

13. Lainelevi erinevates keskkondades

IEE1110 – Elektromagnetväljatehnika

Lainelevi dielektrikutes

- Faasorkujul lainevõrrand homogeeneses ja isotroopses keskkonnas dielektrilise läbitavusega ε ja magnetilise läbitavusega μ

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -k^2 \mathbf{E}_s .$$

- Lainearv sõltub nüüd keskkonna parameetritest ε ja μ

$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = k_0 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} .$$

- Z-telje suunas leviva, x-telje sihilise elektrivälja komponendiga laine jaoks saame

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} = -k^2 E_{xs} .$$

Levikonstant

- Lainearv võib vaakumist erinevas keskkonnas olla kompleksne suurus. Viimast tuntakse ka **levikonstandi** või leviteguri nime all

$$\gamma = jk = \alpha + j\beta.$$

- Levikonstandi reaalosa α nimetatakse **sumbeteguriks** mõõtühikuga Neeprit meetri kohta [Np/m].
- Levikonstandi imaginaarosa β kirjeldab laine faasikiirust [rad/m] ja on tuntud kui **faasikonstant**.
- Lainevõrrandi võimalik lahend dielektrikus on kujul

$$E_{xs} = E_{x0} e^{-jkz} = E_{x0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}.$$

Neepri ja detsibelli vahekord

- Kui signaal, näiteks pinge U , sumbub 1 Np võrra siis on

$$\ln \left(\frac{U_1}{U_2} \right) = 1,$$

viimasest on lihtne näha, et pingete suhe on võrdne naturaalogaritmi alusega $e \approx 2,71828...$

- Sellise pingete suhte korral on sumbumus detsibellides
 $20\log(e) \approx 8,686$.
- Seega 1 Np $\approx 8,686$ dB ja 1 dB $\approx 0,115$ Np.



Sumbuv laine

- Üle-eelmise slaidi lõpus olevale faasorile vastab elektrivälja tugevuse kujul

$$E_x(z, t) = E_{x0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) .$$

- Avaldisest on näha, et tegemist on lainega, mille amplituud väheneb ruumis levides – teisisõnu sumbuva lainega.
- Viimasest lähtub, et laine **faasikiirus**

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} .$$

- Lainepikkus λ on seega

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} .$$

Polarisatsioon vahelduva elektrivälja korral

- Vahelduva elektrivälja korral tuleb arvestada sellega, et keskkonna polariseerumine ei toimu hetkeliselt vaid selleks kulub veidi aega.
- Polariseeritus $\mathbf{P}(t)$ on sellisel juhul leitav konvolutsioonina

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi_e(t - \tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau .$$

- Konvolutsiooniteoreemist lähtudes saab kahe suuruse ajalise konvolutsiooni asendada nende Fourier'i teisenduste korrutisega ehk

$$\mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi_e(\omega) \mathbf{E}(\omega) .$$

Kompleksne dielektriline läbitavus

- Viimasest avaldisest on näha, et dielektriline vastuvõtlikkus χ_e ja seega ka materjali dielektriline läbitavus ε on mõlemad sagedusest sõltuvad suurused.
- Mainitud sagedussõltuvus põhjustab dielektrikutes **dispersiooninähtust** ehk elektromagnetlainete levikiiruse sõltuvust nende sagedusest.
- Viimane tähendab omakorda seda, et materjali dielektriline läbitavus $\varepsilon(\omega)$ on tegelikult lisaks veel kompleksne suurus:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega).$$

Levikonstant

- Sarnastel põhjustel võib ka materjali magnetiline läbitavus olla kompleksne suurus $\mu = \mu' - j\mu''$. Ka siin on imaginaarosa negatiivne.
- Enamik materjale on mittemagneetilised (para- ja diamagneetikud), seega vaatleme edaspidi just kompleksse dielektrilise läbitavuse mõju levikonstandi väärtusele.
- Laine arv on sellisel juhul

$$k = \omega \sqrt{\mu(\varepsilon' - j\varepsilon'')} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon'} \sqrt{1 - j\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}} .$$

Levikonstant

- Levikonstandi $\gamma = jk$ reaali- ja imaginaarosa ehk sumbetegur ja faasikonstant on seega vastavalt:

$$\alpha = \operatorname{Re}\{jk\} = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} - 1};$$
$$\beta = \operatorname{Im}\{jk\} = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} + 1}.$$

- Suhet $\tan(\delta) = \epsilon''/\epsilon'$ nimetatakse **kaonurga tangensiks**.

Tasalaine magnetvälja komponent

- Laine magnetvälja komponent

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} .$$

- Karakteristlik impedants on nüüd samuti kompleksne suurus

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon' - j\epsilon''}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \frac{1}{\sqrt{1 - j\frac{\epsilon''}{\epsilon'}}} .$$

- Viimase tõttu tekib laine elektri- ja magnetvälja komponentide vahele **faasinihe**.

Kaovaba dielektrik

- Dielektriku erijuhuks on ideaalne, **kaovaba dielektrik**, mille puhul $\varepsilon'' = 0$ ja seega $\varepsilon' = \varepsilon$. Sellisel juhul on sumbetegur $\alpha = 0$ ja faasikonstant on seega $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$. Elektriväli on kujul

$$E_x(z, t) = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) .$$

- Viimane liigub z-telje positiivse suunas faasikiirusega

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{n} .$$

- Valguse kiiruse (vaakumis) c suhet faasikiirusesse keskkonnas nimetatakse antud keskkonna **murdumisnäitajaks** $n = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$.

