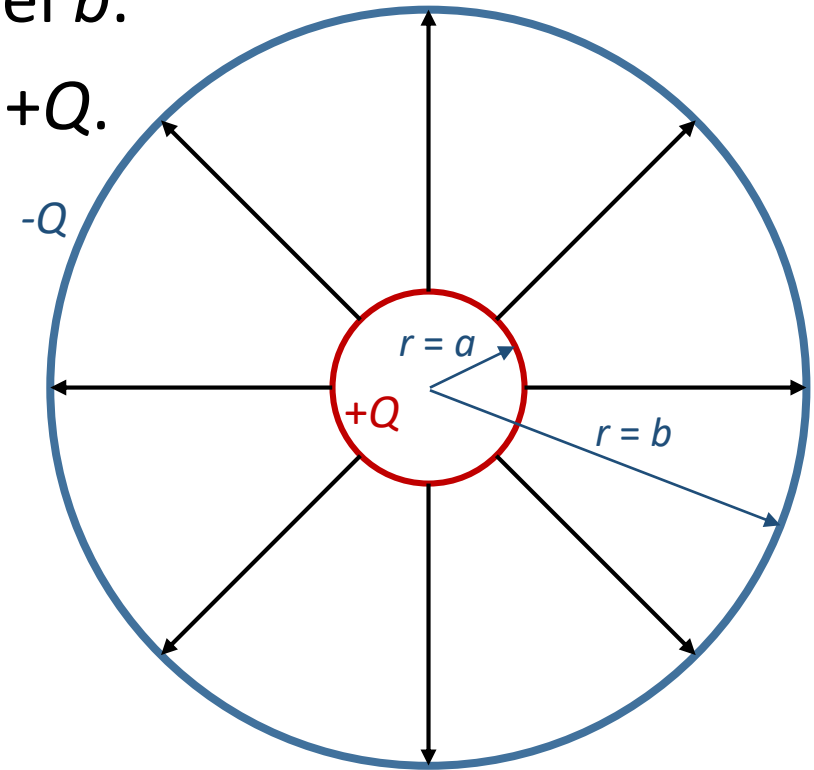
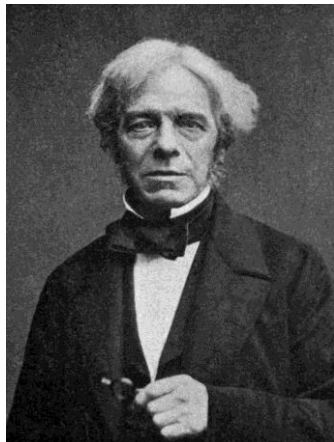


2. Elektrivoo tihedus, Gaussi seadus ja divergents

IEE1110 Elektromagnetväljatehnika

Faraday katse

- Kaks metallist (juhtivast materjalist) kontsentrilist kera mis on teineteisest isolaatoriga (dielektrikuga) eraldatud.
- Kerade raadiused r on vastavalt sisemisel a ja välimisel b .
- Sisemisele kerale antakse teadaolev positiivne laeng $+Q$.
- Välimine kera maandatakse korraks ja seejärel mõõdetakse sellele **indutseeritud** laengu suurus.



Elektrivoog

- Faraday katse näitas, et sõltumatult kahe kera vahelisest isolaatorist on välimisel keral indutseeritud laeng mooduli poolest võrdne sisemisele kerale antud laenguga.
- Tegemist oleks justnagu mingit sorti laengu **nihkega** (*displacement*) sisemiselt keralt välimisele.
- Nihke, ehk **elektrivoo** (*electric flux*) Ψ (*psii*) suurus on võrdeline sisemisel keral oleva laengu Q suurusega. SI süsteemis on võrdeteguriks üks:

$$\Psi = Q .$$

- Elektrivoo mõõtühikuks on samuti kulon [C].

