

12. Ühtlane tasalaine vaakumis

IEE1110 – Elektromagnetväljatehnika

Maxwell'i võrrandid vaakumis

- Gaussi seadus

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v.$$

- Faraday seadus

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

- Koguvoolu seadus:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

- Gaussi seadus magnetvälja kohta:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

- Vaakumis puuduvad laengud:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$$

- Puuduvad ka magnetilised dipoolid:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

- Vaakum on isolaator:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

- Magnetvälja jõujooned on kinnised:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0.$$

Kompleksarvud

- Kompleksarv z koosneb reaalosast x ja imaginaarosast y :

$$z = x + yi,$$

kus $i = \sqrt{-1}$ on **imaginaarühik**.

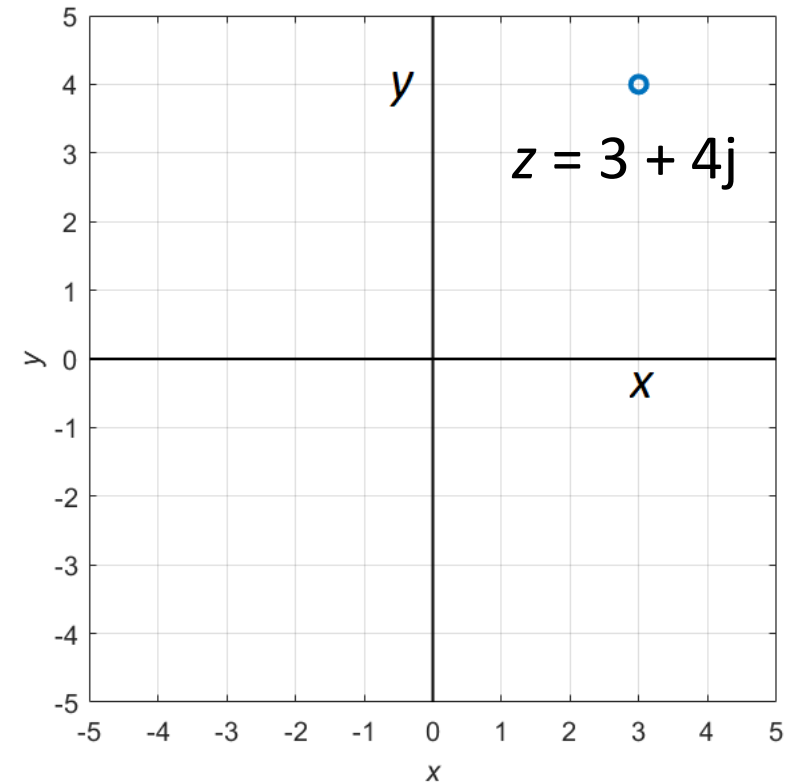
- Taolist esitlusviisi nimetatakse kompleksarvu **algebraliseks kujuks**.
- Kuna elektriga seotud valdkondades tähistatakse i –ga üldjuhul voolutugevust siis kasutatakse nendel erialadel imaginaarühiku tähisena hoopis väikest j tähte:

$$j = \sqrt{-1}.$$



Kompleksarvude kujutamine

- Reaalarve saab visualiseerida kujutades neid punktina reaalarvude teljel.
- Sarnaselt saab kompleksarve kujutada punktina **komplekstasandil**. Igale võimalikule kompleksarvule vastab üks kindel punkt tasandil.
- Komplekstasand on kahemõõtmeline tasand millel x koordinaat vastab kompleksarvu reaali- ja y koordinaat selle imaginaariosale.



Kompleksarvu eksponentsiaalne kuju

- Mitmeid ülesandeid on lihtsam lahendada kui kompleksarvu asukohta tasandil väljendada mitte rist- vaid polaarkoordinaatides.
- Sellist väljendusviisi tuntakse kompleksarvu **eksponentsiaalse kujuna**:

