja **kriitilist sidestust** (*critical coupling*).

Mahtuvuslik sidestus

- Võnkeringide vaheline sidestus tekitatakse nende vahele ühendatud, väikese mahtuvusega, sidestuskondensaatoriga.
- Kui mõlemad võnkeringid on identsed (*C* = *C1* = *C3*), siis kriitilise sidestuse tagab mahtuvus

$$C2 = \frac{C}{Q}.$$

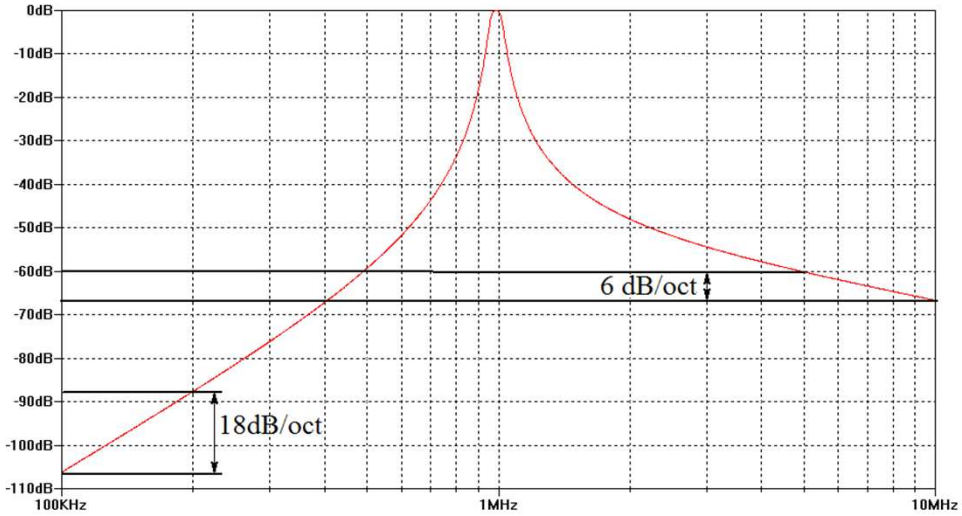
kus *Q* on koormatud võnkeringi hüvetegur.



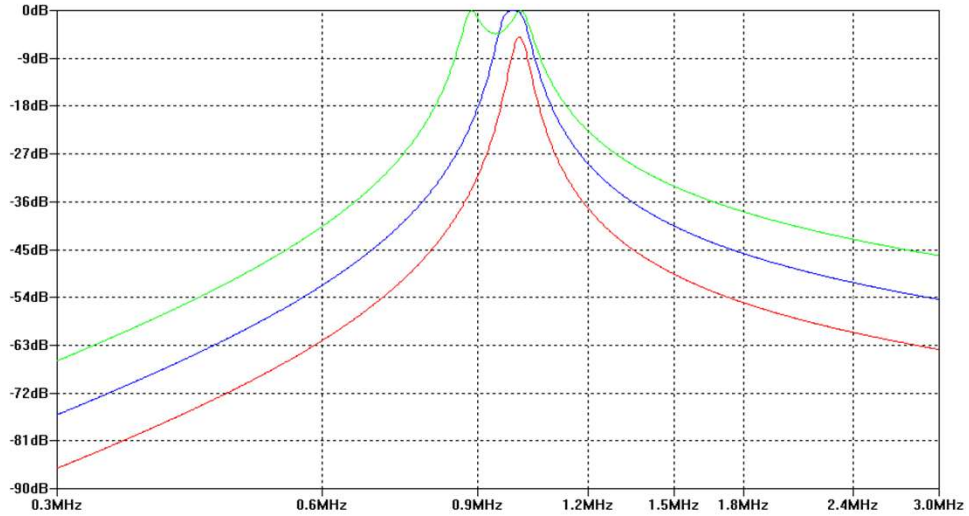
- Summaarse ahela hüvetegur on sellisel juhul ligikaudu 0,707·*Q*, kuid tõkkeala tõus on järsem.