Kaovaba dielektrik

- Laine magnetvälja komponent kaovabas keskkonnas

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-j\beta z} .$$

- Karakteristlik impedants on sellisel juhul puhtalt reaalarvuline

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} .$$

- Lainepikkus

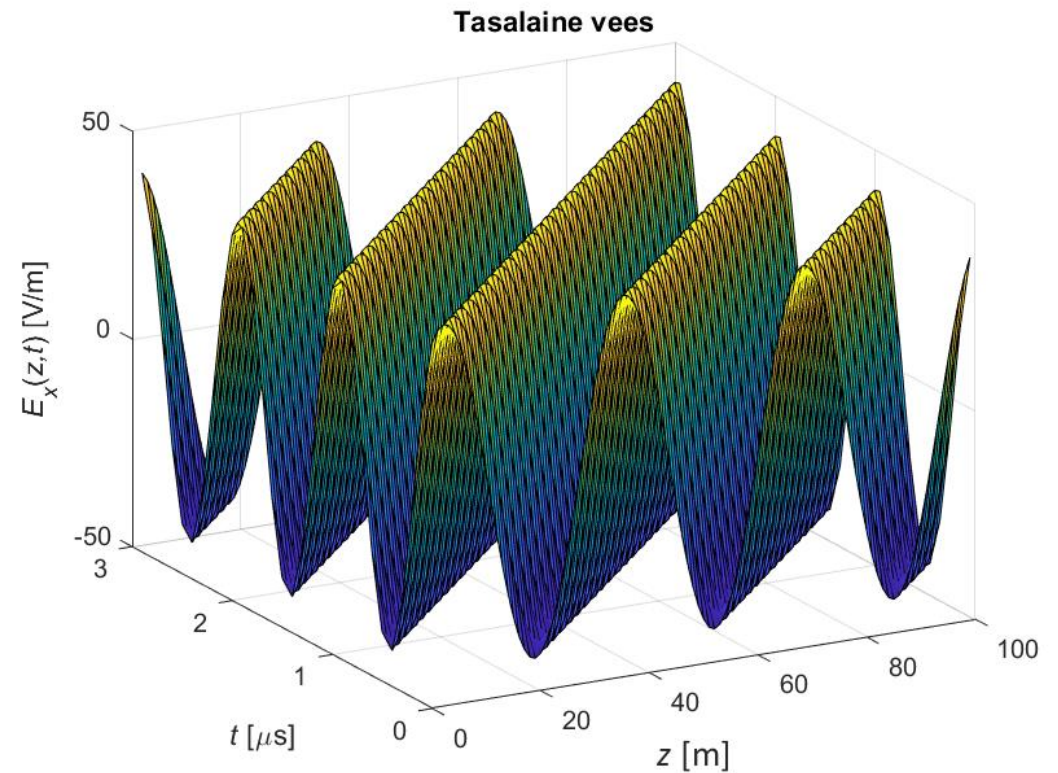
$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon}} .$$

Näide – tasalaine vees

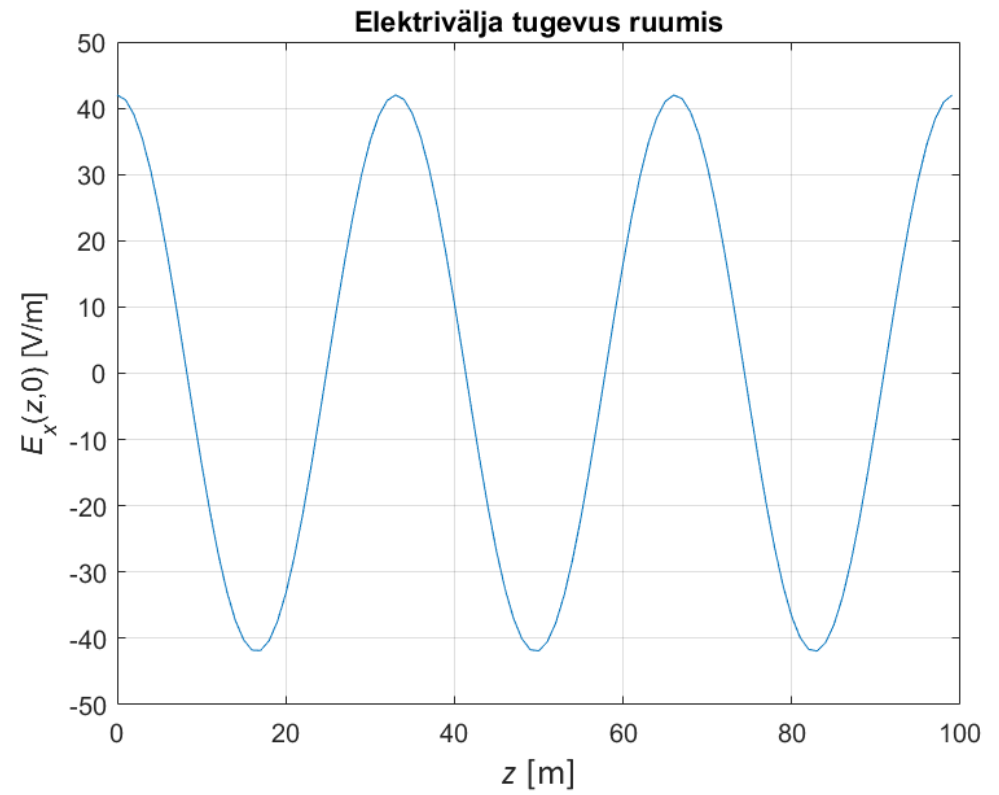
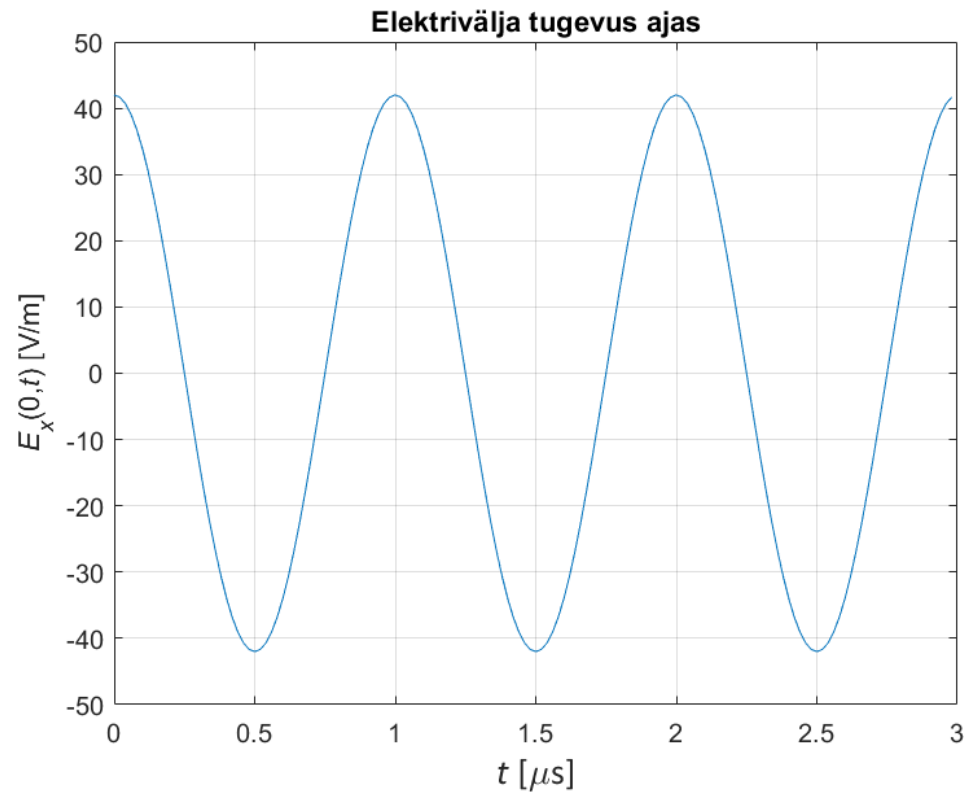
- Sagedusega $f = 1$ MHz laine puhtas vees: $\epsilon_r = 81$ ja $\mu_r = 1$.

$$E_x(z, t) = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z)$$

- $E_{x0} = 42$ V/m;
- $\beta = 0,19$ rad/m;
- $\lambda = 33$ m;
- $v_p = 3,3 \cdot 10^7$ m/s;
- $\eta = 42 \Omega$.