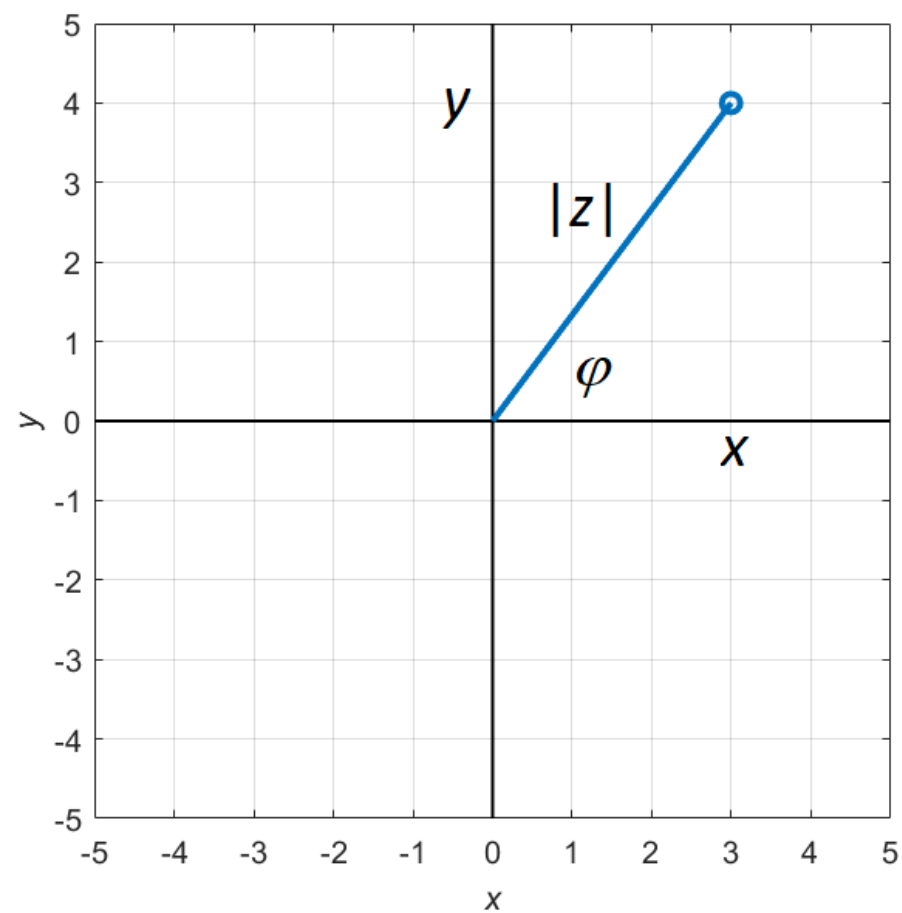
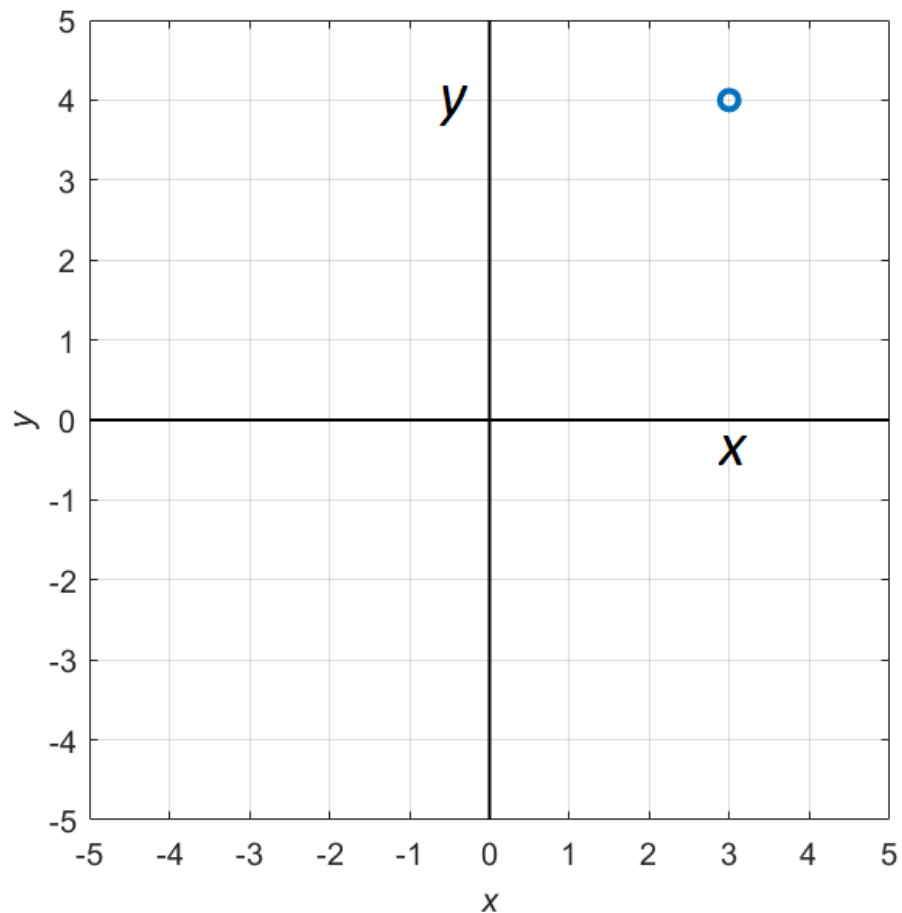
$$z = |z|e^{j\varphi}.$$

- Kompleksarvu moodul $|z|$ ja faas φ (x-telje ehk **polaartelje** suhtes vastupäeva) on seotud tema reaali- ja imaginaariosaga järgmiselt

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}.$$

Kompleksarvu esitusviisid



Kompleksarvu trigonomeetriline kuju

- Teades kompleksarvu z mooduli $|z|$ ja faasi φ väärtuseid saame alati nende kaudu leida selle reaali- ja imaginaarosad

$$x = \operatorname{Re}\{z\} = |z| \cos \varphi ;$$

$$y = \operatorname{Im}\{z\} = |z| \sin \varphi .$$

- Järgnevat kirjutatakse

$$z = |z|e^{j\varphi} = |z| \cos \varphi + j|z| \sin \varphi$$

nimetatakse kompleksarvu **trigonomeetriliseks kujuks**.

