11. Mitmekiireline levi

IEE2580 – Antennid ja raadiolevi

Superpositsiooniprintsiip

- **Superpositsiooniprintsiip*** on kõikides **lineaarsetes süsteemides** kehtiv printsiip, mille järgi süsteemi reaktsioon $F(x)$ mitmele mõjurile on sama, mis üksikute mõjurite tekitatud reaktsioonide summa:

$$F(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = F(x_1) + F(x_2) + \cdots + F(x_n).$$

- Viimast omadust nimetatakse **aditiivsuseks**.
- Kui sisendit suurendada kindel arv kordi, suureneb ka väljund täpselt sama arv kordi

$$F(a \cdot x) = a \cdot F(x).$$

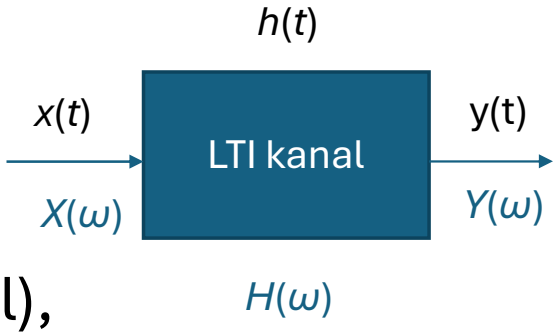
- Viimas omadust nimetatakse **homogeensuseks** (skaleeritavus).

* https://opik.fyysika.ee/index.php/book/section/280

Lineaarne statsionaarne levimudel

- **Lineaarne statsionaarne levimudel** (*Linear Time-Invariant Model*) LTI eeldab, et sidekanal on lineaarne süsteem mille omadused ei muutu ajas.
- Mudeli väljundsignaal (raadiovastuvõtja sisend-signaal) on :

$$y(t) = H \cdot x(t - \tau),$$



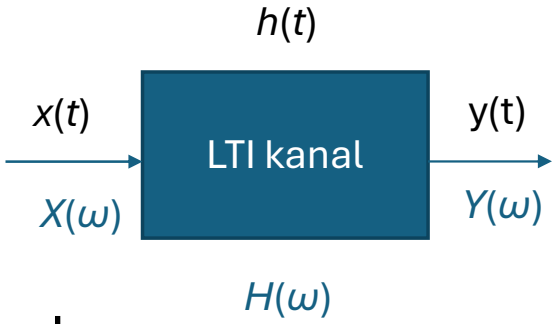
kus $x(t)$ on kanali sisendsignaal (saatja väljundsignaal), H on kanali ülekanne ja τ on kanalis tekkiv ajaline viide mis on võrdeline signaali levikiirusega v_p ja pöördvõrdeline kanali pikkusega d:

$$\tau = \frac{d}{v} .$$

Lineaarne statsionaarne levimudel

- Praktikas lisandub kanalis levivale signaalile juhuslik müra $n(t)$. Tavaliselt eeldatakse, et tegemist on aditiivse valge müraga mis allub Gaussi (normaal) jaotusele (AWGN mudel).
- Vastuvõetud signaali avaldis on sellisel juhul:

$$y(t) = H \cdot x(t - \tau) + n(t).$$



- LTI kanalit saab kirjeldada nii ajaskaalas kanali impulsskaja $h(t) = H \cdot \delta(t - \tau)$ kaudu kui sagedusskaalas kanali sageduskarakteristiku $H(\omega) = H \cdot e^{-j\omega\tau} = H \cdot e^{-jkd}$ kaudu.

Lineaarse kanali väljund

- Mistahes lineaarse süsteemi, kaasaarvatud raadiokanali, väljundsignaal $y(t)$ on süsteemi sisendsignaali $x(t)$ ja süsteemi impulsskaja $h(t)$ **konvolutsioon**:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cdot h(t-u)du\,.$$

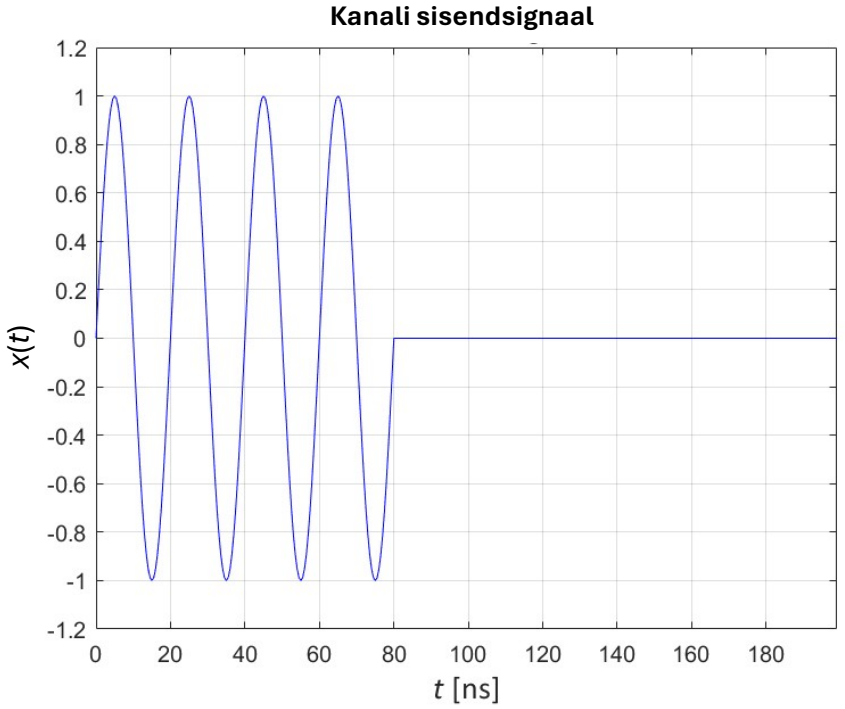
- Konkreetselt LTI mudeli korral seega

$$y(t) = x(t) * H \cdot \delta(t-\tau) = H \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cdot \delta(t-\tau-u)du\,.$$

LTI kanali näide

- Olgu kanali sisendsignaaliks $x(t)$ moduleerimata nelinurkne raadio-impulss kandesagedusega f_c = 50 MHz ja kestusega T_s = 80 ns:

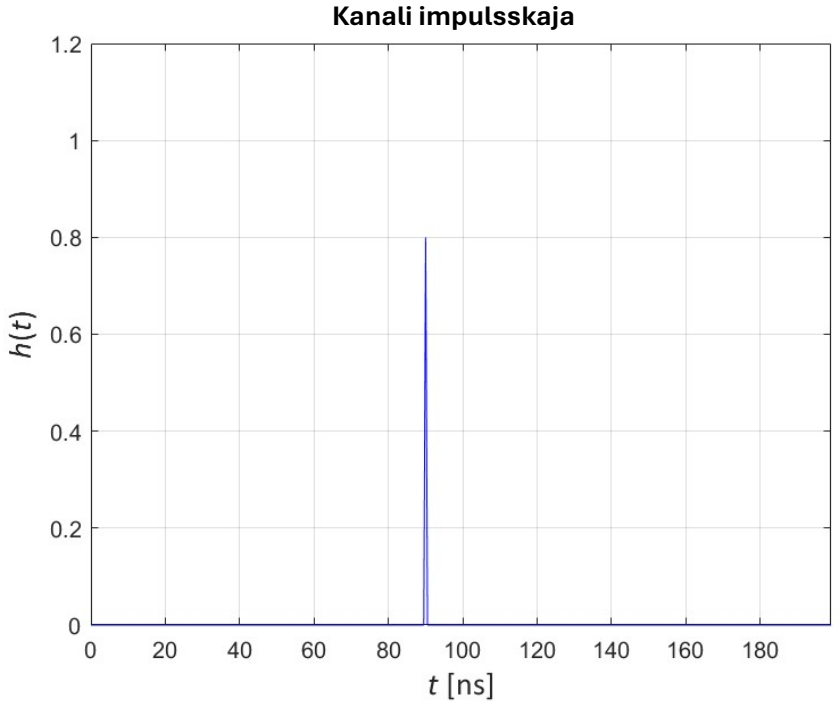
$$x(t) = \begin{cases} \sin(2\pi f_c t), \text{kui } 0 < t < T_s \\ 0, \qquad \text{muul juhul} \end{cases}.$$