Mahtuvuslik sidestus

ASK mahtuvusliku sidestuse korral



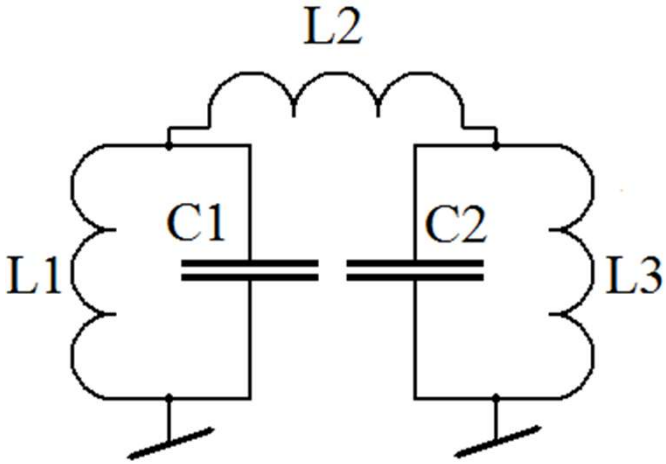
Alakriitiline sidestus
Kriitiline sidestus
Ülekriitiline sidestus



Induktiivne sidestus

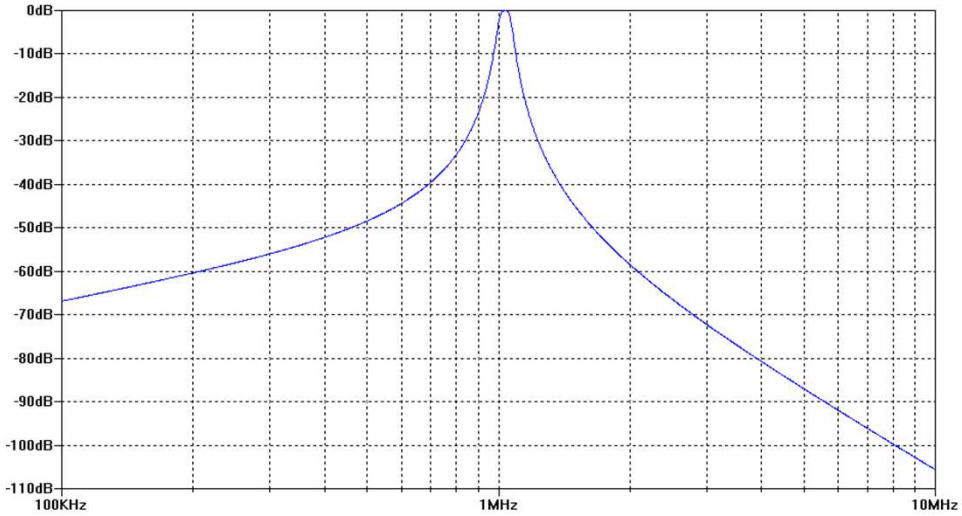
- Võnkeringide vaheline sidestus tekitatakse nende vahele ühendatud, suure induktiivsusega, sidestuspooliga.
- Kui mõlemad võnkeringid on identsed (*L = L1 = L3*), siis kriitilise sidestuse tagab mahtuvus