Euleri valem

- Seost kompleksarvu eksponentsiaalse- ja trigonomeetrilise kuju vahel kirjeldab **Euleri valem** (*Euler's formula*)

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi .$$

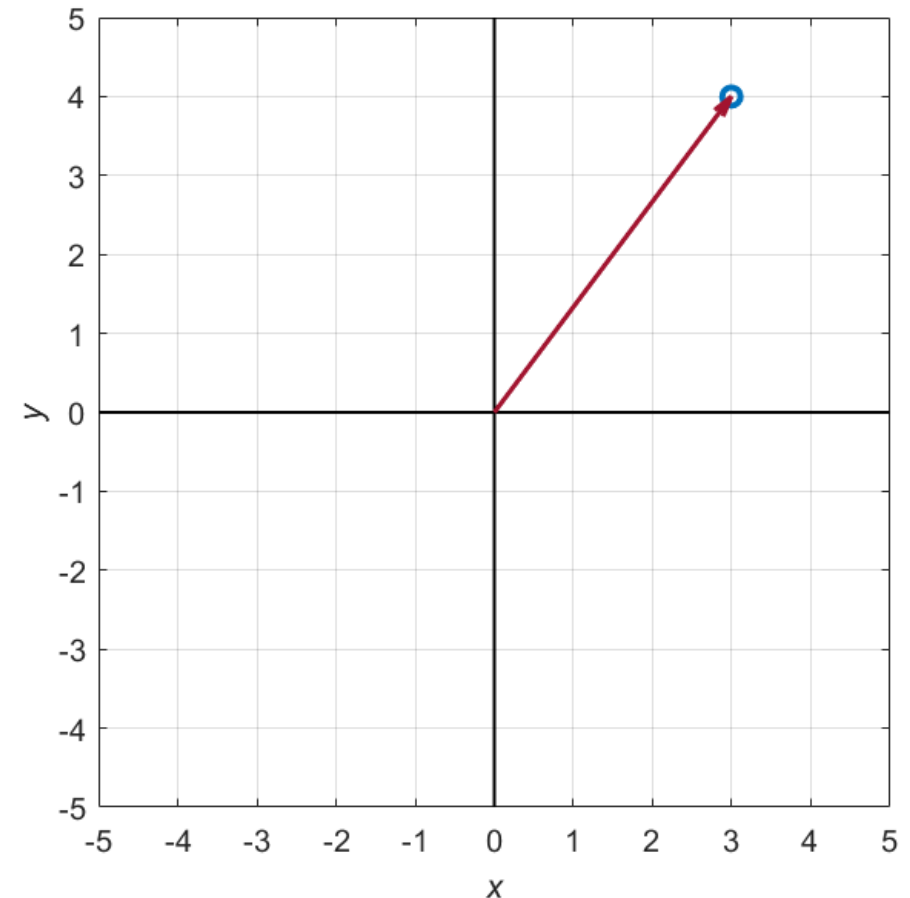
- Selle erijuhtu argumendi väärtuse $\varphi = \pi$ korral tuntakse Euler'i vastavuse nime all (*Euler's Identity*) ja seda peetakse üheks (kõige) ilusamaks matemaatiliseks avaldiseks:

$$e^{j\pi} + 1 = 0 .$$



Kompleksarv vektorina

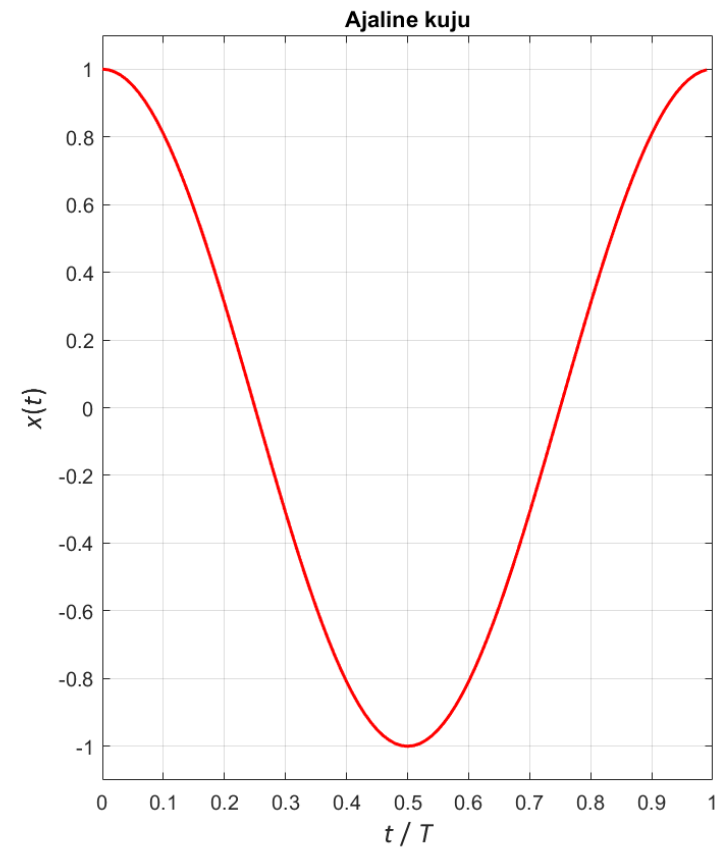
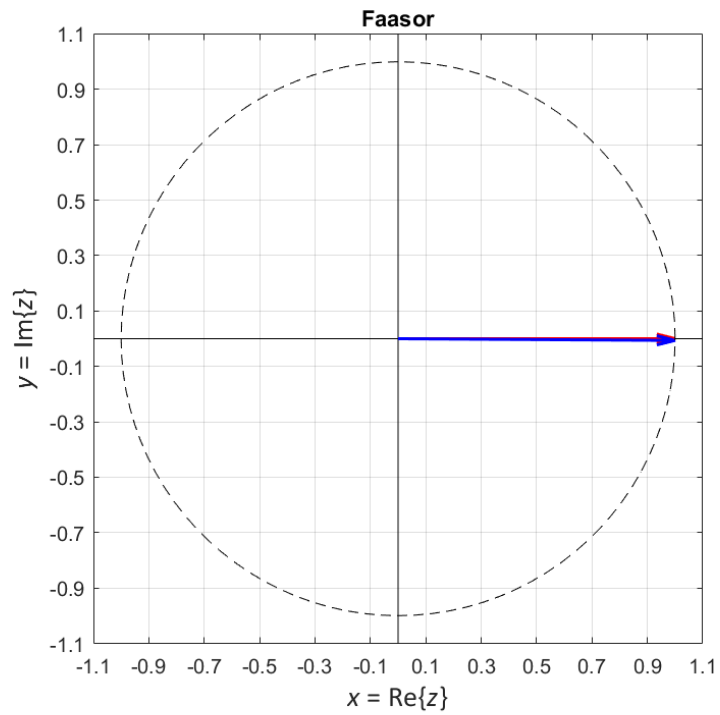
- Mistahes punkti tasandil ja seega ka mistahes kompleksarvu z võib käsitleda **vektorina**. Vektori alguspunkt on alati koordinaatteljestiku alguspunktis, lõpp aga kompleksarvule vastavas punktis tasandil.
- Vektori koordinaadid on vastavalt kompleksarvu reaali- ja imaginaariosa (x, y) .
- Vektori pikkus on kompleksarvu moodul $|z|$ ja nurk polaartelje ja vektori vahel on selle kompleksarvu faas φ .



Faasor

- Kujutame ette, et meie vektor pikkusega $|z|$ pöörleb ühtlase sagedusega f [s^{-1}] vastupäeva.
- Ühe pöörde tegemiseks kuluvat aega nimetame **pöörlemisperioodiks** $T = 1/f$. Perioodi möödumisel on vektor tagasi algses asendis ja alustab uut pööret.
- Iga täispöörde tegemisel suureneb nurk (**faas**) 2π radiaani (täisringi 360°) võrra. Ajaühikus läbitava nurga suurust nimetatakse **nurksageduseks** $\omega = 2\pi f$. Nurksageduse mõõtühik on radiaani sekundis [s^{-1}].
- Nurka φ_0 vektori ja polaartelje vahel pöörlemise alghetkel $t = 0$ nimetatakse **algfaasiks**.

Faasor



Harmoonilise signaali faasorkuju

- Kõigest eelnevast lähtuvalt näeme, et harmoonilist võnkumist algfaasiga φ_0 , amplituudiga $|z|$ ja ringsagedusega ω saab esitada sama ringsagedusega pöörleva vektorina ehk **faasorkujul**.
- Võnkumise ajaline kuju on vastava faasori projektsioon x –teljele ehk eksponentsiaalselt kujul kompleksarvu **reaalosa**:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{|z|e^{j(\omega t + \varphi_0)}\} = |z| \cos(\omega t + \varphi_0).$$

- Antud seost saab edaspidi kasutada arvutuste lihtsustamiseks.

Harmoonilise signaali faasorkuju

- Võnkumise ajalise kuju võis ümber kirjutada kujul

$$x(t) = \operatorname{Re}\{|z|e^{j(\omega t + \varphi_0)}\} = \operatorname{Re}\{|z|e^{j\varphi_0}e^{j\omega t}\}.$$

- Lineaarses keskkonnas levides signaali sagedus ei muutu. Seega võime ülaltoodud avaldisest eemaldada viimasele vastava osa $e^{j\omega t}$. Järele jäänud, amplituudi ja faasi, sisaldavat osa nimetatakse signaali esituseks **faasorkujul**:

$$x_s = |z|e^{j\varphi_0}.$$

- Alaindeks „s“ aitab meeles pidada, et tegelikult on signaalil olemas ka sagedus ($s = j\omega$ on süsteemiteooriast tuttav Lapalace'i teisenduse kompleksmuutuja).