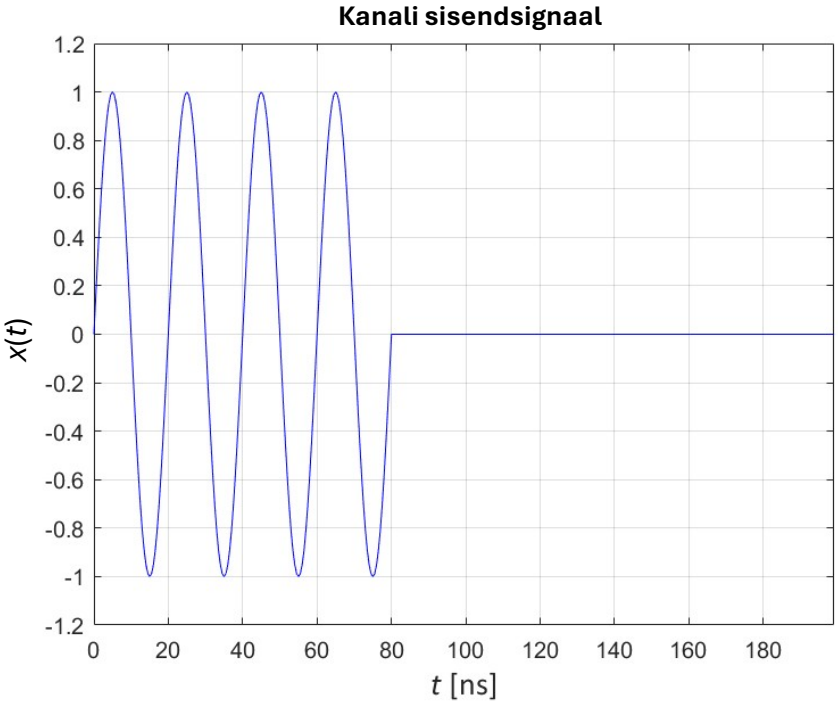
LTI kanali näide

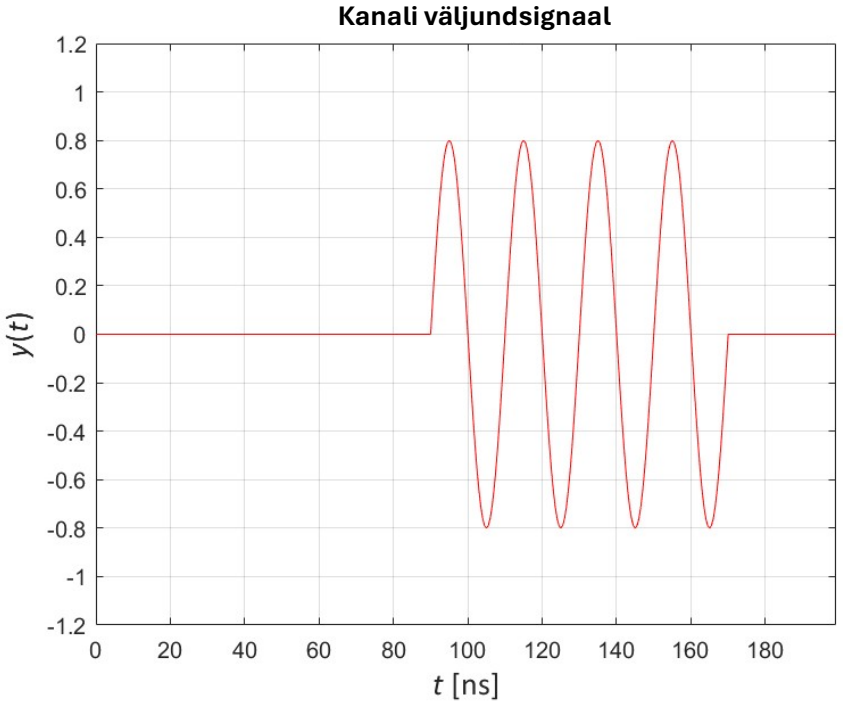
- Olgu mudeli impulsskaja $h(t)$ kirjeldavateks parameetriteks $H = 0{,}8$ ja $\tau = 90$ ns.
- Impulsskaja ise oleks siis

$$h(t) = 0{,}8 \cdot \delta(t - 9 \cdot 10^{-8}).$$



LTI kanali näide





Kanali sageduskarakteristik

- Kanali sageduskarakteristik on selle impulsskaja $h(t)$ Fourieri teisendus

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} H\delta(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi f t} dt\,.$$

- Sarnaselt on impulsskaja leitav kanali sageduskarakteristiku Fourier'i pöördteisenduse kaudu.
- LTI mudeli korral saame kanali sageduskarakteristiku kujul

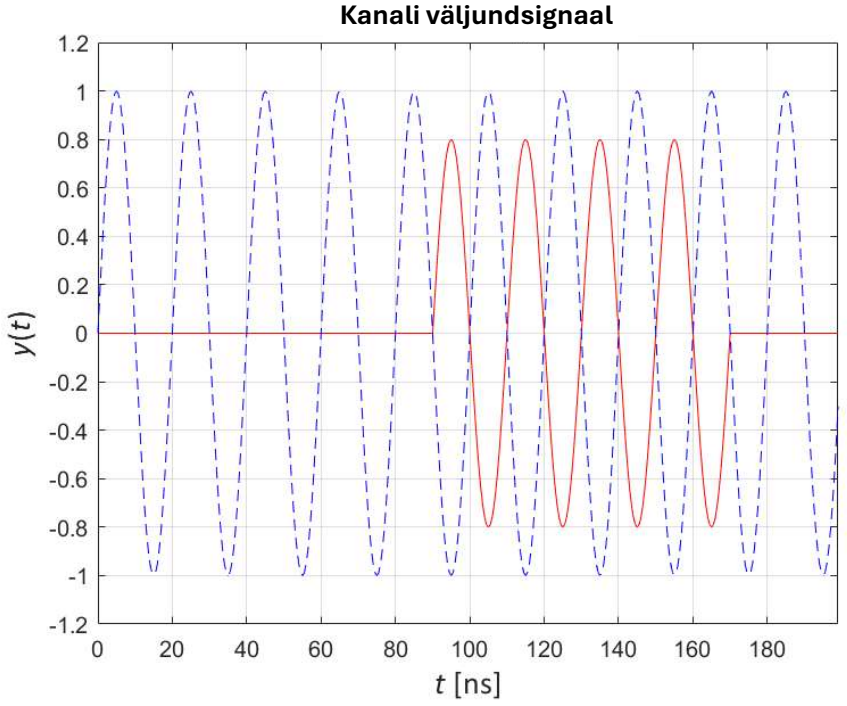
$$H(f) = H\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\tau f}.$$

Faasinihe kanalis

- Kanali väljundsignaal:

$$y(t) = \begin{cases} H\sin[2\pi f_c(t-\tau)], \text{kui } \tau < t < \tau + T_s \\ 0, \qquad \text{everywhere else} \end{cases}$$

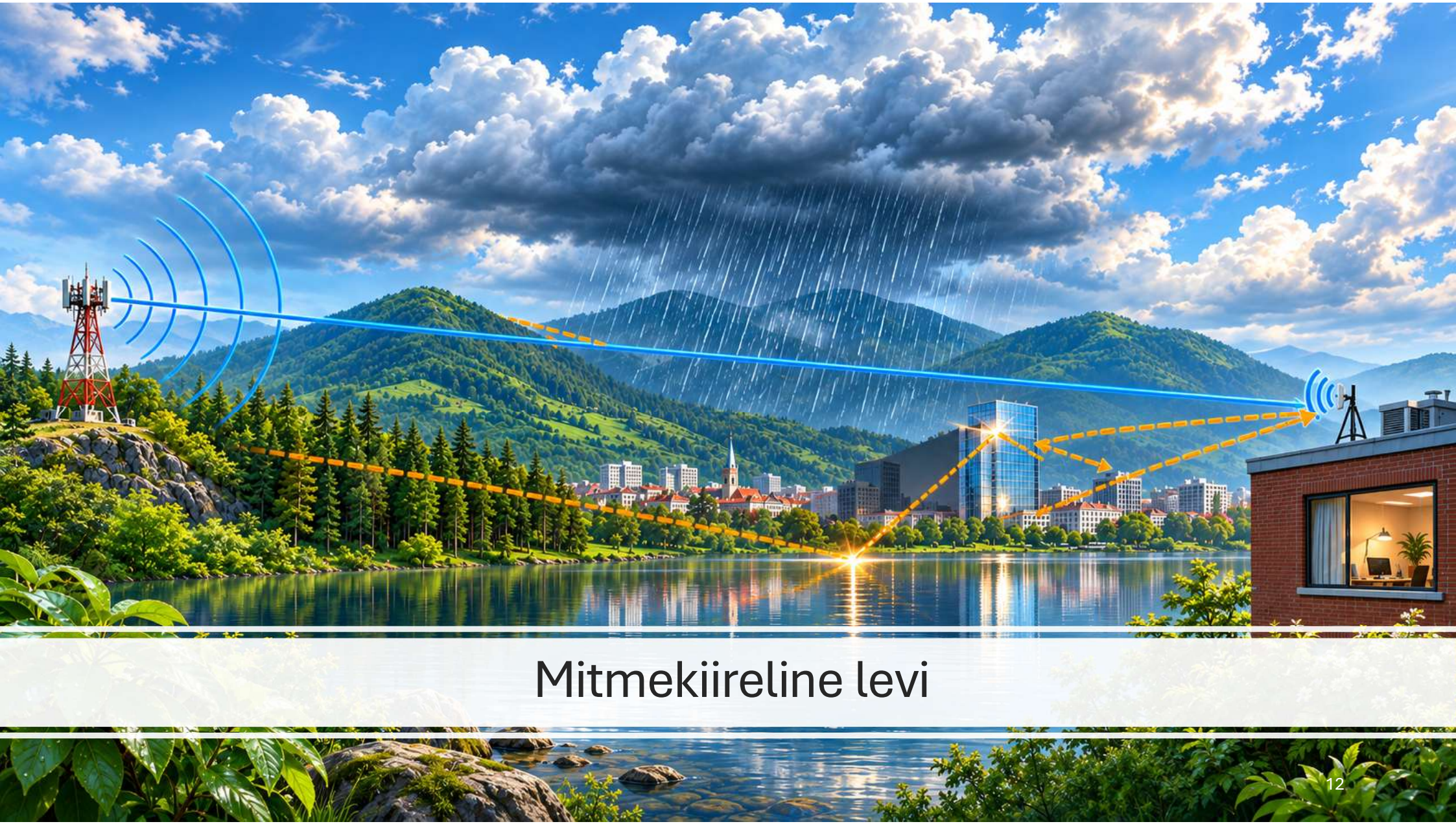
- Faasinihe $\phi = -2\pi f_c \tau = -\omega\tau$.
- Meie näites:
  $\phi = -2\pi 5 \cdot 10^7 \cdot 9 \cdot 10^{-8} = -9\pi$ rad.
- Arvestades, et faas on üheselt määratud vahemikus 0 to 2π, siis
  $\phi = -9\pi \bmod 2\pi = \pi$ rad.