Näide – tasalaine vees



Kaod keskkonnas

- Keskkonnas tekkivate kadude paremaks mõistmiseks vaatleme homogeenset, ühtlase paksuse l - ja ristlõikega (pindala S), uuritavast materjalist katsekeha mis asub kahe paralleelse elektroodi vahel.



- Elektroodidele rakendatakse harmooniline vahelduvpinge

$$u(t) = U_m \cos(\omega t).$$

- Viimane on faasorkujul $u_s = U_m e^{j \cdot 0} = U_m$.

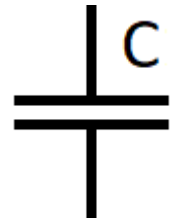
Kaovaba keskkond

- Kui katsekeha paksus l ja rakendatud pinge ringsagedus ω on piisavalt väikesed, siis võime eeldada, et elektrootide vahel on elektrivälja tugevus

$$\mathbf{E}(t) = \frac{u(t)}{l} \mathbf{a}_l = \frac{U_m}{l} \cos(\omega t) \mathbf{a}_l.$$

- Kaovabas keskkonnas saame katsekeha elektrootide vahele paigaldades ideaalse (kaovaba) kondensaatori.
- Kuna dielektrikus puuduvad vabad laengukandjad siis koosnev kogu plaatide vaheline voolutihedus ainult nihkevoolu komponendist

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\varepsilon U_m \omega}{l} \sin(\omega t) \mathbf{a}_l.$$



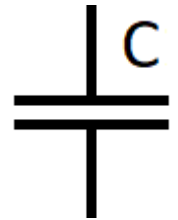
Kaovaba keskkond

- Kuna nii keskkond, kui elektrivälja tugevus on ühtlased, siis on seda ka nihkevoolu tihedus ja elektrodide vaheline nihkevool on

$$I_d = S|\mathbf{J}_d| = -\frac{\varepsilon S U_m \omega}{l} \sin(\omega t).$$

- Meenutame, et plaatkondensaatori mahtuvus on

$$C = \frac{\varepsilon S}{l}$$

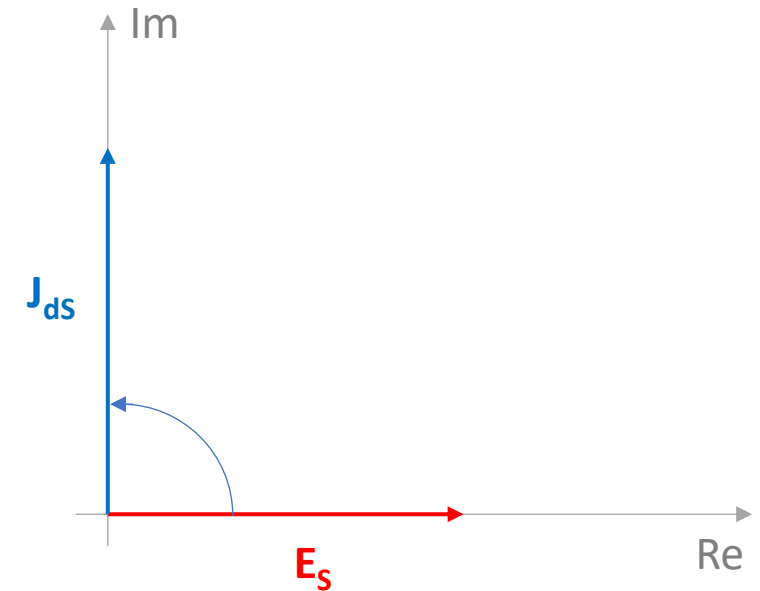


ja kondensaatori reaktiivjuhtivus (**suspektants**) $B_c = 1/X_c = j\omega C$. Seega

$$i_d(t) = jB_c U_m \sin(\omega t) = B_c U_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Kaovaba keskkond - faasordiagramm

- Näeme, et ainus voolukomponent on seda põhjustavast pingest veerand perioodi ($\pi/2$) võrra ees.
- Tulemus on just selline, nagu seda ideaalse kondensaatori puhul ootaks: **C****I****V****I****L**.
- Tegemist elektrivälja tugevuse E_s ja nihkevoolu tiheduse J_{ds} vahelise üldise suhte ühe avaldusviisiga.



Kadudega keskkond

- Välise vahelduva elektrivälja mõjul muudavad dielektrikus paikenad seotud laengud perioodiliselt oma orientatsiooni. Selle liikumise tõttu muutub osa elektromagnetvälja energiast soojuseks – keskkonnas tekivad kaod.
- Tekkinud kadusid väljendab kompleksse dielektrilise läbitavuse imaginaarosa ε'' . Kadudega keskkonnas on nihkevoolul nüüd kaks, omavahel ortogonaalset, komponenti

$$\mathbf{J}_d = (\varepsilon' - j\varepsilon'') \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

- Tuleme järgnevalt tagasi ülaltoodud katsekeha näite juurde.

Kadudega keskkond

- Voolutihedus katsekehas faasorkujul

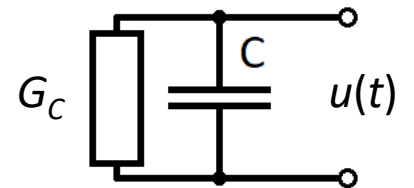
$$\mathbf{J}_{ds} = j\omega\varepsilon\mathbf{E}_s = j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')\mathbf{E}_s = j\omega\varepsilon'\mathbf{E}_s + \omega\varepsilon''\mathbf{E}_s.$$

- Sama avaldis elektrootide vahelise pinge ja voolutugevuste kohta

$$i(t) = (B_c + G_c)u(t),$$

kus kaojuhtivus on

$$G_c = \frac{\omega\varepsilon''S}{l}.$$



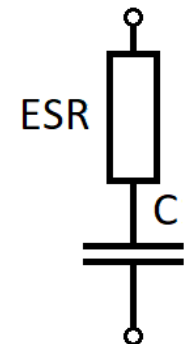
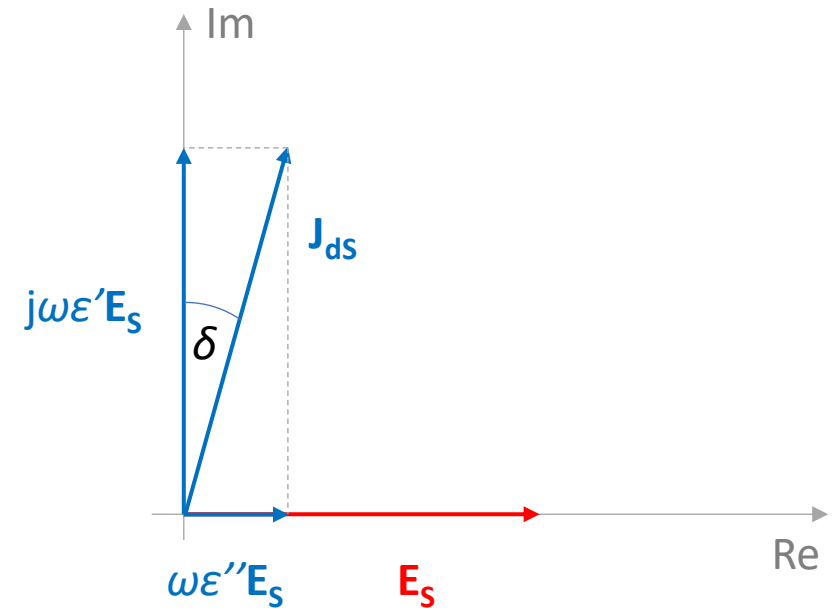
- Vaadeldud katsekeha elektriliseks ekvivalendiks on kondensaatori ja takisti rööpühendus.