Elektrivoo tihedus

- Elektrivoog Ψ algab sisemiselt keralt ja kulgeb sümmeetriliselt välimisele.
- Sisemise sfääri pinal on elektrivoog $Q = \Psi$ ja see jaotud ühtlaselt üle kera pinna pindala $4\pi a^2$.
- Seega on **elektrivoo tihedus** (*electric flux density*) kera pinnal $Q/4\pi a^2$ [C/m²]. Elektrivoo tihedus **D** on vektorväli mille suund on määratud elektrivälja jõujoonte suunaga ning moodul jõujoonte arvuga pinnaühiku kohta.
- Elektrivoo tihedus, kerade vahel, kaugusel r ($a \leq r \leq b$) on

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r.$$

Punktlaengu elektrivoo tihedus

- Me võime sisemise kera raadiust a vähendada senikaua kuni tulemuseks on punktlaeng kuid elektrivoo tiheduse avaldis jääb ikka samaks kui see oli kera korral:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{a}_r.$$

- Võrdleme saadud tulemust punktlaengu elektrivälja tugevusega

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r$$

- Näeme, et vaakumis kehtib seos

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} .$$

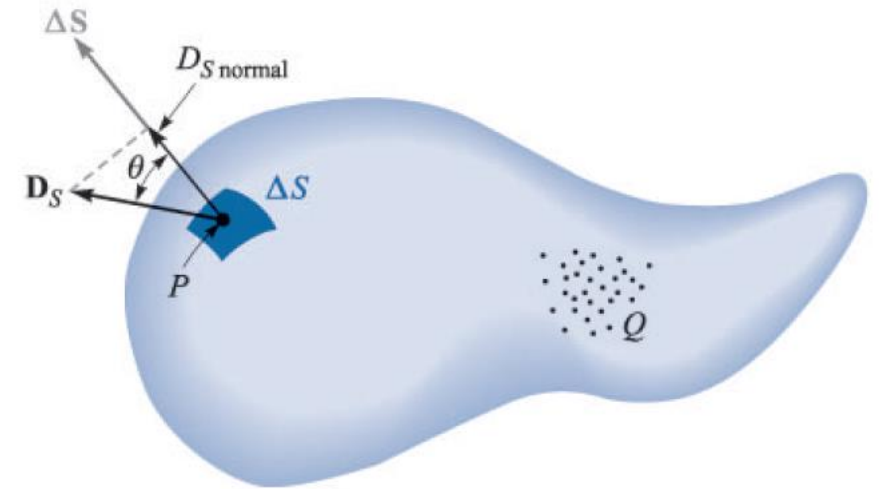
Elektrivoog läbi pinna

- Elektrivälja voog $\Delta\Psi$ läbi väikese pinna ΔS on võrdne selle pindala ΔS ja elektrivoo tiheduse $\mathbf{D}_S$ skalaarkorrutisega:

$$\Delta\Psi = D_S \cos(\theta) \Delta S = \mathbf{D}_S \cdot \Delta\mathbf{S}.$$

- Koguvoog läbi terve pinna S on

$$\Psi = \iint_S d\Psi .$$



Gaussi seadus

- Elektrivoog Ψ läbi mistahes kinnise (Gaussi) pinna S on võrdne selle pinna poolt piiratud laengu Q suurususega

$$\Psi = \oiint_S \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} = Q = \iiint_V \rho_v dv .$$

- Diferentsiaalsel kujul:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v .$$