Konvolutsiooniteoreem

- Teades kanali sageduskarakteristikut $H(\omega)$ saab selle väljundsignaali spektri $Y(\omega)$ leida sisendsignaali spektri $X(\omega)$ ja kanali sageduskarakteristiku korrutisena: $Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$.
- Ülaltoodud seost saab ära kasutada arvutamaks lineaarse süsteemi, nagu näiteks raadiokanali, väljundsignaali ajalist kuju **konvolutsiooniteoreemi** kasutades:

$$\mathcal{F}(x * h) = \mathcal{F}(x) \cdot \mathcal{F}(h).$$



Mitmekiireline levi

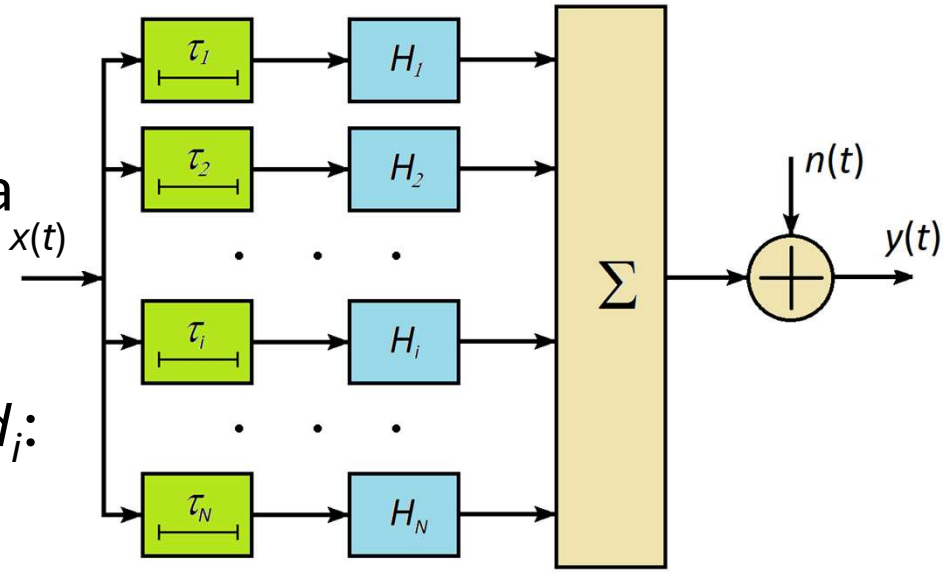
Mitmekiireline levi

- Tavaliselt eksisteerib saatja ja vastuvõtja vahel *N* võimaliku leviteed.
- Iga levitee ülekandetegur H_i on pöördvõrdeline *i*-nda levitee pikkusega d_i:

$$H_i \sim d_i^{-n},$$

  - Levikao eksponent *n* sõltub levikeskkonnast jäädes vahemikku ühest neljani.
- Iga levitee viide τ_i on võrdeline vastava leviteekonna pikkusega d_i:

$$\tau_i = \frac{d_i}{v}.$$

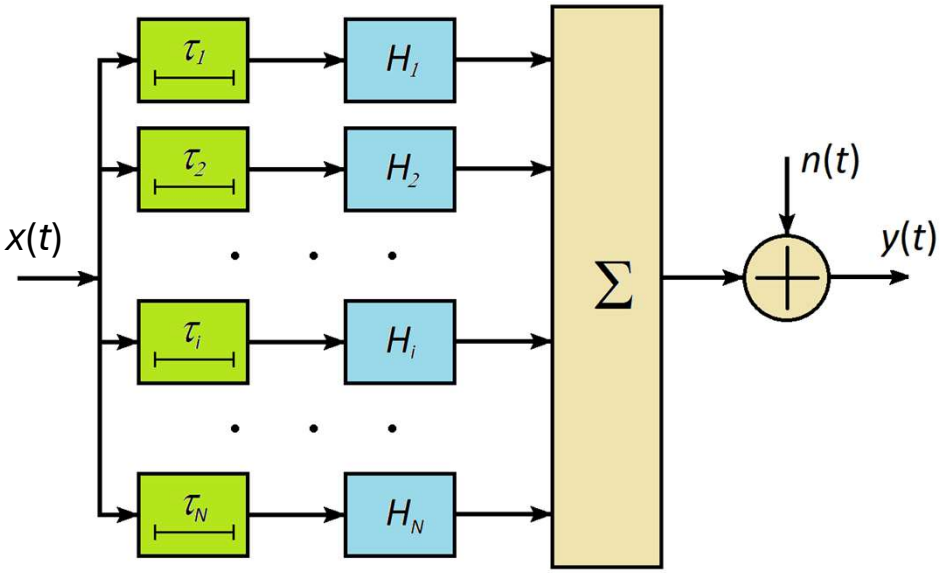


Mitmekiireline levi

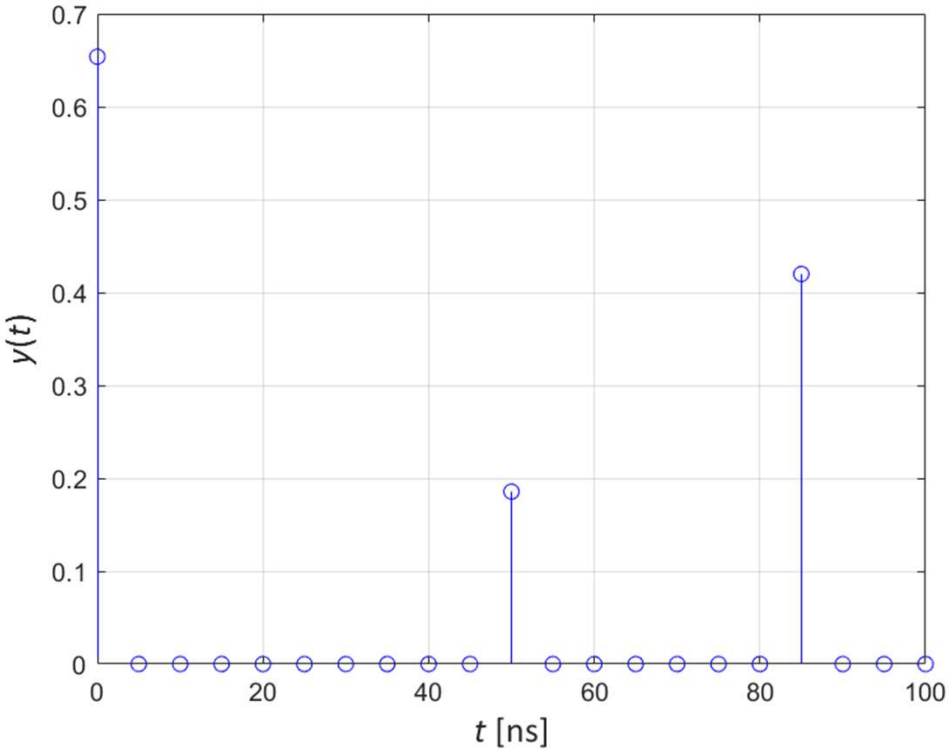
- Kanali väljundsignaal $y(t)$ on summa liitunud müradest $n(t)$ ja erinevaid leviteid pidi saabunud sisendsignaal $x(t)$koopiatest:

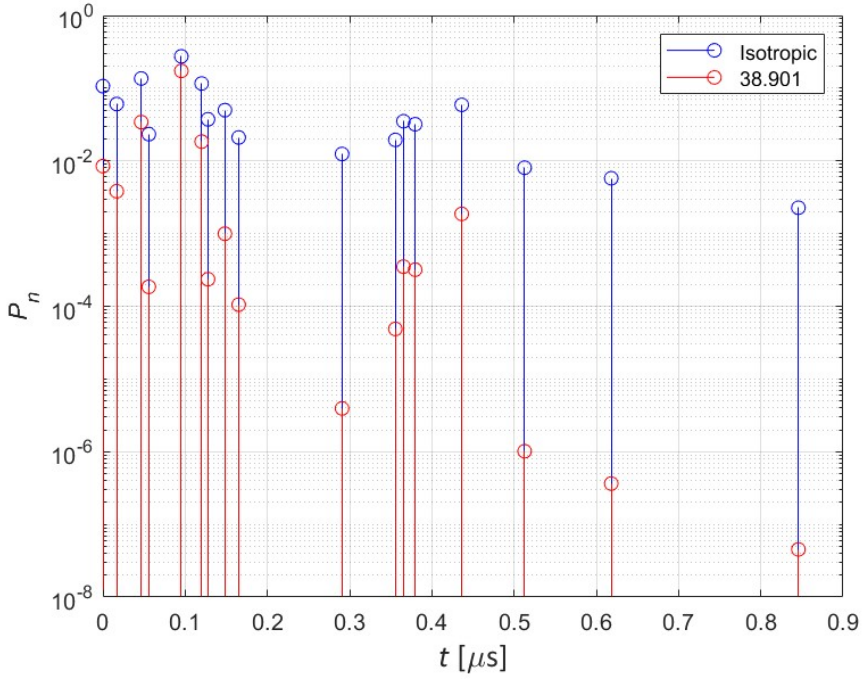
$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} H_i \cdot x(t - \tau_i) + n(t).$$

- Sellist mudelit tuntakse kui **väljavõtetega viiteliini** (*Tapped Delay Line model*) TDL nime all.