Kadudega keskkond – faasordiagramm

- Voolutihedusel on kaks komponenti.
- Faasinihe voolutiheduse ja elektrivälja tugevuse vahel on nüüd väiksem kui $\pi/2$ rad.
- Nurka δ voolutiheduse ja tema imaginaarosa vahel nimetatakse **kaonurgaks**.
- Kadude numbriliseks iseloomustamiseks kasutatakse kaonurga tangensit

$$\tan \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}.$$

- Praktikas kasutatakse komponentide iseloomustamiseks nende hüvetegurit: $Q = \frac{1}{\tan \delta} = \frac{|X_C|}{ESR}$.

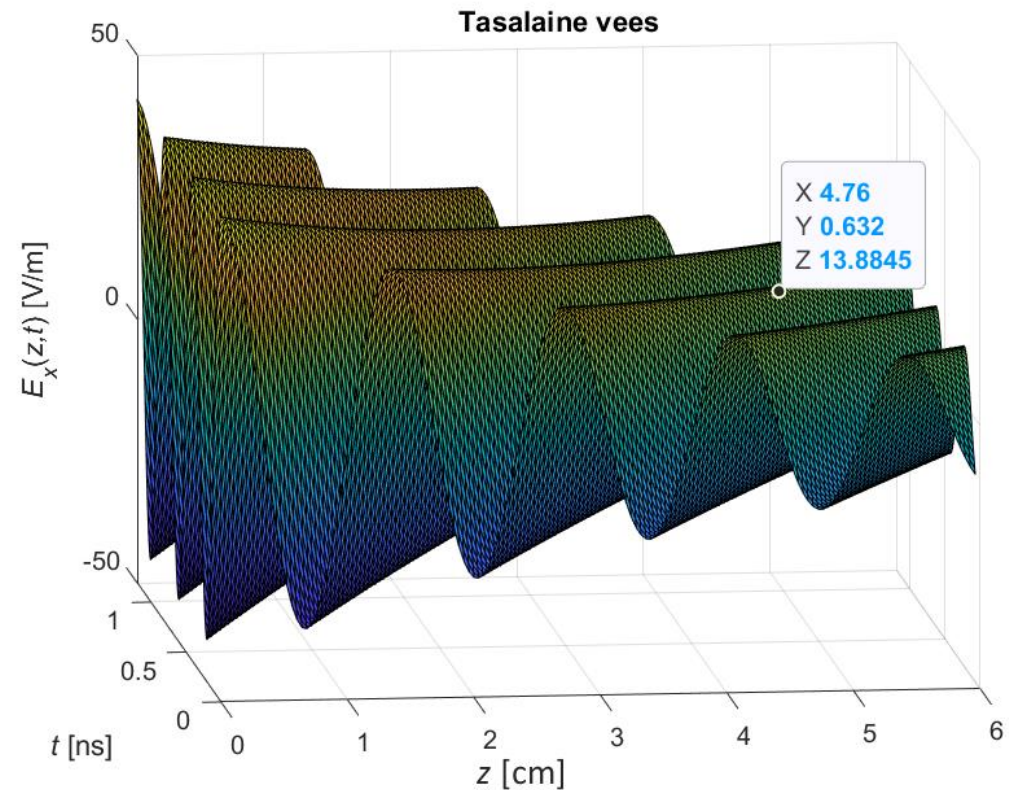


Näide 2 – tasalaine vees

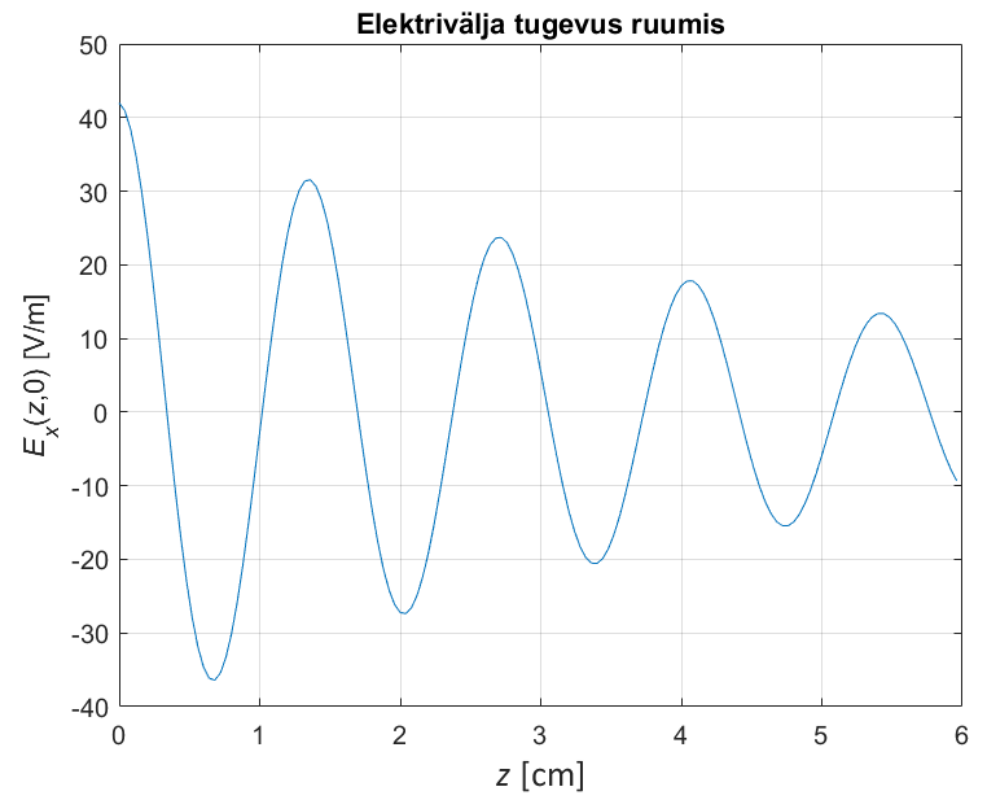
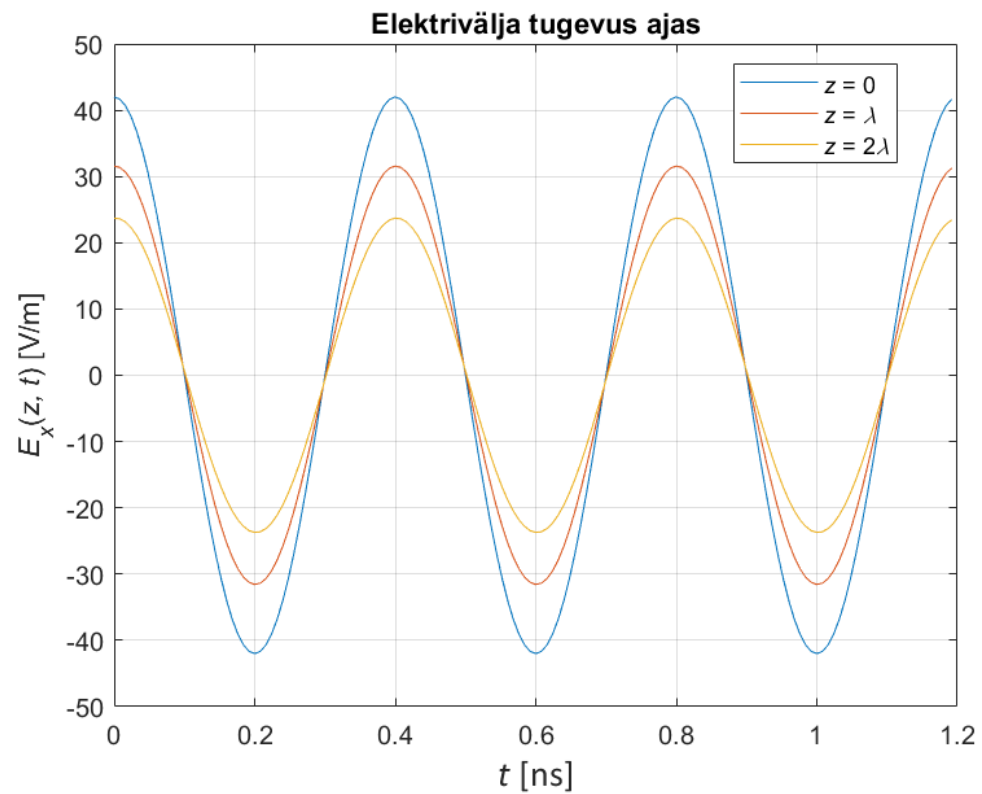
- Sagedusega $f = 2,5$ GHz laine puhtas vees: $\epsilon_r = 78 - j7$ ja $\mu_r = 1$.