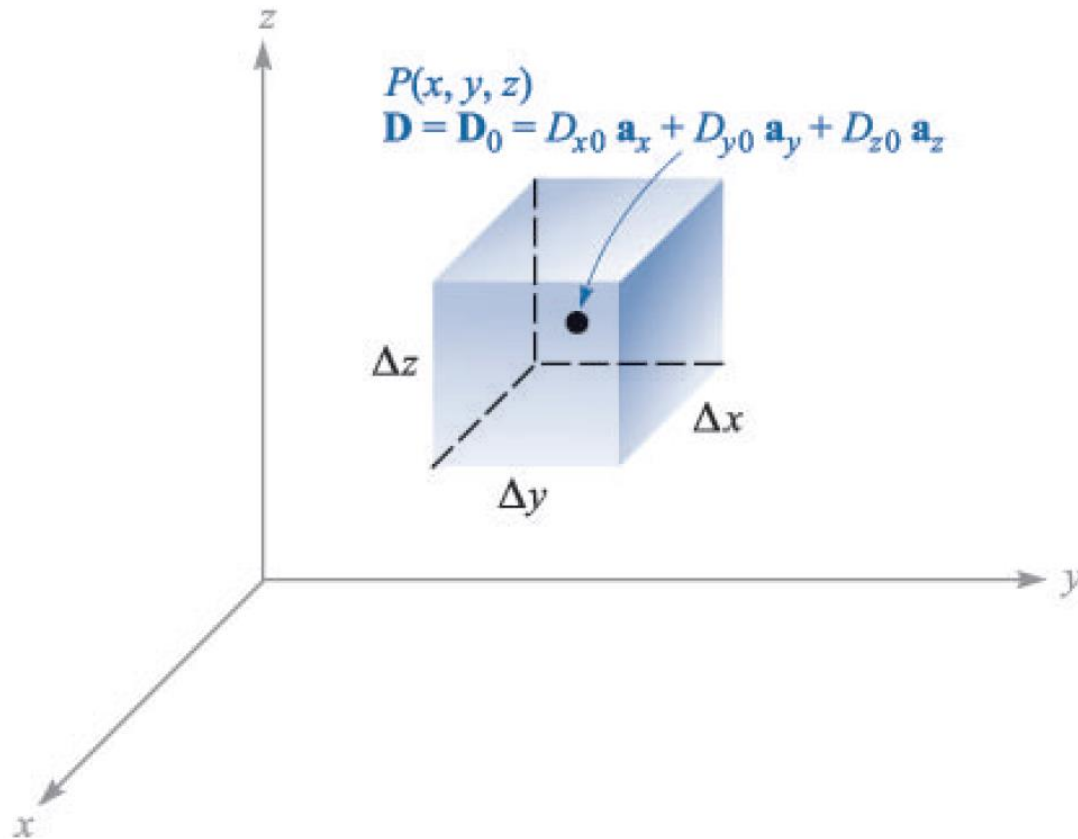
- Tegemist on ühega neljast **Maxwell-Heaviside võrrandist**.



Gaussi seaduse rakendamine

- Gaussi seaduse rakendamine on lihtne kui on täidetud kaks alljärgnevat tingimust:
- Kui elektrivoo tihedus $\mathbf{D}_s$ on kõikjal kas pinnaga paralleelne või pinnaga risti, siis on skalaarkorrutise $\mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S}$ väärtus kas null või saab selle asendada lihtsalt moodulite korrutisega $D_s \cdot dS$.
- Kõikjal, kus skalaarkorrutise väärtus on nullist erinev ($\mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} \neq 0$) on elektrivoo tihedus pinnal konstantne ($D_s = \text{const}$).

Diferentsiaalne ruumielement

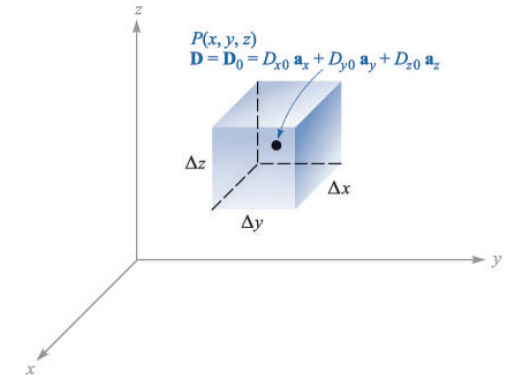


- Laeng Q ruumielemendis on Gaussi seadusest tulenevalt

$$Q = \oiint_S \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} .$$

- Otsitava suuruse saame liites kõiki kuute kuubi tahku läbivate voogude väärtused.