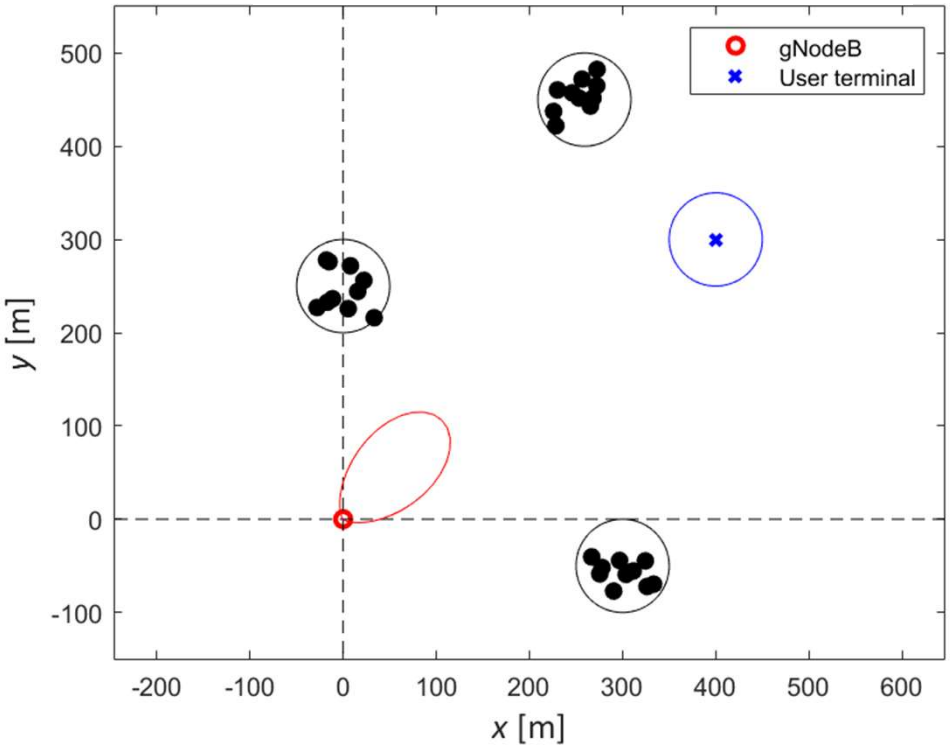


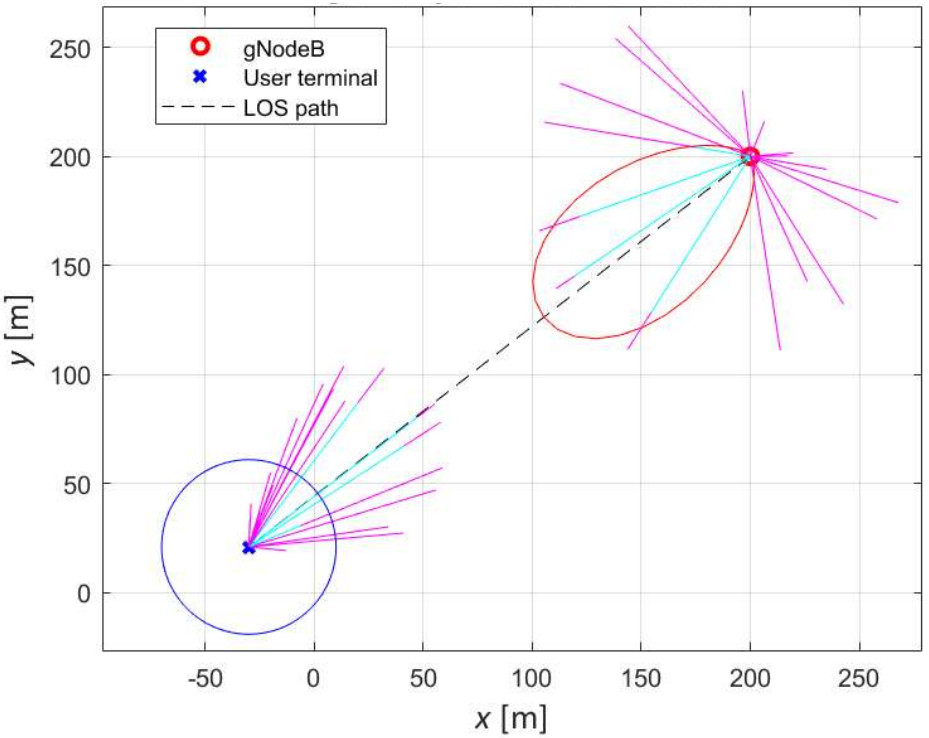
TDL kanali impulsskaja näiteid





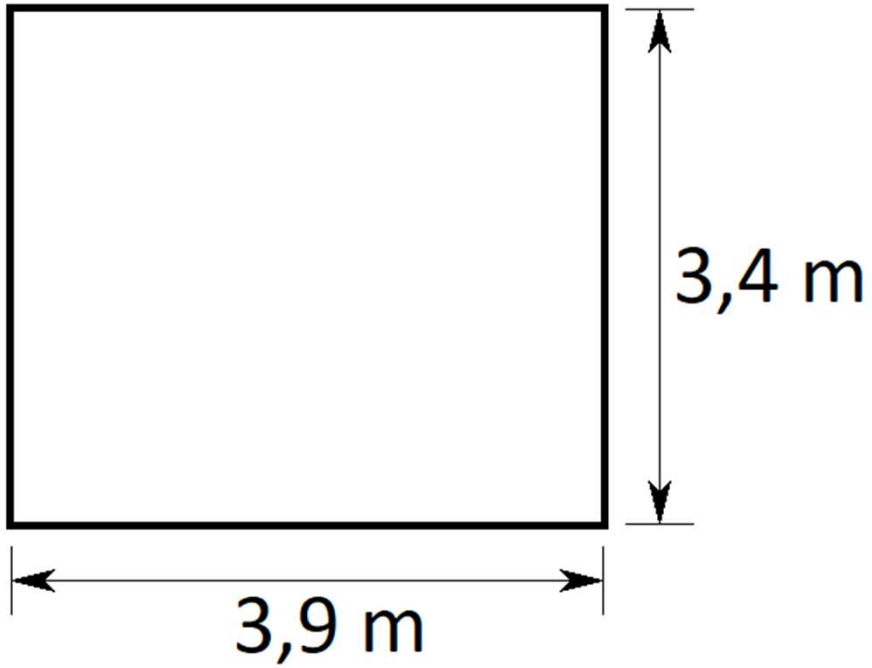
Klasterdatud viiteliinidega mudel CDL



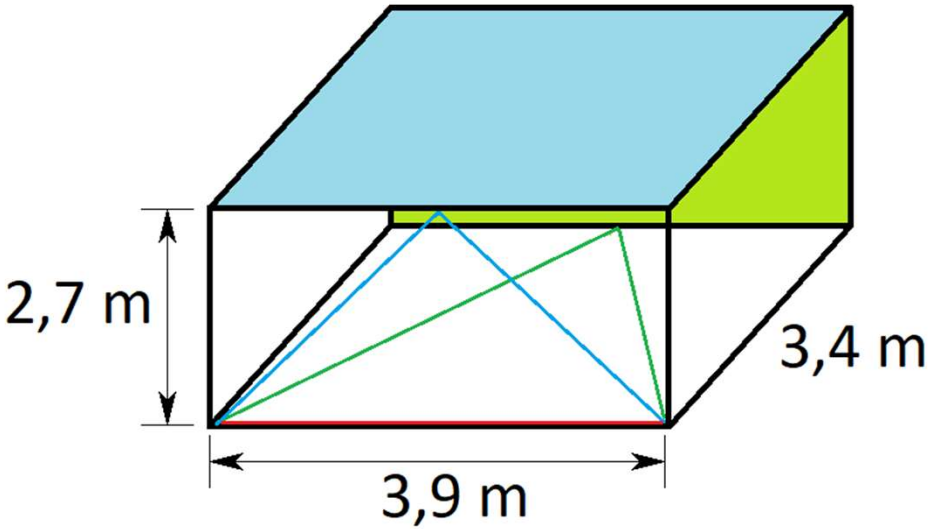


Mitmekiirelise levi näide

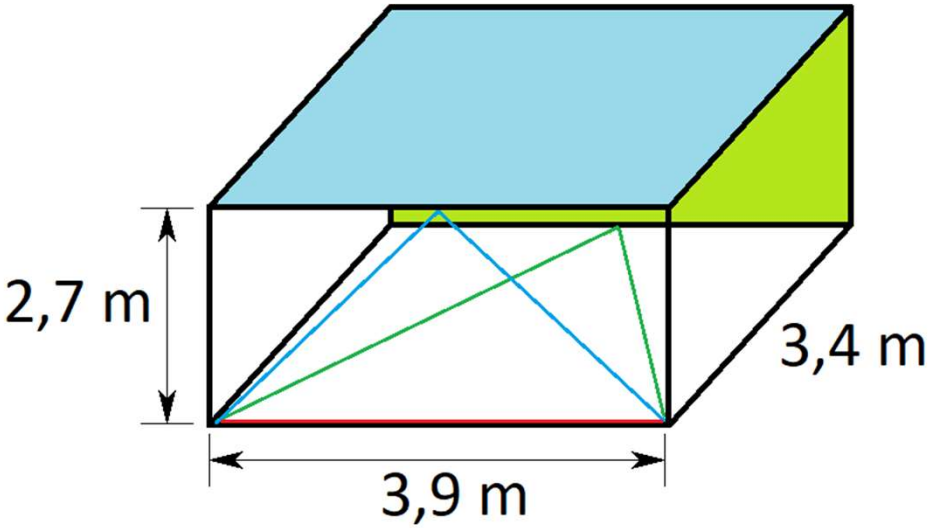
Kabineti mõõtmed

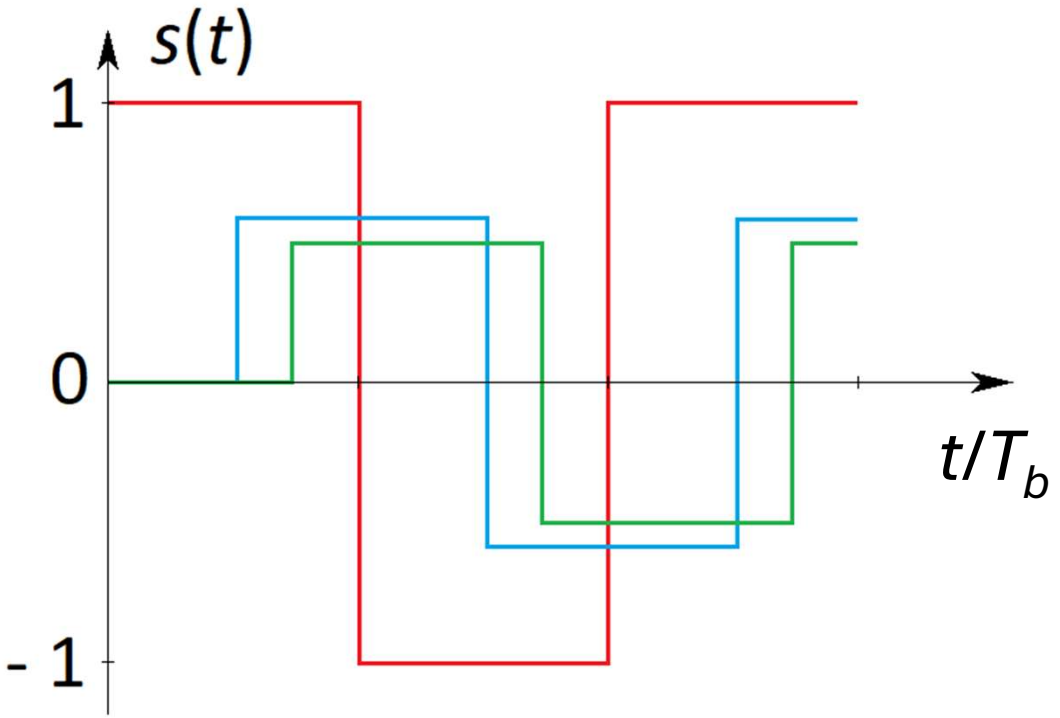


Omab ka kõrgust (3D)