$$E_x(z, t) = E_{x0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

- Kaonurga tangens on 0,0897.
- Sumbetegur $\alpha = 21$ Np/m ja faasikonstant $\beta = 463$ rad/m, seega lainepikkus $\lambda = 1,36$ cm.
- Karakteristlik impedants $\eta = 42,5 + 1,9j = 42,6 \angle 2,56^\circ \Omega$.



Näide 2 – tasalaine vees



Lainelevi juhtivas keskkonnas

- Järgnevalt on vaatluse all keskkonnad, kus vabad laengud saavad elektrivälja mõjul liikuda ja põhjustada seega elektrivoolu tekke.
- Seos elektrivälja tugevuse $\mathbf{E}$ ja selle tagajärjel tekkiva voolutiheduse $\mathbf{J}$ vahel oli teatavasti $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, kus σ on keskkonna juhtivus. Tekkinud voolude tagajärjel kaotab taolises keskkonnas levib elektromagnetlaine energiat.
- Järgnevalt seostame keskkonna juhtivuse σ meile juba tuttava dielektrilise läbitavuse imaginaarosaga ϵ'' .

Lainelevi juhtivas keskkonnas

- Alustame faasorkujul Ampere'i seadusega

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega(\varepsilon' - j\varepsilon'')\mathbf{E}_s = \omega\varepsilon''\mathbf{E}_s + j\omega\varepsilon'\mathbf{E}_s .$$

- Võrdleme saadud tulemust juhtivusvoolu tihedust $\mathbf{J}_s$ sisaldava kujuga

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s + j\omega\varepsilon'\mathbf{E}_s .$$

- Peame meeles, et $\mathbf{J}_s = \sigma\mathbf{E}_s$, seega

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = \sigma\mathbf{E}_s + j\omega\varepsilon'\mathbf{E}_s$$

- Võrreldes omavahel esimest ja kolmandat avaldist saame seose

$$\varepsilon'' = \frac{\sigma}{\omega} .$$

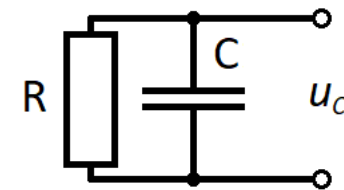
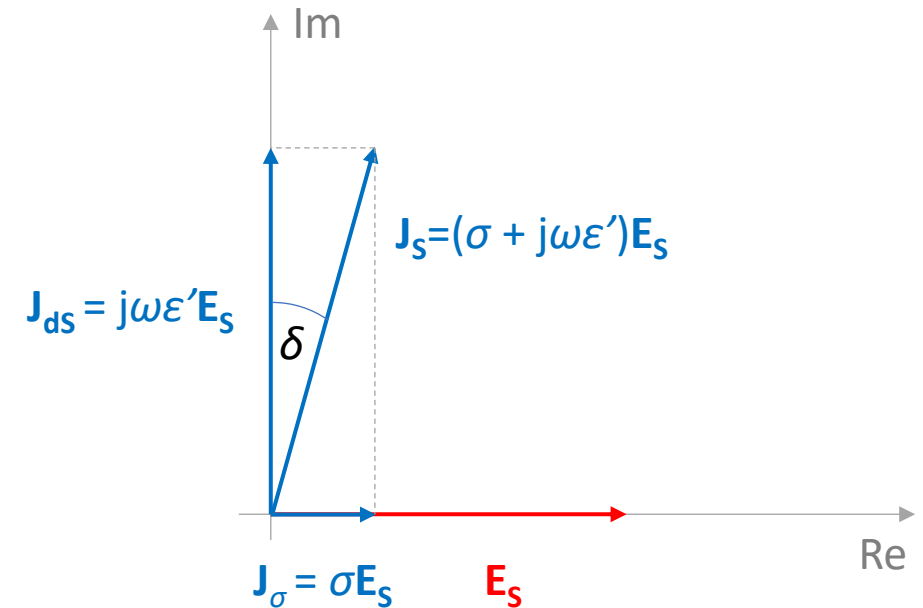
Kaod juhtivas keskkonnas - faasordiagramm

- Kaod tekivad nüüd peamiselt materjalis indutseeritud juhtivusvoolude tõttu.
- Kaonurga tangensjuhtiva keskkonna korral on

$$\tan \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\varepsilon' \omega}.$$

- Näeme, et juhtivus- ja nihkevoolude amplituudide suhe on võrdne kaonurga tangensiga

$$\frac{J_{\sigma s}}{J_{ds}} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon'}.$$