Teisendamine

- Ajalisel kujul antud signaalist

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0)$$

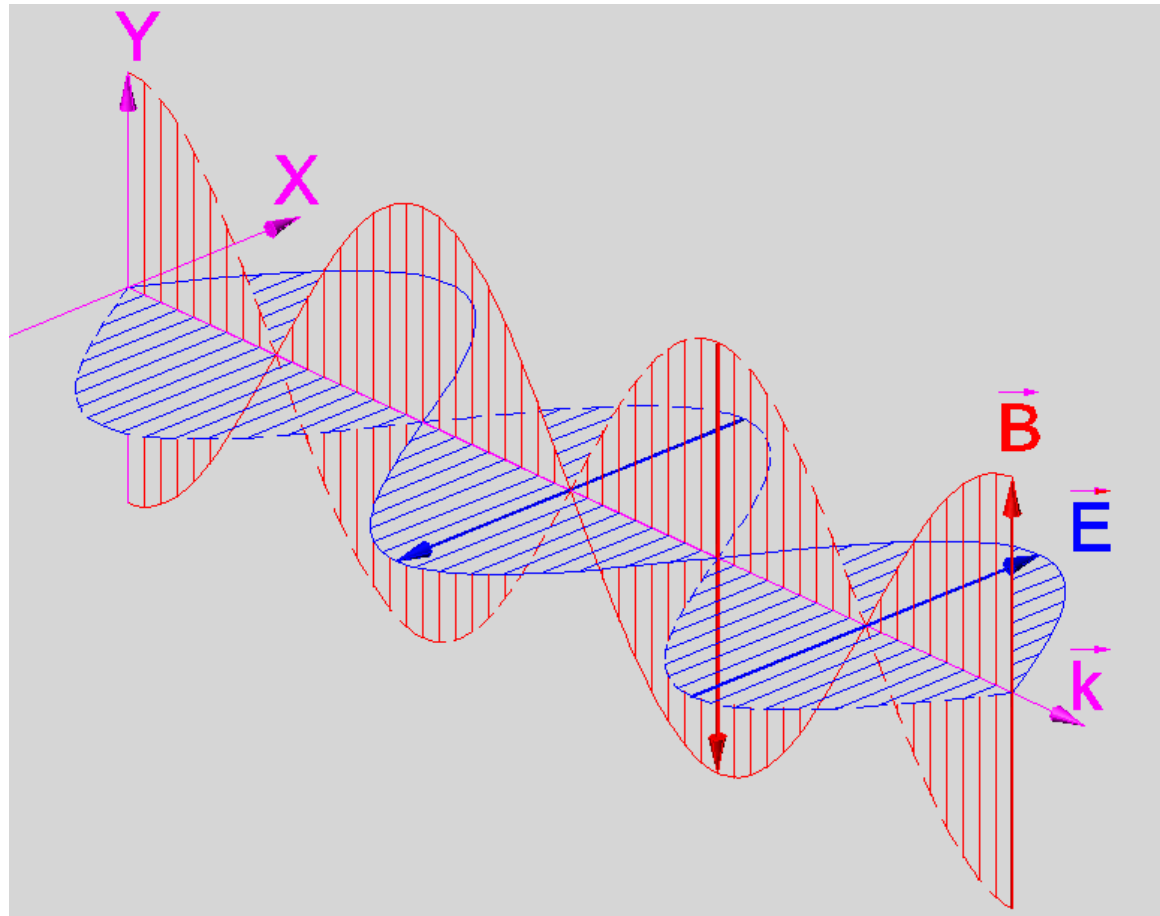
saame faasori


$$u_s = U_m e^{j\varphi_0}.$$

- Signaali ajalise kuju saame, kui esmalt korrutame faasori läbi komplekssponendiga $e^{j\omega t}$ ning seejärel leiame tulemuse reaalsosa:

$$u(t) = \text{Re}\{U_m e^{j\varphi_0} \cdot e^{j\omega t}\}.$$

Harmoonilised väljad



Harmoonilised väljad

- Elektrivälja $\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x$ korral eeldame, et tema x-telje suunaline komponent E_x on kujul

$$E_x = E(x, y, z) \cos(\omega t + \psi).$$

- Euleri valemist saime:

$$E_x = \operatorname{Re}[E(x, y, z)e^{j(\omega t + \psi)}] = \operatorname{Re}[E(x, y, z)e^{j\psi}e^{j\omega t}].$$

- Elektrivälja komponent E_x faasorkujul:

$$E_{xs} = E(x, y, z)e^{j\psi}.$$

- Vektorina esitatult $\mathbf{E}_s = E_{xs} \mathbf{a}_x$.

Faasorkujul signaali tuletis aja järgi

- Leiame esmalt osatuletise elektrivälja tugevuse x-komponendist

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = E(x, y, z) \frac{\partial}{\partial t} \cos(\omega t + \psi) .$$

- Saame tulemuseks

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\omega E(x, y, z) \sin(\omega t + \psi) .$$

- Jätame selle tulemuse meelde ja liigume edasi järgmise slaidi juurde.