$$L2 = L \cdot Q.$$

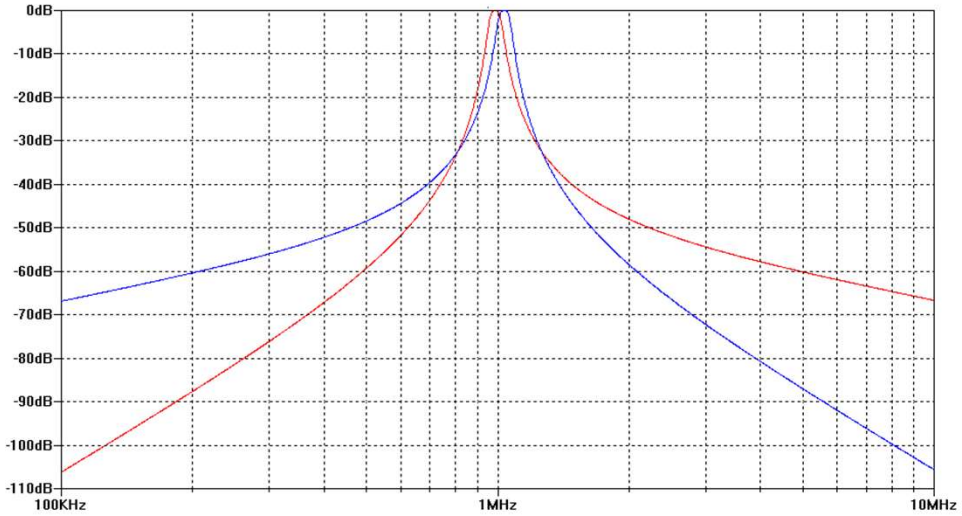


Induktiivne sidestus

ASK induktiivse sidestuse korral



Mahtuvusliku sidestus
Induktiivne sidestus



Ülekandeliin resonaatorina

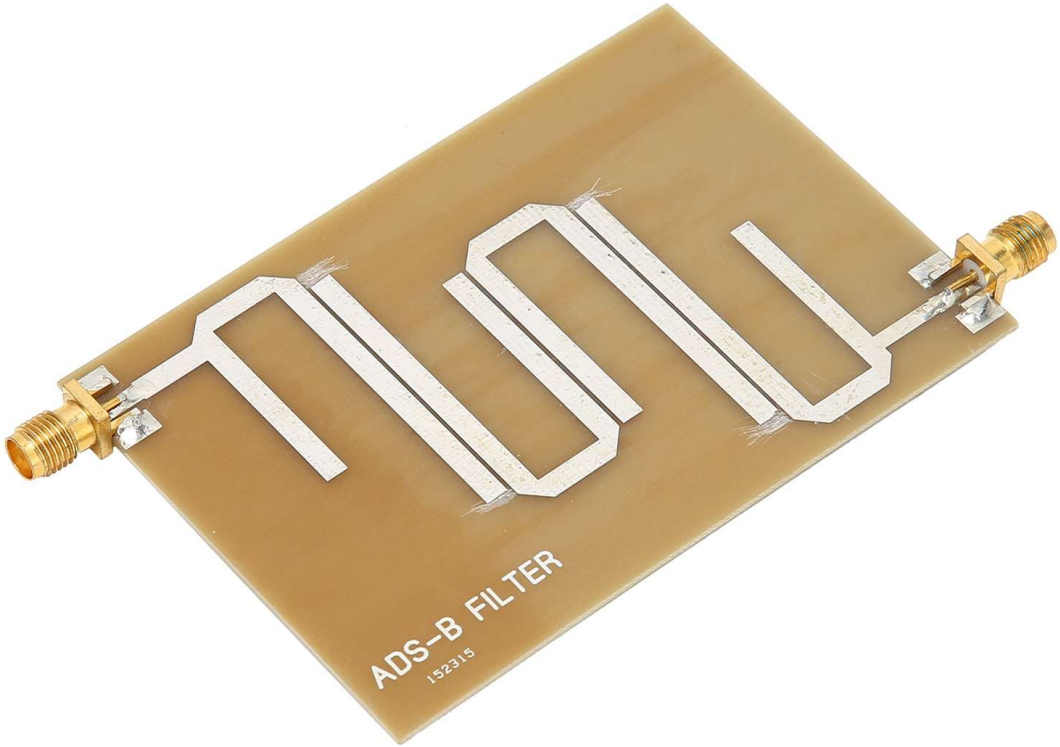


Foto: https://www.daraz.pk/

Analüüs

- Näitasime eelnevalt, et jadavõnkeringi impedants resonantssageduse ω_0 lähedal, viimast väikesel kaugusel $\Delta\omega$, on ligikaudu

$$Z(\omega_0 + \Delta\omega) \approx R + \mathrm{j}2L\Delta\omega = R + \mathrm{j}\frac{2RQ_0\Delta\omega}{\omega_0}.$$