Väikese juhtivusega keskkond

- Kui kaonurga tangens on väike, siis saab materjali elektrilisi omadusi aproksimeerida.
- Ligikaudsete avaldiste täpsus on suurusjärgus mõni protsent, kui kaonurga tangens on väiksem kui üks kümnendik: $\tan\delta < 0,1$.
- Juhtiva materjali korral, kus $\varepsilon'' = \sigma/\omega$

$$jk = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon'}},$$

- Saab aproksimeerimiseks kasutada Newtoni üldistatud binoomvalemit:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 \dots$$

Levikonstant juhtivas keskkonnas

- Sumbetegur

$$\alpha = \operatorname{Re}\{jk\} \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}}.$$

- Faasikonstant

$$\beta = \operatorname{Im}\{jk\} \approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon'} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon'} \right)^2 \right].$$

- Viimast saab tavaliselt täiendavalt lihtsustada kujule

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon'}.$$

Karakteristlik impedants juhtivas keskkonnas

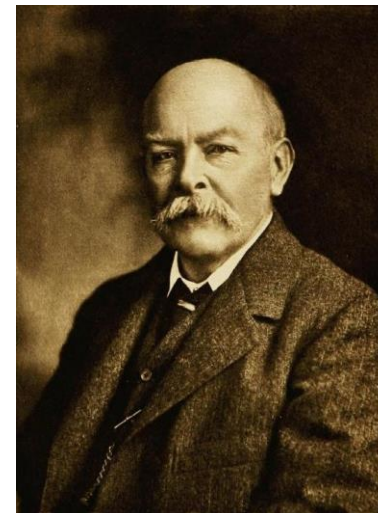
- Rakendades Newtoni binoomteoreemi karakteristliku impedantsi avaldisele

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \frac{1}{\sqrt{1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon'}}},$$

saame

$$\eta \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon'} \right)^2 + j \frac{\sigma}{2\omega \varepsilon'} \right].$$

Poyntingi teoreem



- John Henry Poynting 1884.
- Alustame Maxwell'i võrrandist (Ampere'i seadus):

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

- Võttes viimase võrrandi mõlemast poolest korrutise elektrivälja tugevusega $\mathbf{E}$ saame

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

- Mistahes kahe vektorvälja, näiteks $\mathbf{E}$ ja $\mathbf{H}$ korral, kehtib järgmine seos:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}).$$

Poyntingi teoreem

- Viimasest kahest saame

$$\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

- Järgnevalt rakendame seost (Faraday seadus):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

- Peale liikmete ümberjärjestamist

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Poyntingi teoreem

- Kui eeldame, et keskkonna elektrilised parameetrid ei ole ajas muutuvad, siis saame teha järgneva asenduse

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

- Mistahes funktsiooni $f(t)$ korral saab **liitfunktsiooni tuletise reeglit** rakendades näidata, et

$$\frac{df^2(t)}{dt} = 2f(t) \frac{df(t)}{dt}.$$

Poyntingi teoreem

- Viimast seost rakendades saame lihtsustada:

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} \right).$$

- Täpselt samast loogikast lähtudes saame ka magnetvälja energiatiheduse muudu kujul:

$$\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{H} \cdot \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial H^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu H^2}{2} \right).$$

Poyntingi teoreem

- Nüüd on meie avaldis kujul

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right).$$

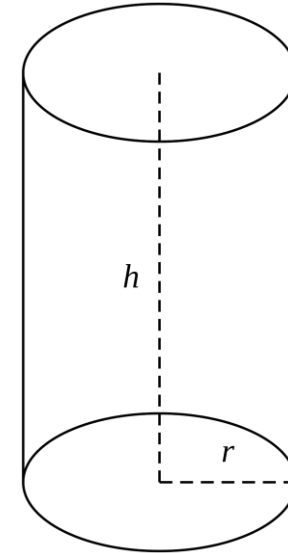
- Võtame mõlemast poolest ruumintegraali ja rakendame lisaks vasaku poole kohta divergentsi teoreemi, saame

$$-\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{S} = \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv.$$

Oomilised kaod

- Vaatame eelmisest avaldisest seost

$$\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dv.$$



- Olgu meil silindriline, ühtlase ristlõikega homogeenne juhtiv keha. Olgu elektrivälja tugevus pikki silindrit ühtlane. Sellisel juhul oleks potentsiaalide vahe silindri otste vahel $U = h \cdot E$ V.
- Kui silindrit läbib, viimase mõjul, ühtlane voolutihedus $\mathbf{J}$, siis on silindrit läbiva voolu tugevus

$$I = JS = J\pi r^2 \text{ A.}$$

Näeme, et kirjeldame siin sisuliselt takistit.



Oomilised kaod

- Meie näitejuhul on

$$\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV = EJh\pi r^2 = EJV = UI.$$

- Pinge mõõtühikuks on volt V, ehk J/C, voolutugevuse omaks amper A ehk C/s. Seega korrutise UI dimensiooniks on J/s ehk W.
- Tegemist on **oomilise kaoga** takistis – elektrienergia muutumisega mingiks teiseks energialiigiks, enamasti soojusenergiaks.
- Kui voolu liikumise suund on vastupidine elektrivälja omale, siis on „kadu“ negatiivne ehk tegemist on elektrienergia **allikaga**.
- Sama kehtib ka mistahes elektrivälja kuju, voolutiheduse jaotuse ja ruumi V korral. Ainult konkreetse võimsuse leidmine on siis keerukam.

Elektrivälja salvestunud energia

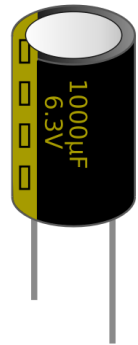
- Neljandas loengus leidsime, et elektrivälja salvestunud energia on

$$W_E = \iiint_V \frac{\varepsilon E^2}{2} dv$$

- Vaatame nüüd Poyntingi teoreemi parema poole teist liidetavat

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{\varepsilon E^2}{2} dv.$$

- Näeme, et tegemist on elektrivälja salvestunud energia muutusega ajas. Dimensionaalselt on jällegi tegemist võimsusega [W]. Viimane ei seostu aga mitte energia kulutamisega vaid selle salvestamisega.



Magnetvälja salvestunud energia

- Sarnasel on Poyntingi teoreemi parema poole kolmas liidetav

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \frac{\mu H^2}{2} dv$$



magnetvälja salvestatud energia muutus ajas. Tegemist on jällegi, kas magnetvälja täiendava energia salvestamisega või sinna salvestunud energia kasutamisega.

- Kõik need kolm liidetavat kokku näitavad, et elektrienergiat võib muuta mõneks teiseks energialiigiks või seda saab salvestada kas elektri- või magnetvälja.

Poyntingi vektor

- Suurust

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

nimetatakse **Poyntingi vektoriks**.

- Poyntingi vektori moodul $|\mathbf{\Pi}|$ näitab pindalaühikut läbiva elektromagnetvälja võimsust [W] (**võimsuse pindtihedust**) ja suund näitab energia liikumise (laine levimise) suunda.