Mitmekiirelise levi näide





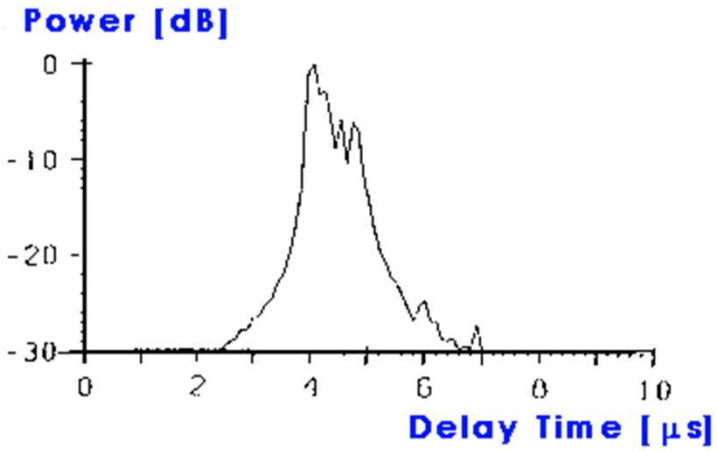
R = 54 Mbit/s; T_b = 18,5 ns

τ_1 = 9,2 ns; τ_2 = 13,1 ns

Tekib **sümbolite vaheline interferents** ISI (*Inter symbol Interference*)

Võimsuse viiteprofiil

- Üheks viisiks mitmekiirelise leviga kanali kirjeldamisel on kanali **võimsuse viiteprofiil** (*Power Delay Profile*) $P(\tau)$.
- $P(\tau)$ kirjeldab vastuvõetud signaali võimsuse jaotust ajas (viites). Seda saab väljendada kas analüütilise avaldisena, graafiku või tabelina.



Jppnis: www.wirelesscommunication.nl/

f = 1,8 GHz
1,2 µs
1,3 MHz

Võimsuse viiteprofiil

- Numbrilisel kujul kirjeldamiseks võib kasutada keskmist $\bar{\tau}$, maksimaalset τ_{max} või ruutkeskmist σ_τ viiteaega. Viimane on praktikas enamlevinud.
- Keskmine viide on:

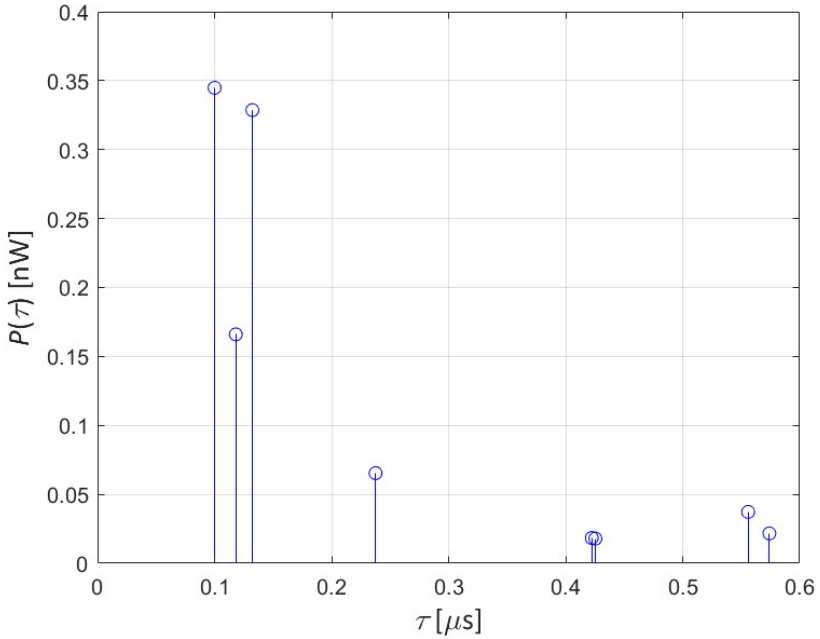
$$\bar{\tau} = \frac{\int_0^\infty \tau P(\tau) d\tau}{\int_0^\infty P(\tau) d\tau}.$$

- Ruutkeskmine aga:

$$\sigma_\tau = \sqrt{\frac{\int_0^\infty (\tau - \bar{\tau})^2 P(\tau) d\tau}{\int_0^\infty P(\tau) d\tau}}\ .$$

Võimsuse viiteprofiili näiteid

Viiteprofiil lineaarsetes ühikutes



Sama profiil tabeli kujul

τ [µs]	$P(\tau)$ [dBm]
0,100	-64,62
0,118	-67,80
0,132	-64,83
0,238	-71,84
0,422	-77,36
0,425	-77,48
0,556	-74,29
0,574	-16,64

Kahekiireline levimudel



- Mitmekiireline levi eeldab, et signaalil on saatja- ja vastuvõtja vahel vähemalt kaks erinevat leviteekonda.
- Esimeseks on tavaliselt otsetee saatja- ja vastuvõtja vahel. Selleks on vajalik **otsenähtavus** (*Line of Sight*) LOS nende kahe vahel.
- Teine levitee moodustub kui signaal peegeldub mõnelt otsetee läheduses asuvalt objektilt. Valdavalt on selleks objektiks maapind.
- Seega on lihtsaim mitmekiirelise levi mudel tuntud kui **Kahekiireline maapeegeldusega levimudel** (*Two-Ray Ground Reflection Model*).

Kahekiireline maapeegeldusega levimudel

- Saatja ja vastuvõtja vahelise otsetee pikkus:

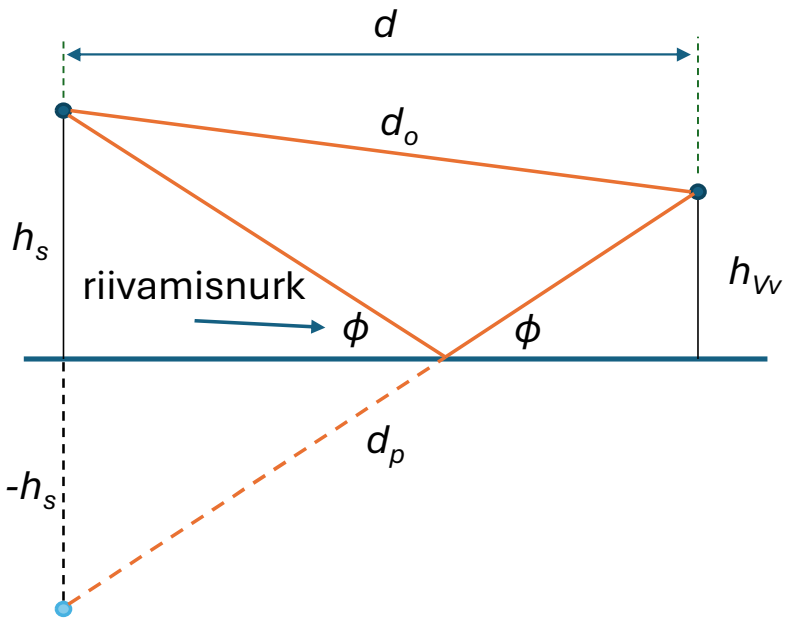
$$d_o = \sqrt{d^2 + (h_s - h_{Vv})^2}.$$

- Maapeegeldusega levitee pikkus:

$$d_p = \sqrt{d^2 + (h_s + h_{Vv})^2}.$$

- Faasinihe otse- ja peegeldusega teed mööda saabunud signaalide vahel:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta d = k(d_p - d_o).$$



Kahekiireline maapeegeldusega levimudel

- Üldistatud Newtoni binoomvalem ütleb, et :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 \ldots.$$

- Viimast kasutades saab faasinihke koha leida ligikaudse avaldise:

$$\phi \approx \frac{4\pi}{\lambda}\frac{h_s h_{Vv}}{d}.$$

- Väikese riivamisnurga (*grazing angle*) juures ($d >> 5h_s h_{Vv}$) on maapinna peegeldustegur $\Gamma \approx -1$. Samuti võib siis lugeda $d_o = d_p = d$ ja ignoreerida antenni suunateguri mõju.

Kahekiireline maapeegeldusega levimudel

- Elektrivälja tugevus vastuvõtja juures on võrdne otse- ja peegeldusega teed mööda saabunud signaalide väljade summaga

$$E = E_0\left(1 + \Gamma \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Phi}\right) = E_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{\lambda}\cdot\frac{h_s h_{Vv}}{d}}\right).$$

- Signaali võimsuse pindtihedus on võrdeline elektrivälja tugevuse ruuduga. Vastuvõetud signaali võimsus on seega (Friisi valem):

$$P_{Vv} = P_s G_s G_{Vv}\left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \left|1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Phi}\right|^2.$$

Kahekiireline maapeegeldusega levimudel

- Arendame meie $e^{-j\phi}$ Taylori ritta

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots.$$

- Saame, et $e^{-j\phi} \approx 1 + (-j\phi) = 1 - j\phi$. Seega

$$\left|1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Phi}\right|^2 = |1 - (1 - \mathrm{j}\Phi)|^2 = \Phi^2.$$

- Vastuvõetud signaali võimsus:

$$P_{Vv} = P_s G_s G_{Vv} \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 \Phi^2 = P_s G_s G_{Vv} \frac{h_s^2 h_{Vv}^2}{d^4}.$$

Kahekiireline maapeegeldusega levimudel

- Vastuvõetud signaali võimsus

$$P_{Vv} = \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2 4\sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{h_s h_{Vv}}{d}\right) P_S G_S G_{Vv}.$$