Faasorkujul signaali tuletis aja järgi

- Nüüd alustame sama välja faasorkujul avaldisest E_{xs} ja korrutame selle läbi kompleksmuutujaga $s = j\omega$, saame

$$j\omega E_{xs} = j\omega E(x, y, z)e^{j\psi}.$$

- Teisendame saadud tulemuse ajalisele kujule, ehk leiame saadud faasori reaalosa

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{j\omega E_{xs} e^{j\omega t}\} &= E(x, y, z) \operatorname{Re}\{j\omega e^{j\psi} e^{j\omega t}\} = \\ &= E(x, y, z) \operatorname{Re}\{j\omega e^{j(\omega t + \psi)}\} = \\ &= E(x, y, z) \operatorname{Re}\{j\omega [\cos(\omega t + \psi) + j \sin(\omega t + \psi)]\}.\end{aligned}$$

- Näeme, et lõpptulemus on **samuti**:

$$- \omega E(x, y, z) \sin(\omega t + \psi).$$

Faasorkujul signaali tuletis aja järgi

- Näeme, et kui esitame signaali faasorkujul siis asendub osatuletise leidmine aja järgi lihtsalt faasori korrutamisega suurusega $s = j\omega$:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\omega E(x, y, z) \sin(\omega t + \psi) = \operatorname{Re}\{j\omega E_{xs} e^{j\omega t}\}.$$

- Teisisõnu kehtib järgmine ekvivalentsus:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} \Leftrightarrow j\omega E_{xs}.$$

- Järgnevalt rakendame seda ekvivalentsust Maxwell'i võrrandite lahendamiseks.

Faasorkujul Maxwell'i võrrandid vaakumis

- Vaakumis puuduvad laengud:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$$

- Puuduvad ka magnetilised dipoolid:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

- Vaakum on isolaator:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

- Magnetvälja jõujooned on kinnised:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

- Gaussi seadus faasorkujul:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0.$$

- Faraday seadus faasorkujul:

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_s.$$

- Ampere'i seadus faasorkujul:

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_s.$$

- Gaussi seadus magnetvälja kohta:

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0.$$

Lainevõrrand

- Nüüd saame tuletada statsionaarset harmoonilist signaali kirjeldava lainevõrrandi.
- Leiame esmalt Faraday seaduse mõlemast poolest rootori :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_s) = -j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{H}_s .$$

- On teada, et mistahes vektorvälja $\mathbf{G}$ korral kehtib:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \nabla^2 \mathbf{G} .$$

- Viimast asjaolu esimese avaldise peal rakendades saame, et

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla^2 \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{H}_s .$$

Lainevõrrand

- Kuna vaakumis puuduvad elektrilaengud, siis on Gaussi seaduse kohaselt elektrivälja divergents seal null ($\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0$), seega võrrand lihtsustub kujule:

$$-\nabla^2 \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{H}_s.$$

- Ampere'i seaduse $\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_s$ rakendamine võimaldab jõuda, **Helmholtzi võrrandi** nime all tuntud, lõpliku tulemuseni :

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}_s = -k_0^2 \mathbf{E}_s .$$

- Kus konstant

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

on **lainearv** vaakumis.



Lainevõrrand

- Faasorkujul võrrandi puhul oli ajas tuletise leidmiseks vajalik suuruse läbi korrutamine kompleksmuutujaga $s = j\omega$.
- Helmholtzi võrrandis

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}_s$$

olev kordaja $-\omega^2 = (j\omega)^2$ vastab seega teist järku osatuletisele aja järgi. Lainevõrrandi ajaline kuju oleks seega

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

- Tegemist on teist järku nelja muutujaga osalise diferentsiaalvõrrandiga. Sellised võrrandid kirjeldavad ruumis liikuvaid laineid, sellest ka nimetus **lainevõrrand**.

Lainevõrrand

- Saadud faasorkujul lainevõrrandi x - komponent on kujul

$$\nabla^2 \mathbf{E}_{xs} = -k_0^2 \mathbf{E}_{xs} .$$

- Laiendatuna osutub viimane teist järku (kolme muutujaga) osaliseks diferentsiaalvõrrandiks

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -k_0^2 E_{xs} .$$

- Kui eeldame, et E_{xs} muutub ainult z telje suunas (mitte x ega y), saame lihtsustuse tulemusena tavalise diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} = -k_0^2 E_{xs} .$$

Lainevõrrand

- Viimase diferentsiaalvõrrandi üheks võimalikuks lahendiks on

$$E_{xs} = E_{x0} e^{-jk_0 z}.$$

- Arvestades, et tegemist on ajas muutuva väljaga ($e^{j\omega t}$) saame faasorkujul lahendist avaldada elektrivälja ajalise kuju

$$E_x(z, t) = E_{x0} \cos(\omega t - k_0 z).$$

- Näeme, et tegemist on z-telje positiivses suunas kulgeva harmoonilise lainega.