Poyntingi vektor ideaalses dielektrikus

- Ideaalses dielektrikus on väljatugevused vastavalt:

$$E_x(z, t) = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) ;$$
$$H_y(z, t) = \frac{E_{x0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta z) .$$

- Poyntingi vektori (z - komponendi) hetkväärtus on seega

$$\Pi_z(z, t) = \frac{E_{x0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) .$$

- Poyntingi vektori keskväärtus ajas

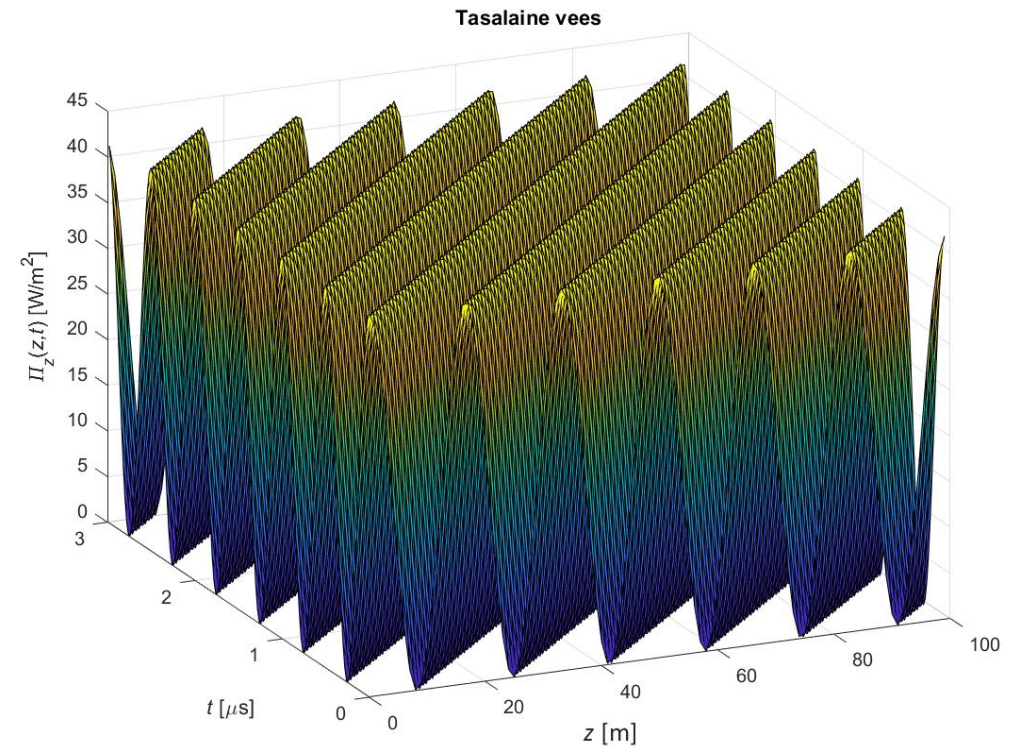
$$\overline{\Pi_z} = \frac{E_{x0}^2}{2\eta} .$$

Näide – tasalaine vees II

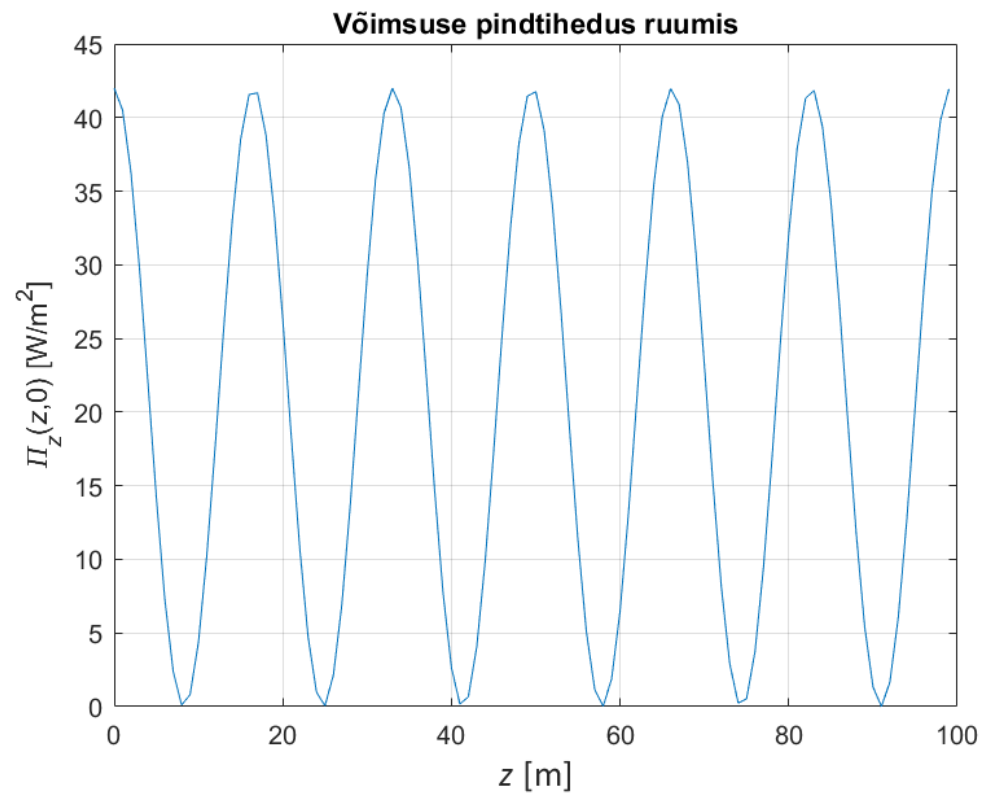
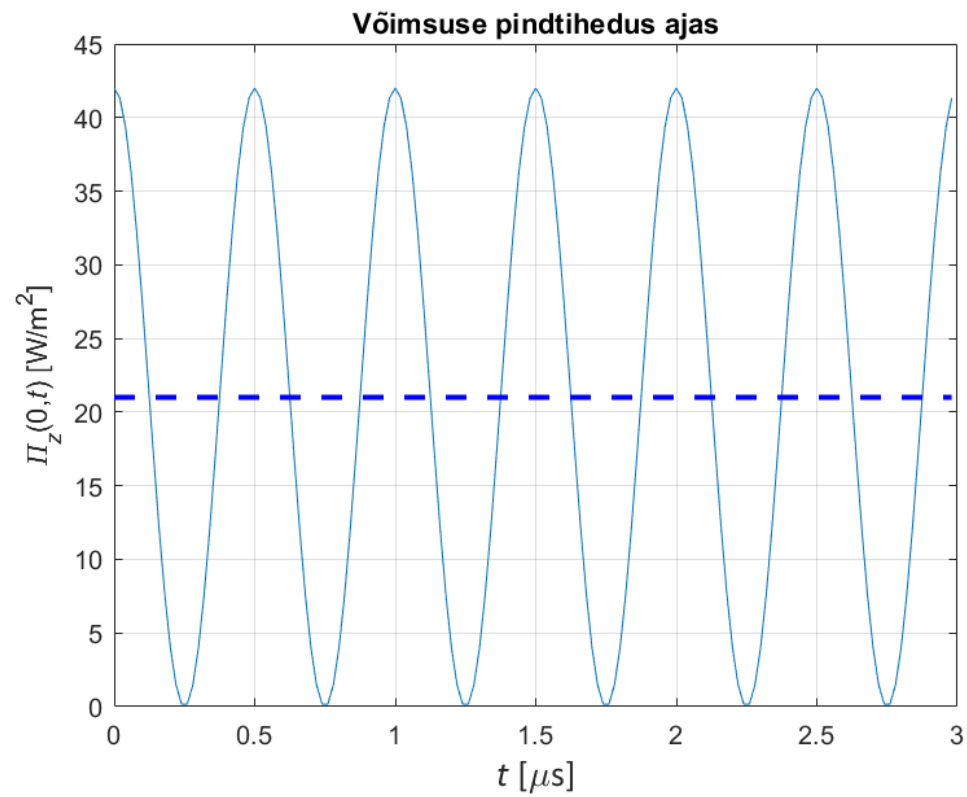
- Poyntingi vektori hetkväärtus puhtas vees