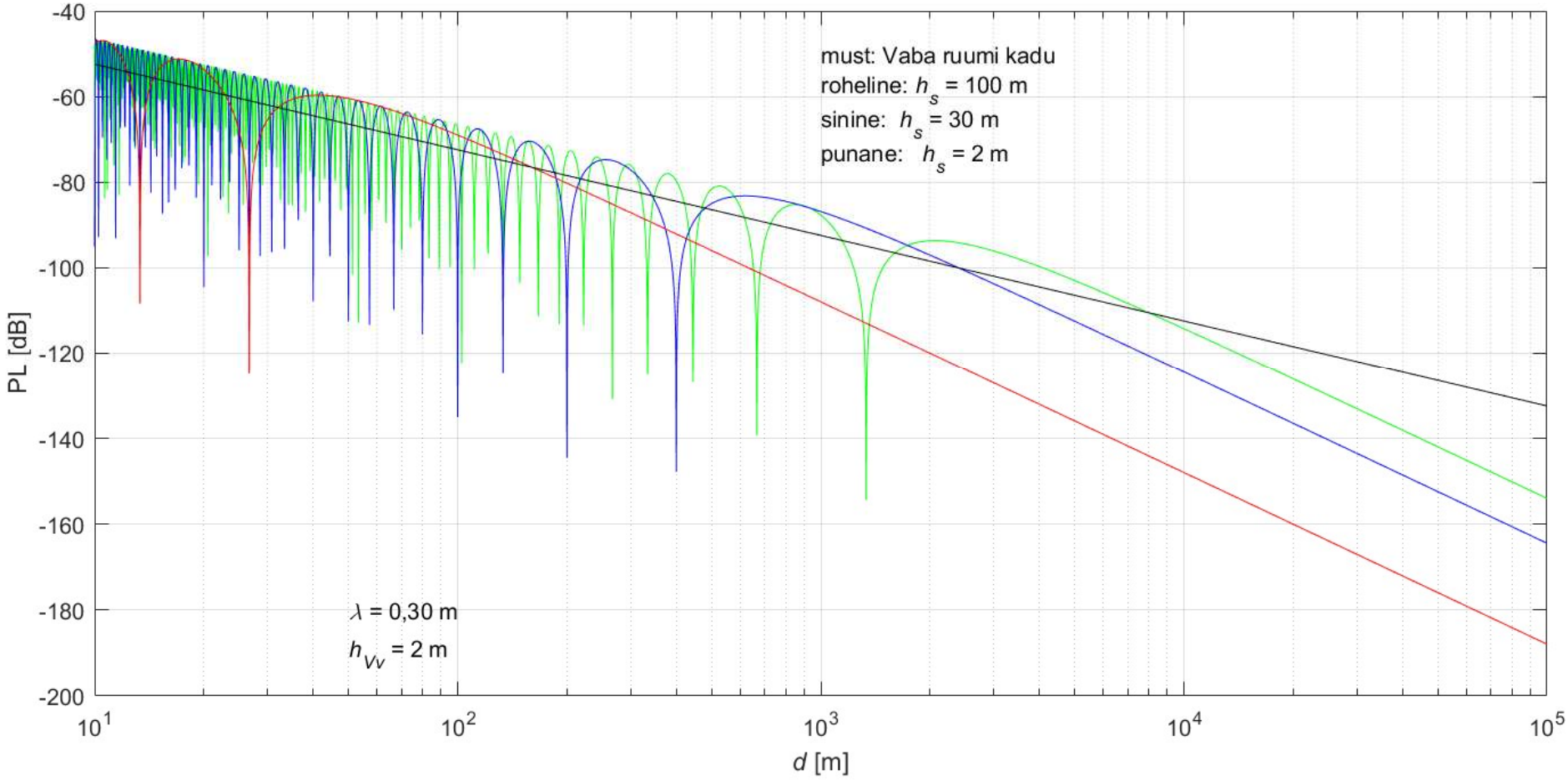
- Ligikaudne avaldis juhu jaoks kui $d >> (h_s + h_{Vv})$:

$$P_{Vv} = P_s \frac{G_s G_{Vv} h_s^2 h_{Vv}^2}{d^4}.$$

- Lingi kadu [dB]:

$$L = 40\log(d) - 20\log(h_1) - 20\log(h_2).$$

Kahekiireline maapeegeldusega levimudel



MATLAB'i kood: http://www.wirelesscommunication.nl/reference/chaptr03/pel/tworay.htm

Kahekiirelise levimudeli sageduskarakteristik

- Kahekiirelise kanali impulsskaja on kujul

$$h(t) = H_1 \cdot \delta(t - \tau_1) + H_2 \cdot \delta(t - \tau_2) \, .$$

- Lineaarsusest lähtuvalt on sellise kanali sageduskarakteristik

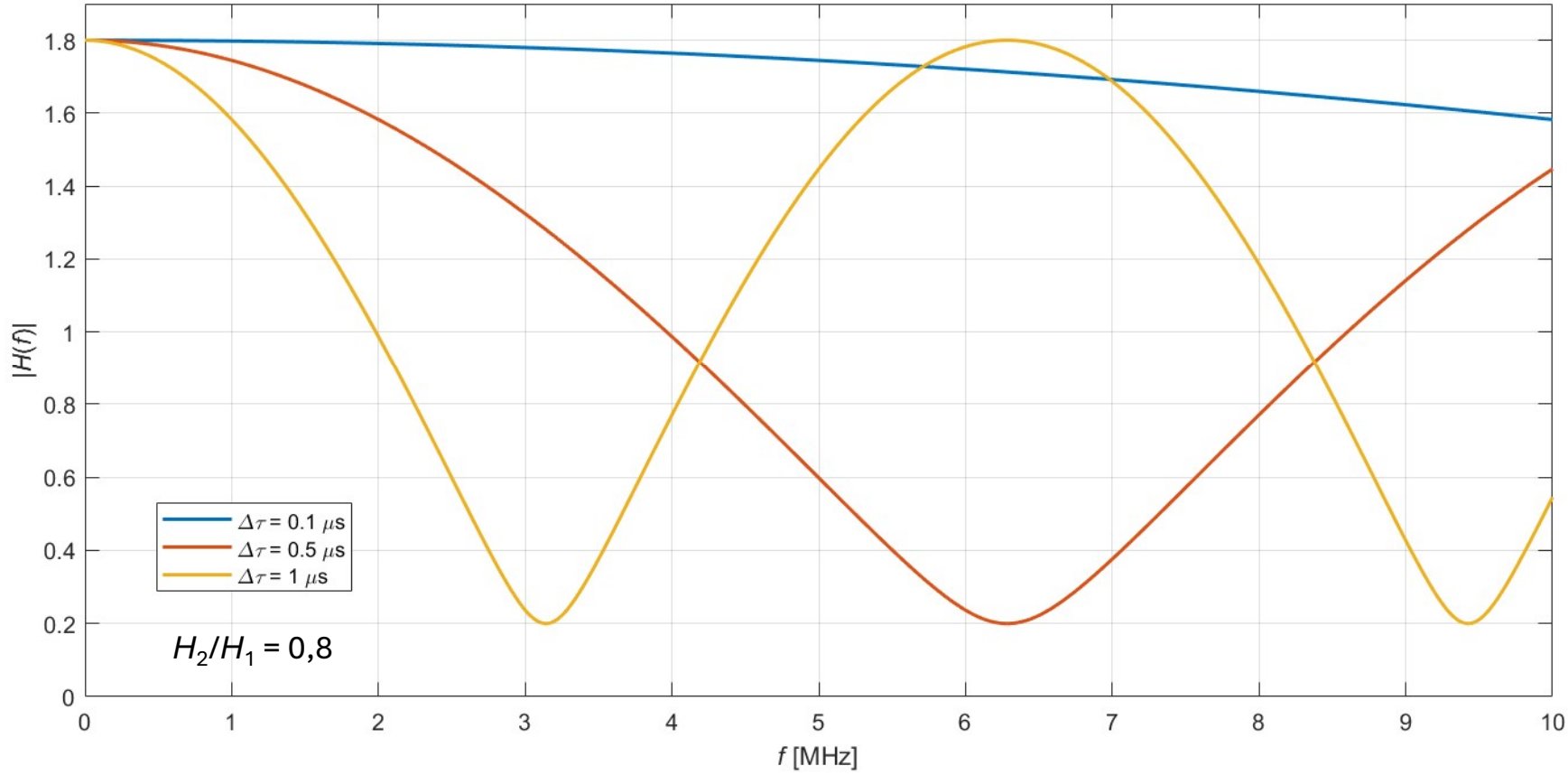
$$H(f) = \; H_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\tau_1 f} + H_2 e^{-\mathrm{j}2\pi\tau_2 f} .$$

- Tulemust saab lihtsustada väljendades pikema leviteekonna tekitatud ajalist viidet lüheima teekonna poolt põhjustatu τ_1 suhtes:

$$H(f) = \; H_1 + H_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi(\tau_2 - \tau_1) f} .$$

- Faasinihe sõltub ikka sagedusest lineaarselt kuid amplituud ei ole enam sagedusest sõltumatu.

Kahekiirelise levimudeli sageduskarakteristik



Egli levimudel

- Sagedusvahemiku 30 MHz – 1 GHz ,kaugustel 1 kuni 50 km ja kuni 15 m suuruse maapinna ebaühtluse (küngaste kõrgus) korral:

$$P_{Vv} = G_s G_{Vv} \left(\frac{h_s h_{Vv}}{d^2}\right)^2 \left(\frac{40}{f[\mathrm{MHz}]}\right)^2 P_S.$$

- Sumbumus kanalis [dB]:

$$PL = 40\log(d) - 20\log(h_{Vv}) - 20\log(h_S) + 20\log(f[\mathrm{MHz}]) - 32\,.$$

Hajus vs suunatud peegeldus

- Nii valgeks värvitud sein kui peegel peegeldavad tagasi suurema osa sellele langevast valgusest. Ometi näeme enda kujutust ainult peeglist kuid mitte seinalt.
- Esimesel juhul on tegemist **hajuspeegeldusega** (*diffuse reflection*) teisel juhul aga **suunatud peegeldusega** (*specular reflection*).
- Piiri nende kahe vahel määrab pinna ebaühtlus *h*. Kui see on suurem Rayleigh' kriteeriumist on

$$h > \frac{\lambda}{8\cos\theta_i} = \frac{\lambda}{8\sin\phi},$$

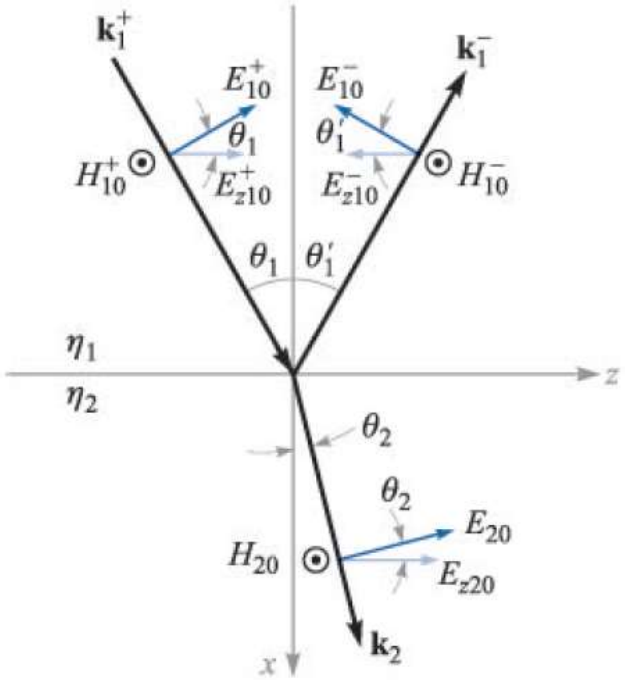
meil tegemist hajusa peegeldamisega.