- Analoogiliselt saab näidata, et rööpvõnkeringi korral

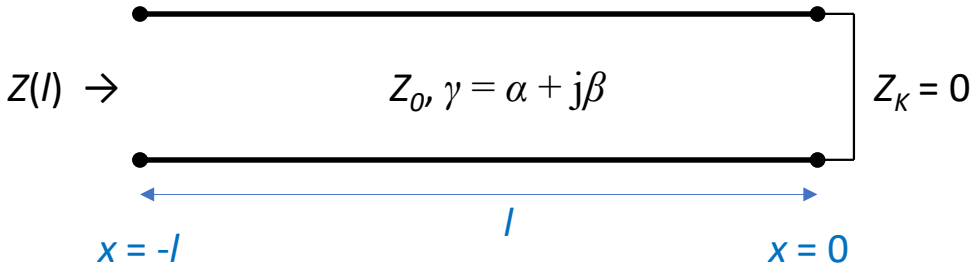
$$Z(\omega_0 + \Delta\omega) \approx \frac{R}{1 + \mathrm{j}2\Delta\omega RC} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}2Q_0\frac{\Delta\omega}{\omega_0}}.$$

- Mõlemad avaldised on abiks ülekandeliinidel resonaatorite analüüsil.

Lühistatud poollainelõik resonaatorina

- Liinilõikudel resonaatorite analüüsil peame arvestama kadudega kasutatavas ülekandeliinis. On realistlik eeldada, et kaod on siiski suhteliselt väikesed: $\alpha l \ll 1$,
- Vaadeldavaks resonaatoriks on otsast lühistatud ülekandeliini lõik lainetakistusega Z_0, kompleksse levikonstandiga $\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta$ ning pikkusega

$$l = n\frac{\lambda}{2}, n \in \mathbb{N}^+.$$



Lühistatud poollainelõik resonaatorina

- Tuletame veel korra meelde, et koormatud ülekandeliini impedants:

$$Z(x) = Z_0 \frac{Z_K - Z_0 \tanh(\gamma x)}{Z_0 - Z_K \tanh(\gamma x)}.$$

- Meie konkreetsel juhul on $Z_K = 0$ ja $x = -l$, seega avaldis lihtsustub

$$Z(l) = Z_0 \tanh(\gamma l).$$

- Saab näidata, et see impedants sageduse ω_0 lähedal, viimast väikesel kaugusel $\Delta\omega$ on

$$Z(l) \approx Z_0 \left(\alpha l + \mathrm{j} \frac{\pi \Delta\omega}{\omega_0} \right).$$

Lühistatud poollainelõik resonaatorina

- Võrreldes saadud tulemust sarnase avaldisega jadavõnkeringi kohta saame meie resonaatorid aseskeemi elementideks ja parameetriteks

$$R = Z_0 \alpha l,$$

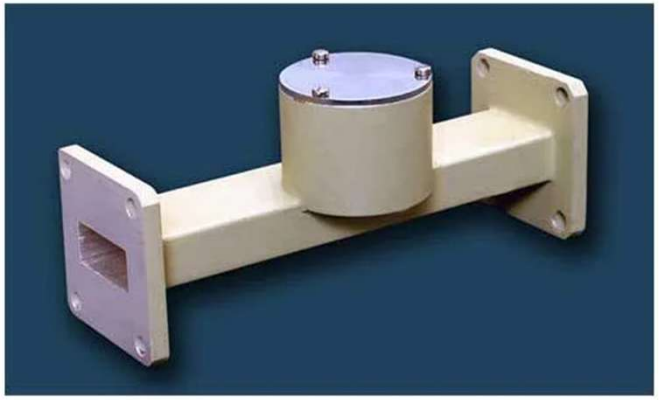
$$L = \frac{\pi Z_0}{2\omega_0} = \frac{Z_0}{4f_0},$$