Tasalaine omadusi

- Kahe lähima, samas faasis punkti omavahelist kaugust ruumis, laine kulgemise suunas (z –telje sihis) nimetatakse **lainepikkuseks**

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi}{k_0} .$$

- Laine kannab ruumis kulgedes levisuunas energiat, seetõttu nimetatakse selliseid laineid **kulglaineteks** (*traveling wave*).
- Kui lainearv on negatiivne, siis on laine kulgemise suund vastupidine.
- Tasalaine korral on $x - y$ tasandil $z = \text{const}$ kõikidel punktidel sama faas. Praktikas ei ole selline laine võimalik, kuid allikast kaugel on näiteks ka keralaine peaaegu tasane, seega on mudelil siiski reaalne väärtus.

Laine magnetvälja komponent

- Faraday seaduse $\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_s$ abil saame leida meie lihtsustatud juhu jaoks, et :

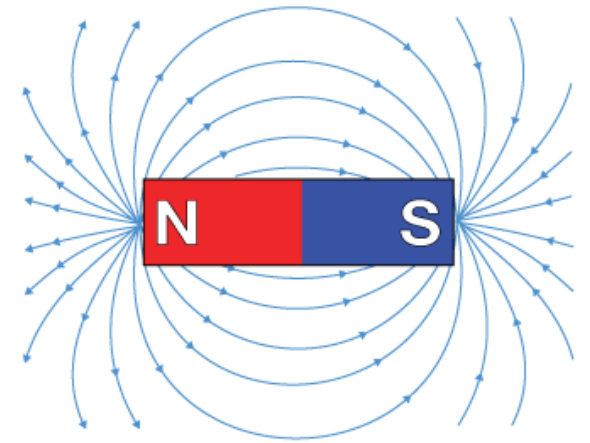
$$\frac{dE_{xs}}{dz} = -j\omega\mu_0 H_{ys}.$$

- Mille lahendiks on

$$H_{ys} = E_{x0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e^{-jk_0 z}.$$

- Magnetvälja y - komponendi ajaline kuju on seega:

$$H_y(z, t) = E_{x0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos(\omega t - k_0 z).$$