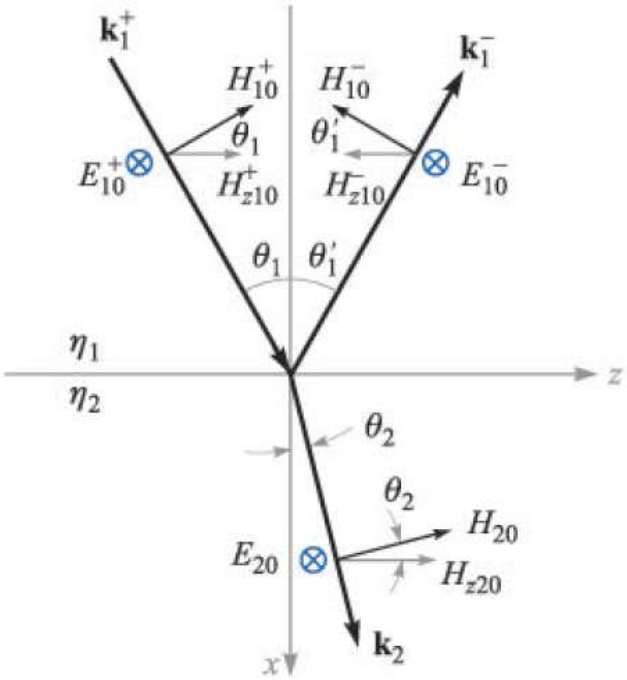
Fresnel’i valemid

- Augustin-Jean Fresnel (1788- 1827).
- **Fresnel valemid** kirjeldavad tasalaine peegeldumist ja murdumist kahe keskkonna piiril meelevaldse langemisnurga θ_i korral.
- Peegeldumis- ja ülekandetegurid keskkondade piiril sõltuvad langeva laine polarisatsioonist.



Fresnel'i valemid





Langemisnurk: $\theta_i = \theta_1$;
Peegeldumisnurk: $\theta_r = \theta_1'$;
Murdumisnurk: $\theta_t = \theta_2$.

p-polarisatsioon (TM – *Transverse Magnetic*)

s-polarisatsioon (TE – *Transverse Electric*)

Joonis: W.H. Hayt, J.A. Buck. Engineering Electromagnetics, 6th Ed.

Peegeldustegur S-polarisatsiooni korral

- Peegeldustegur s-polarisatsiooni korral on

$$\Gamma_s = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t}.$$

- Kompaktsemal kujul väljendatuna

$$\Gamma_s = \frac{\eta_{2s} - \eta_{1s}}{\eta_{2s} + \eta_{1s}},$$

kus η_{1s} ja η_{2s} keskkondade efektiivsed lainetakistused s-polarisatsiooni korral:

$$\eta_{1s} = \frac{\eta_1}{\cos\theta_i};\ \eta_{2s} = \frac{\eta_2}{\cos\theta_t}.$$

Peegeldustegur p-polarisatsiooni korral

- Peegeldustegur p-polarisatsiooni korral on sarnaselt:

$$\Gamma_p = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_{2p} - \eta_{1p}}{\eta_{2p} + \eta_{1p}}.$$

- Mõlema keskkonna efektiivsed lainetakistused on nüüd vastavalt:

$$\eta_{1p} = \eta_1 \cos\theta_i \,;$$

$$\eta_{2p} = \eta_2 \cos\theta_t \,.$$

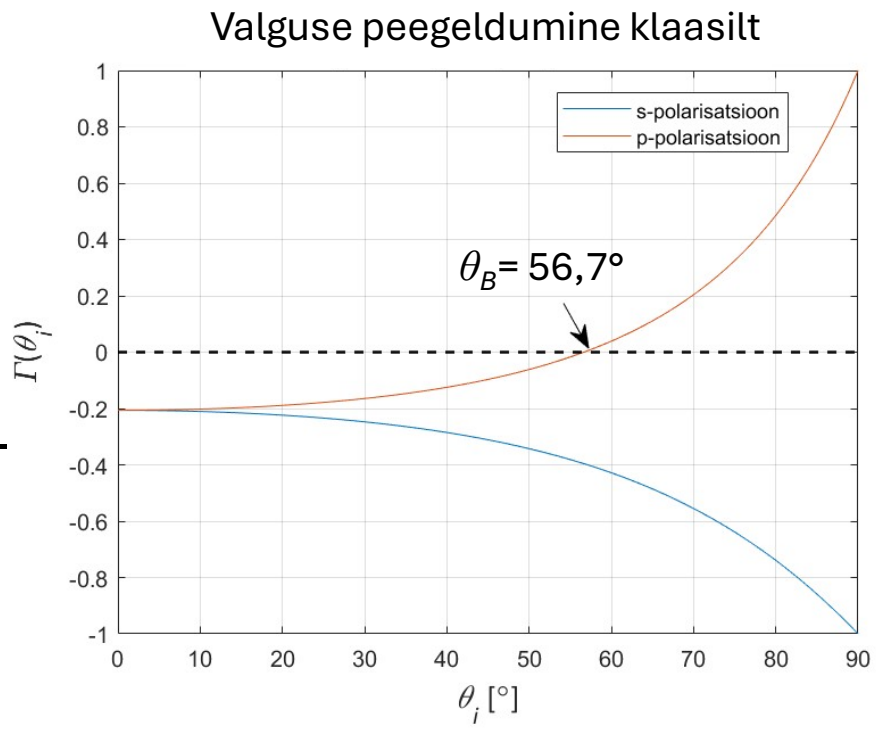
Näide – valguse peegeldumine klaasilt

- Aknaklaasi murudumisnäitaja on n_2 = 1,52 ja õhu oma n_1 = 1.
- Jooniselt näeme, et peegeldustegur sõltub langemisnurgast. Viimase väärtusel

$$\theta_B = \arctan\frac{n_2}{n_1}$$

on p-polarisatsiooniga laine jaoks peegeldustegur null. Sellist nurka tuntakse **Brewster'i nurga** nime all.

- Brewster'i nurga all peegeldunud valgus on lineaarselt polariseeritud.



Brewster’i nurk - näide



Peegeldused maapinnalt

- Maapinna peegeldustegur Γ on leitav avaldisega:

$$\Gamma = \frac{\sin\phi - \sqrt{C}}{\sin\phi + \sqrt{C}},$$

kus konstant C on

- Horisontaalse polarisatsiooni korral:

$$C = \varepsilon_r - \cos^2\phi.$$

- Vertikaalse polarisatsiooni korral:

$$C = \frac{\varepsilon_r - \cos^2\phi}{\varepsilon_r^2}.$$

ning ε_r on maapinna suhteline dielektriline läbitavus.

Peegeldused maapinnalt

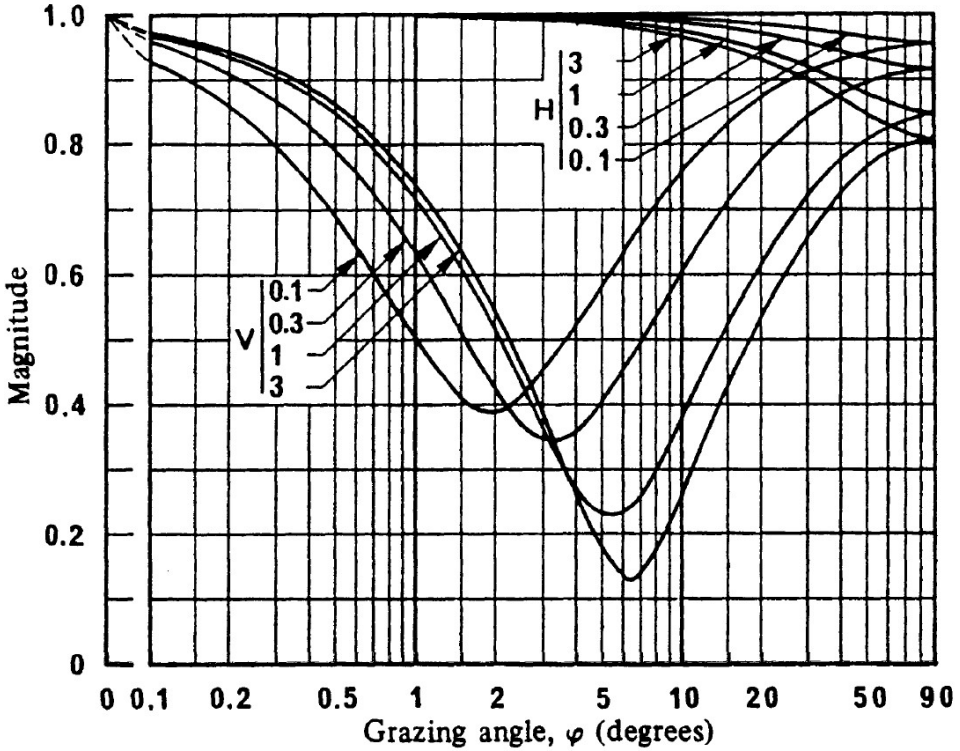
- Maapinna kompleksne suhteline dielektriline läbitavus on