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{\pi^2 f_0 Z_0},$$

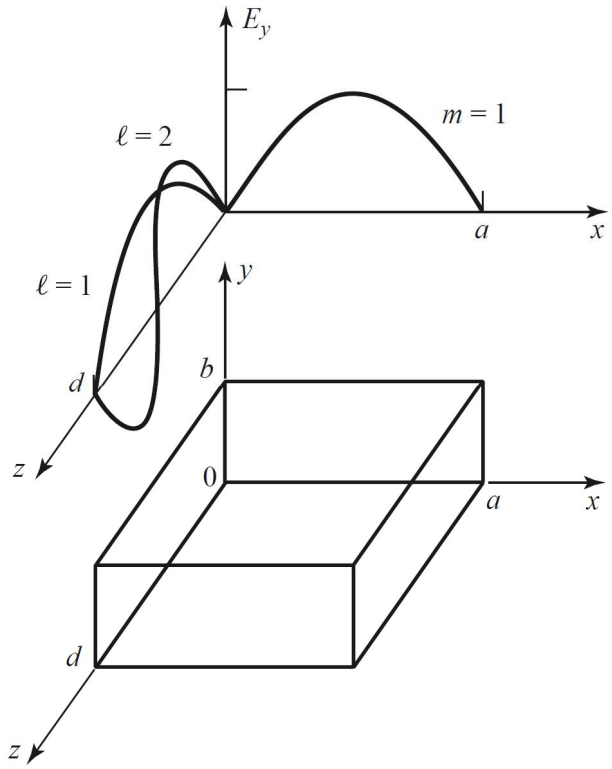
$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\pi}{2\alpha l} = \frac{\beta}{2\alpha}.$$

Õõnesresonaator

- Sarnaselt ülekandeliinidele saab (mikrolaine) resonaatoreid valmistada ka lainejuhtide baasil. Kuna otsast avatud lainejuht kaotaks kiirguse tõttu palju energiat, siis on taolised **õõnesresonaatorid** (*cavity resonator*, *microwave cavity*) praktikas valmistatud otstest lühistatud lainejuhtide baasil.



Ristküliku kujuline õõnesresonaator



- Resonaatori mõõtmed on, kasvavas järjekorras: *b*, *a* ja *d*.
- Moodide järjekorranumbrid, vastavalt *x*, *y* ja *z*-telje sihis on *m*, *n* ja *l*. Kõik kolm on mittenegatiivsed täisarvud. Maksimaalselt üks neist võib olla ka null.
- Lainearv resonantsi korral on

$$k_{m,n,l} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2}.$$

Joonis: D. M. Pozar, Microwave Engineering, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc, 2012.

Ristküliku kujuline õõnesresonaator

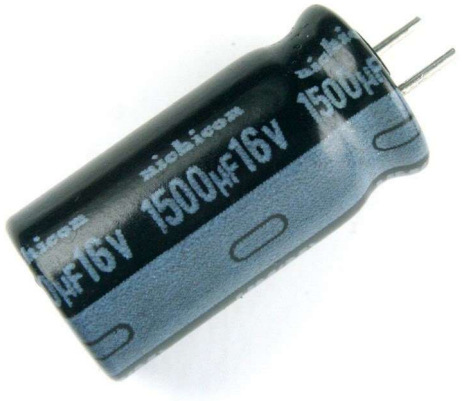
- Resonantssagedus TE_{mnl} või TM_{mnl} moodi korral oleks seega

$$f_{m,n,l} = \frac{ck_{m,n,l}}{2\pi\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{c}\right)^2}\,.$$

- Kõige madalam resonantssagedus (domineeriv mood) on sellisel juhul TE_{101}. Viimane on olemuselt ekvivalentne otsast lühistatud λ/2 pikkusega ülekandeliinist resonaatorile.