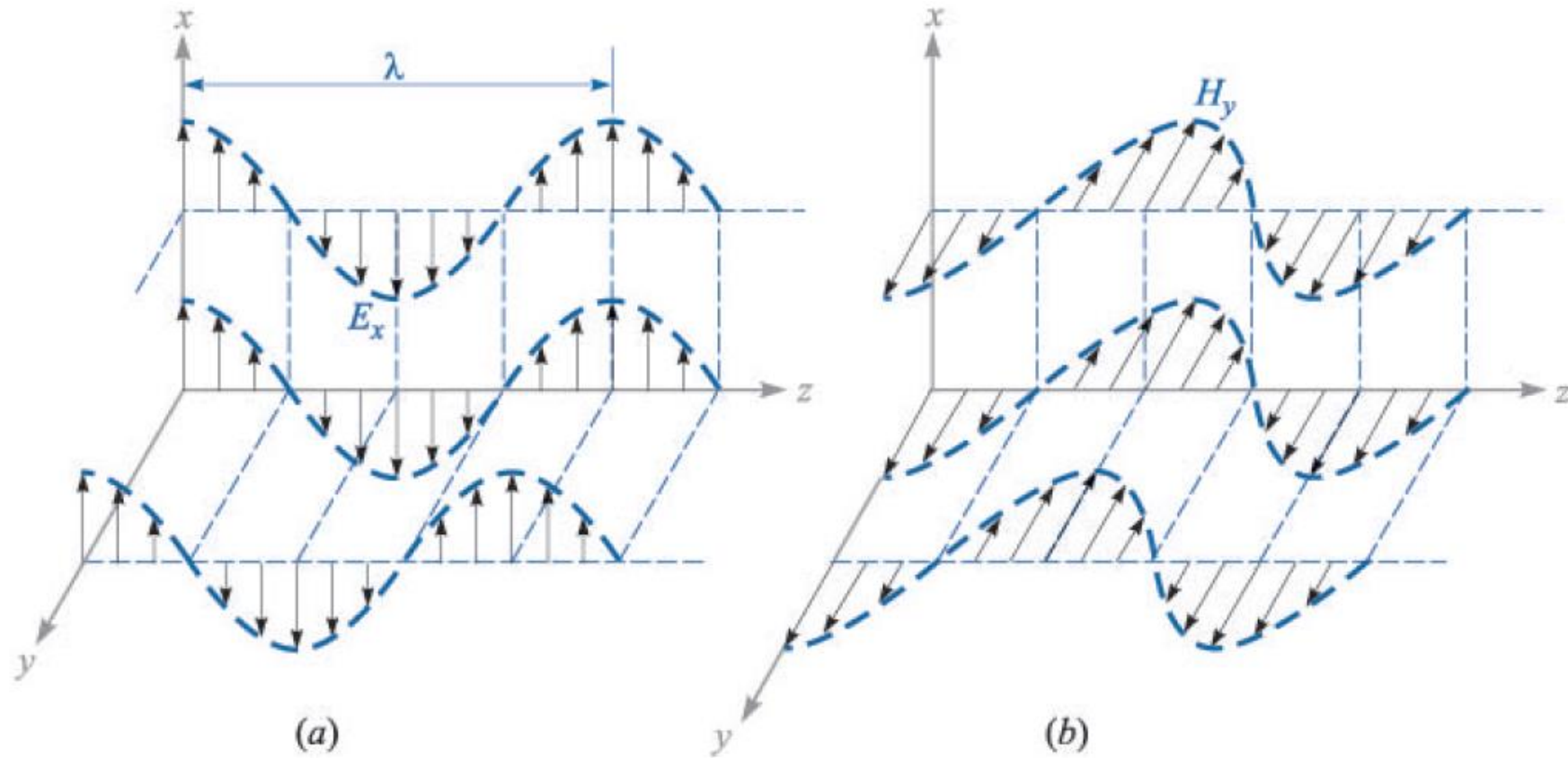
Vaakumi karakteristiklik impedants

- Elektri- ja magnetvälja tugevused on vaakumis (kaovabas keskkonnas) alati samas faasis. Ruumiliselt on need väljad alati omavahel risti.
- Elektri- ja magnetvälja komponentide suhe on konstantne:

$$\frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} .$$

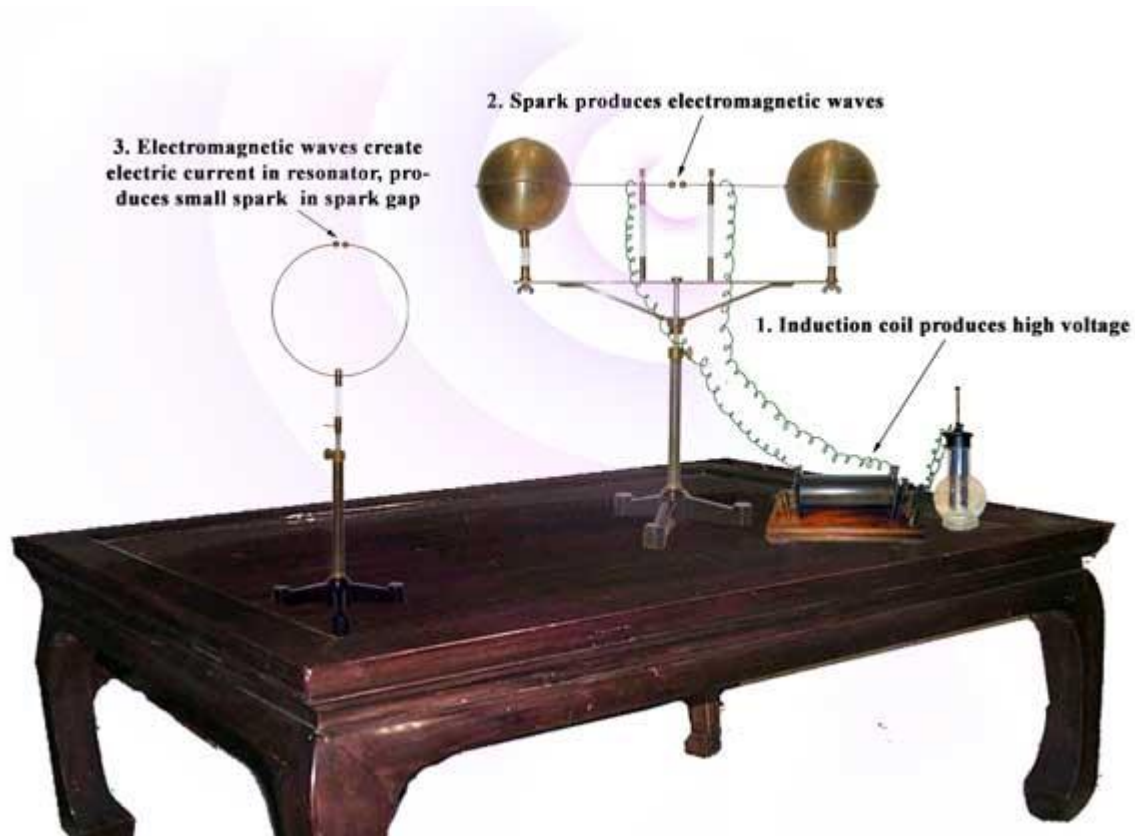
- Mainitud suhet nimetatakse vaakumi **karakteristlikuks impedantsiks** η_0 . Viimase väärtus on ligikaudu 120π (377) Ω .

Ühtlane tasalaine vaakumis



Katseline tõestus

- Elektromagnetlainete olemasolu tõestas katseliselt Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) 1879 aastal.



Materjalid

- W.H. Hayt, J.A. Buck. **Engineering Electromagnetics**. 6th ed. Ch 11.1
Wave propagation in free space.