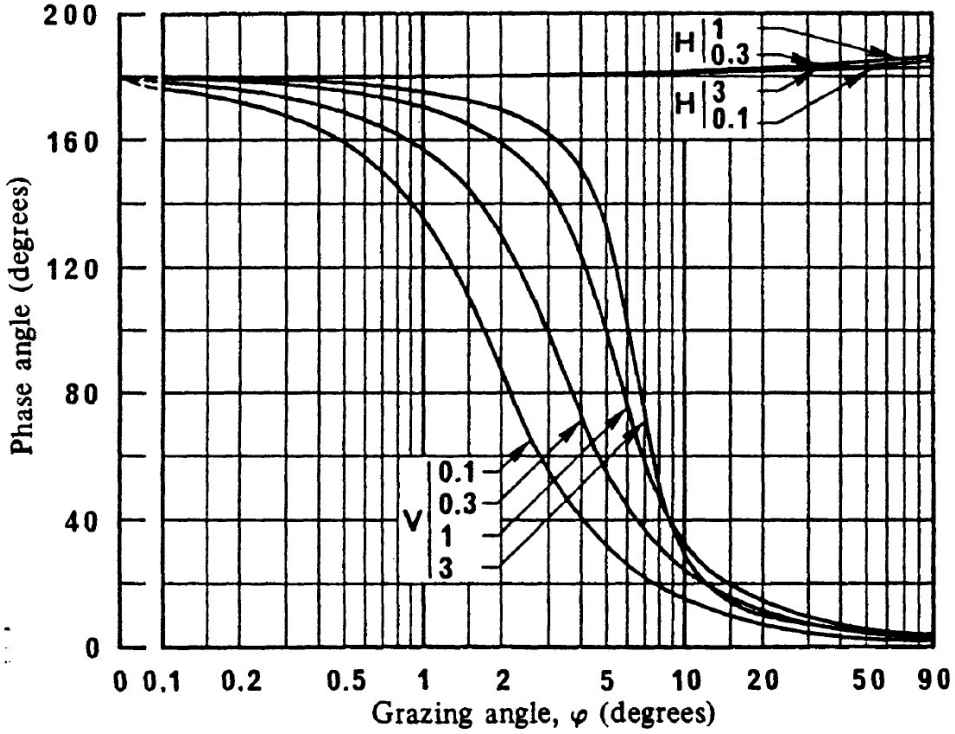
$$\varepsilon_r = \varepsilon_r'(f) - \mathrm{j}60\lambda\sigma(f).$$

- $\varepsilon_r'(f)$ on maapinna suhteline dielektriline läbitavus sagedusel *f*, $\sigma(f)$ on maapinna erijuhtivus [S/m] samal sagedusel ja λ on peegeldunud signaali lainepikkus õhus [m].
- Brewster'i nurga väärtus on ligikaudu

$$\theta_B \approx \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon_r|}}\right).$$

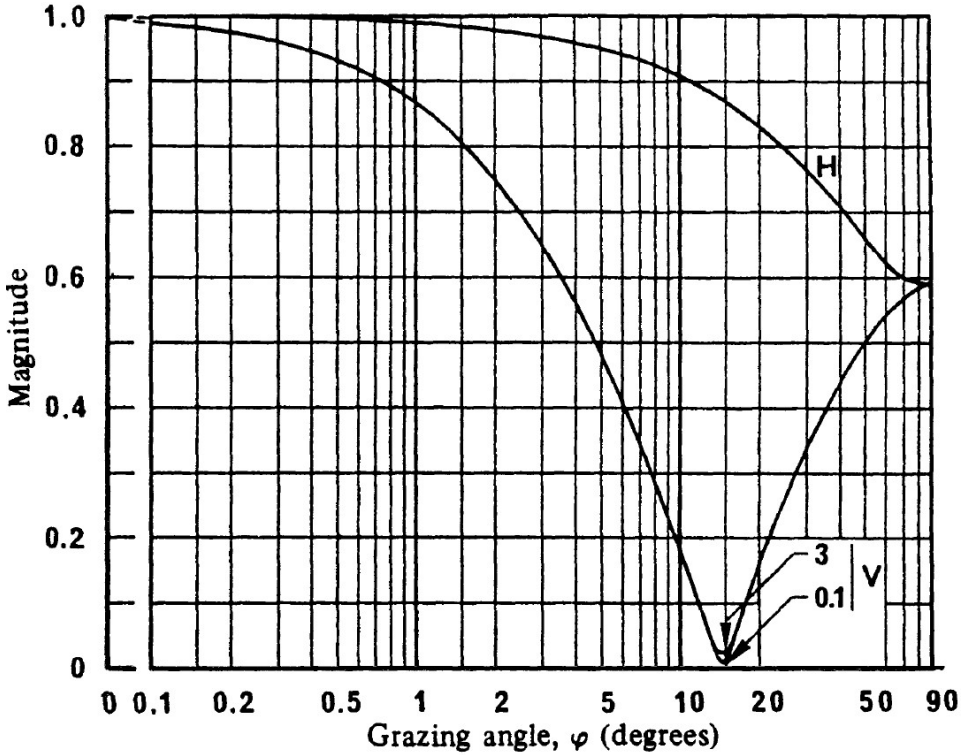
Merevee peegeldustegur

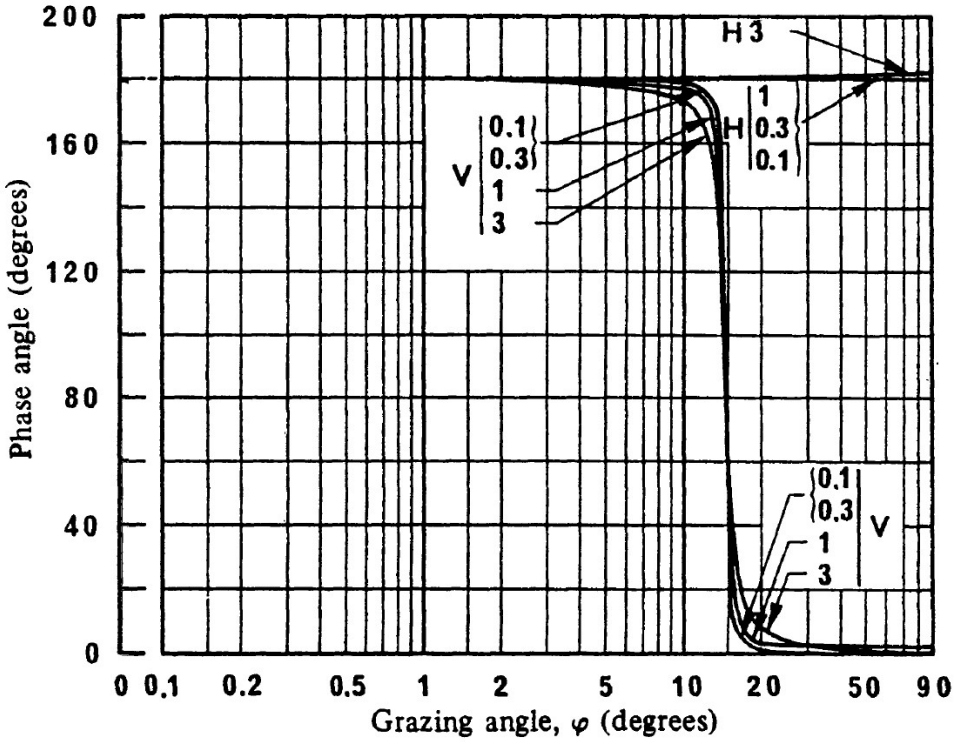




Joonised: ITU Report 1008-1. Reflection From the Surface of the Earth

Poolkuiva pinnase peegeldustegur





Joonised: ITU Report 1008-1. Reflection From the Surface of the Earth

Materjale

[1] ITU-R Recommendation ITU-R P.1407-6. **Multipath propagation and parameterization of its characteristics**. https://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.1407-6-201706-S!!PDF-E.pdf, 10.11.2026

[2] ITU Report 1008-1. **Reflection From the Surface of the Earth**. https://www.itu.int/dms_pub/itu-r/opb/rep/R-REP-P.1008-1-1990-PDF-E.pdf, 10.11.2026

[3] ITU-R Recommendation ITU-R P.527-4 **Electrical Characteristics of the Surface of the Earth**. https://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.527-4-201706-I!!PDF-E.pdf , 10.11.2026

Lisa A - Newtoni binoomvalem

- Newtoni binoomvalem

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,k!} x^{n-k} y^k \,, n \in \mathbb{N}.$$

- Kui astendaja on kompleksarv siis saab kasutada üldistatud Newtoni binoomvalemit:

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k \,,$$

- Kus üldistatud binoomkoefitsiendid on:

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{k!}, \binom{r}{0} = 1.$$

Lisa B – Kompleksarvu ruutjuur

- Kui kompkeksarv on antud eksponentsiaalsel kujul

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

siis selle tõstmine n – indale astmele on lihtsalt

$$z^n = |z|^n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}.$$

- Ruutjuure leidmiseks valime lihtsalt $n = \frac{1}{2}$, ja saame

$$\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}\varphi}{2}} = \sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}\varphi}{2}}.$$

Lisa B – Kompleksarvu ruutjuur

- Ruutjuurt saab leida ka algebralisel kujul kompleksarvust $z = x + \mathrm{j}y$:

$$\sqrt{z} = \sqrt{x + \mathrm{j}y} = a + \mathrm{j}b,$$

  kus *a* ja *b* on leitud juure reaal- ja imaginaarosad.

- Tõstes eelmise avaldise mõlemad pooled ruutu saame:

$$x + \mathrm{j}y = (a + \mathrm{j}b)^2 = a^2 - b^2 + \mathrm{j}2ab.$$

- Tekib kahe tundmatuga võrrandsüsteem kus otsitavateks suurusteks on *a* ja *b*:

$$\begin{cases} x = a^2 - b^2 \\ y = 2ab \end{cases}.$$

Lisa B – Kompleksarvu ruutjuur

- Toodud võrrandsüsteemi saab lihtsustada võttes arvesse seost kompleksarvu ja tema ruutjuure moodulite vahel:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a^2 + b^2.$$

- Lahendades saadud vrrandüsteemi

$$\begin{cases} x = a^2 - b^2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = a^2 + b^2 \end{cases}.$$

saamegi avaldise kompleksarvu *z* ruutjuure leidmiseks kujul:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} \pm j\sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}.$$

Tulemuse imaginaarosa (*b*) märk on sama mis algse arvu omal (*y*).