LISA 1 : RC – ahela näide

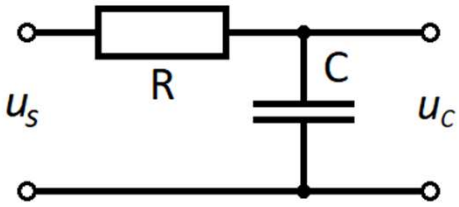




RC-ahela sageduskarakteristik

- RC-ahelat võib vaadata pingejagurina mille alumiseks õlaks on mahtuvus C.
- Pingejaguri ülekande valemist saame RC-ahela ülekande

$$H = \frac{X_C}{R + X_C}.$$



- Kuna mahtuvtakistus X_C sõltub sagedusest, siis on ka RC-ahela ülekanne sagedusest sõltuv

$$H(f) = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi f RC + 1}.$$

RC-ahela ülekandefunktsioon

- Tehes asenduse j2πf = jω = s saame RC-ahela ülekandefunktsiooni

$$H(s) = \frac{1}{sRC + 1} \, .$$

- Näeme, et ülekandefunktsioonil pole ühtegi nulli ja on ainult üks poolus

$$p_1 = -\frac{1}{RC} \, .$$

- Seega on RC-ahela näol tegemist **stabiilse süsteemiga** mille impulsskajaks on **eksponentsiaalselt kahanev** kondensaatori **pinge** u_C.

RC-ahela sageduskarakteristik

- RC-ahela sageduskarakteristik on

$$H(j\omega) = \frac{1}{\mathrm{j}\omega RC + 1}.$$

- Võttes arvesse ainsa pooluse p_1 väärtust saame viimase kirja panna üldkujul

$$H(j\omega) = \frac{1}{RC}\frac{1}{\left(\mathrm{j}\omega + \frac{1}{RC}\right)} = K\frac{1}{(\mathrm{j}\omega - p_1)}.$$

- Antud näites on edasiseks analüüsiks mugavam siiski esimene kuju.