Voog läbi esikülje



- Voog läbi esitahu on ligikaudu

$$\Psi_{x,esi} \approx D_{x,esi} \Delta y \Delta z .$$

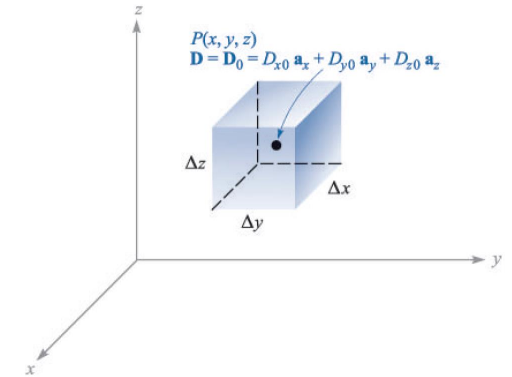
- Asendades elektrivoo tiheduse läbi esitahu tema Taylori rea kahe esimese liikmega (vt Lisa A) saame elektrivoo tiheduseks

$$D_{x,esi} \approx D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} .$$

- Seega voog läbi diferentsiaalse ruumielemendi esikülje on ligikaudu

$$\Psi_{x,esi} \approx \left(D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z .$$

Voog läbi tagakülje



- Voog läbi tagakülje on ligikaudu

$$\Psi_{x,taga} \approx D_{x,taga}(-\Delta y \Delta z) .$$

- Asendades elektrivoo tiheduse läbi tagakülje tema Taylori rea kahe esimese liikmega saame

$$D_{x,taga} \approx D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} .$$

- Seega voog läbi diferentsiaalse ruumielemendi tagakülje on

$$\Psi_{x,taga} \approx \left(D_{x0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) (-\Delta y \Delta z) = \left(-D_{x0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial D_x}{\partial x} \right) \Delta y \Delta z .$$

Koguvoog

- Panus koguvoogu läbi kuubi esi- ja tagakülje (x-telje sihis) on

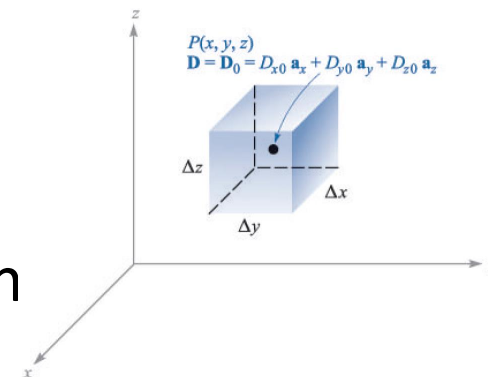
$$\Psi_{x,esi} + \Psi_{x,taga} \approx \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial D_x}{\partial x} \Delta v.$$

- Sarnaselt on vasaku- ja parema külje (y-telje sihis) panus kokku

$$\Psi_{y,vasak} + \Psi_{y,parem} \approx \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial D_y}{\partial y} \Delta v.$$

- Viimasena sarnane seos ülemise ja alumise tahu jaoks

$$\Psi_{z,ülemine} + \Psi_{z,parem} \approx \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial D_z}{\partial z} \Delta v.$$



Koguvoog

- Oleme saanud ligikaudse avaldise koguvoo jaoks

$$Q = \oiint_S \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S} \approx \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) \Delta v.$$

- Jagame saadud võrrandi mõlemad pooled ruumalaga Δv ja leiame seejärel piirväärtuse

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{Q}{\Delta v} = \rho_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \mathbf{D}_s \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} = \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right).$$

Vektorvälja divergents

- Vektorvälja **A** divergents on defineeritud kui

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta v} .$$

- Arvutamiseks ristkoordinaadistikus:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} .$$

- Kasutades **nabla** operaatorit

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} ,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} .$$



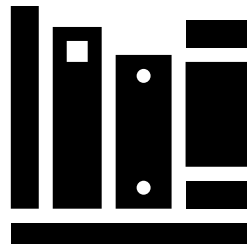
Divergentsi teoreem

- Tuntud ka kui **Gaussi teoreem** või **Ostrogradski teoreem**.
- Kehtib suvalise vektorvälja **A** kohta.
- Mistahes vektorvälja **A** normaalkomponendi kinnine pindintegraal üle suvalise pinna **S** on võrdne sama vektorvälja divergentsi ruum-integraaliga üle antud pinna poolt piiratud ruumala **V**. 😊
- Elektrivoo tiheduse **D** puhul:

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D} dv .$$

Materjalid

- W.H. Hayt, J.A. Buck. **Engineering Electromagnetics**, kuues trükk. Teine peatükk.
- Hiie Hindrikus. **Elektromagnetväljad ja lained LBR5010 loengute konspekt**. Biomeditsiinitehnika keskus.
- Ivo Fridolin. **Elektromagnetväljad ja Lained Biomeditsiinitehnikas. Loengukonspekt**. Biomeditsiinitehnika instituut.

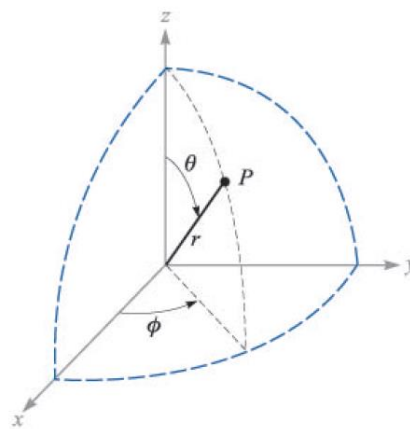


Lisa A – Taylori rida

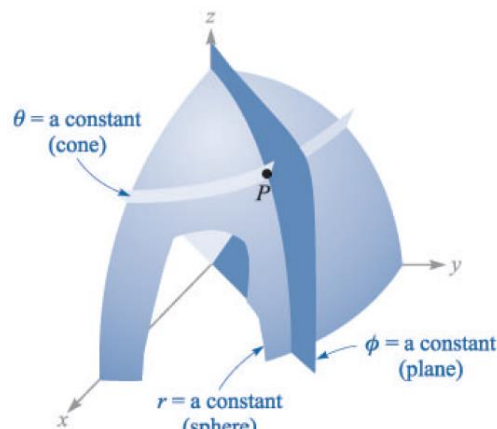
- Taylori rida on funktsiooni esitus astmereana, mille kordajateks on selle funktsiooni tuletised ühe etteantud argumendi väärtuse a juures.
- Lõpmatult diferentseeruva reaali- või kompleksmuutuva funktsiooni $f(x)$ Taylori rida punkti a ümbruses on astmerida kujul:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n .$$

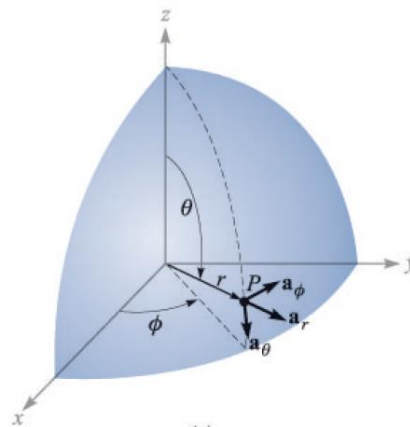
Lisa B - Sfäärilised koordinaadid



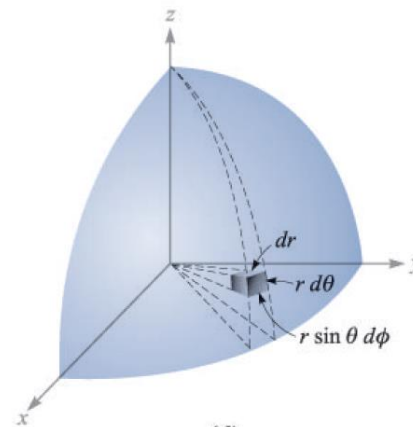
(a)



(b)



(c)



(d)