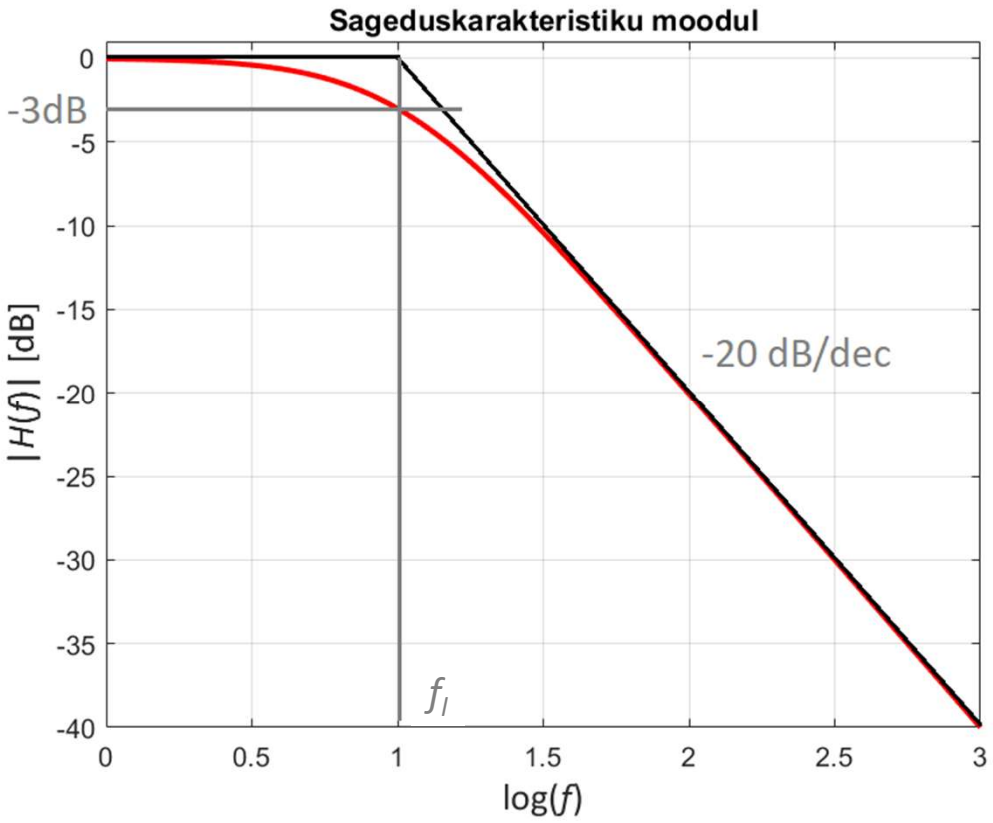
RC-ahela amplituud-sageduskarakteristik

- Sageduskarakteristiku moodul, ehk amplituud- sageduskarakteristik ASK on leitav kui sageduskarakteristiku lugeja ja nimetaja moodulite suhe:

$$|H(\mathrm{j}\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}} .$$

- Nurk- ehk **lõikesagedusel** f_l (ka f_c) on ülekanne vähenenud 3 dB võrra:

$$f_l = \frac{1}{2\pi RC} .$$



RC-ahela faasikarakteristik

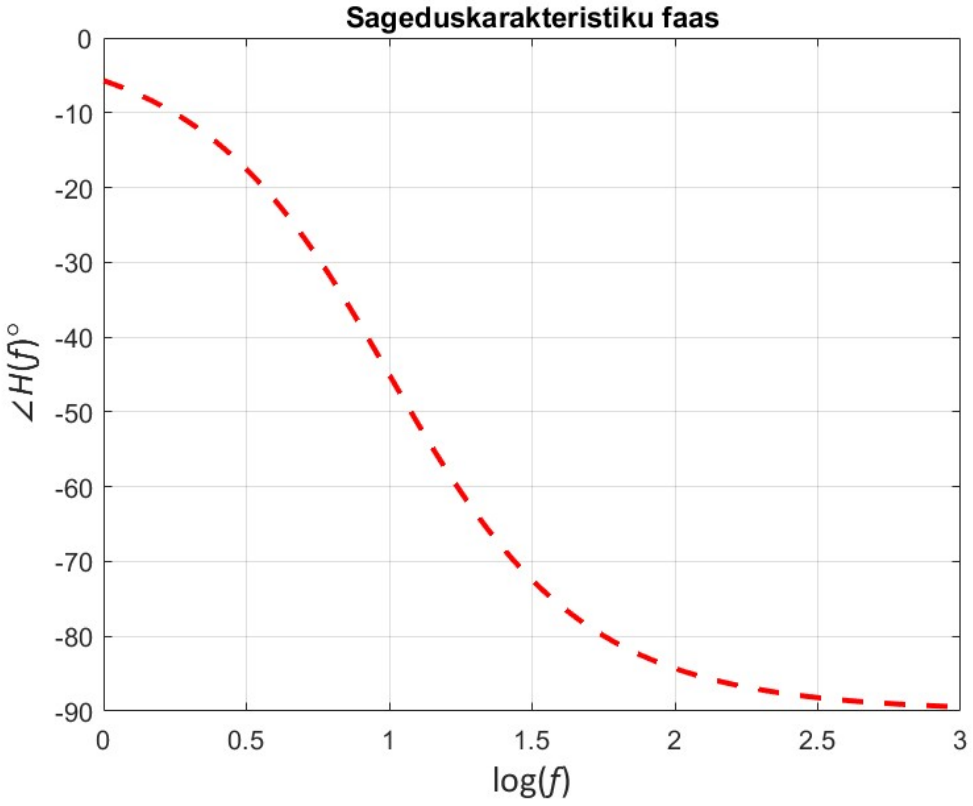
- Sageduskarakteristiku faas $\angle H(f)$ on lugeja ja nimetaja faaside erinevus:

$$\angle H(f) = \operatorname{atan}\frac{0}{1} - \operatorname{atan}\frac{\omega RC}{1}.$$

- Lihtsustatult

$$\angle H(f) = -\operatorname{atan}(\omega RC) = -\operatorname{atan}\frac{f}{f_l}.$$

- Näeme, et lõikesagedusel f_l on faasinihe -45° ehk π/4 radiaani .



RC-ahela sageduskarakteristik (simuleeritud)