$$\Pi_z(z, t) = \frac{E_{x0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z).$$

- Võimsustihedus on suunatud laine levimise suunas.



Näide – tasalaine vees II



Poyntingi vektor kadudega dielektrikus

- Kadudega dielektrikus on elektrivälja tugevus:

$$E_x(z, t) = E_{x0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z).$$

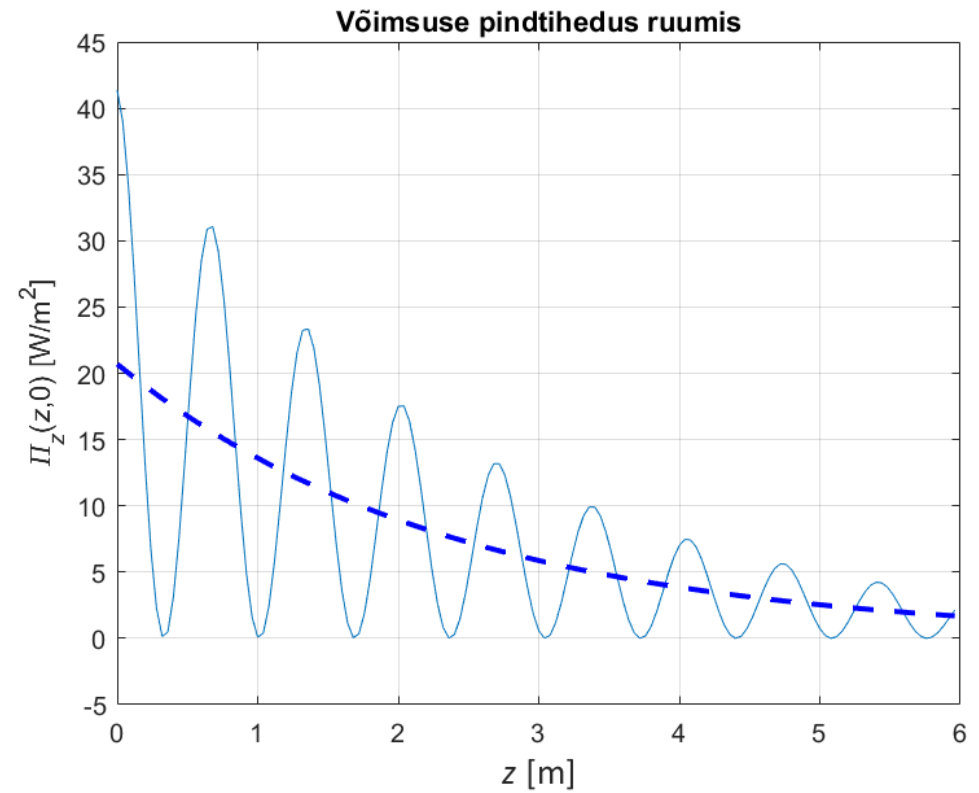
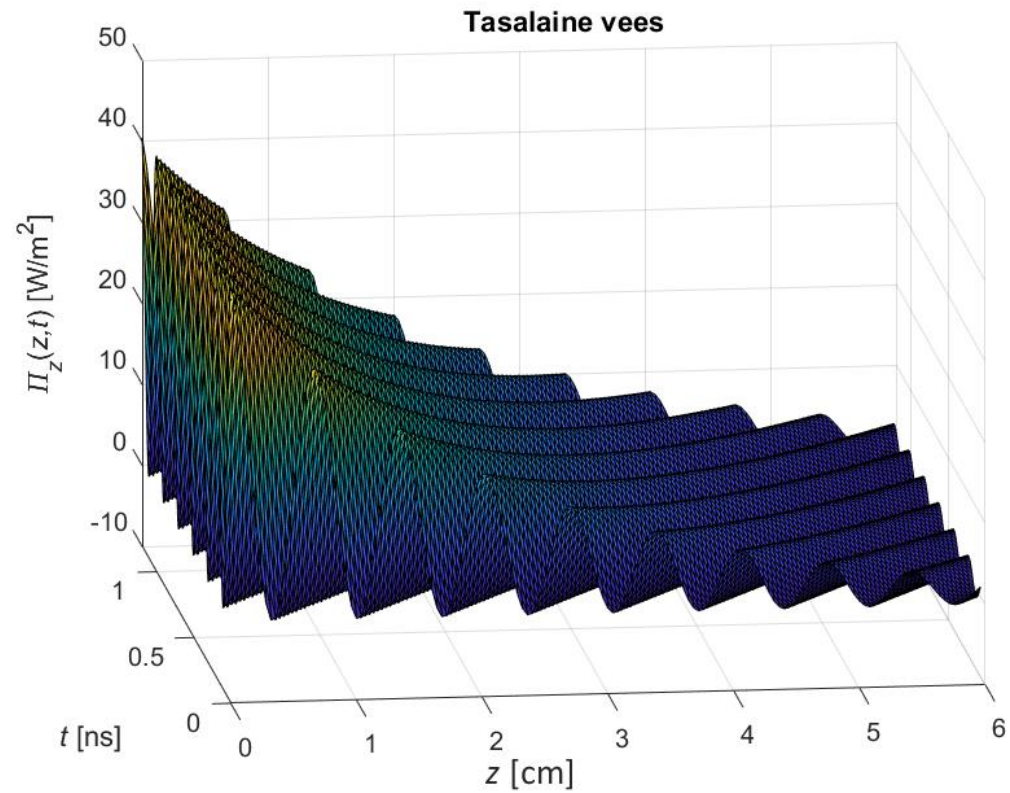
- Karakteristlik impedants, ehk lainetakistus on sellises keskkonnas kompleksne suurus $\eta = |\eta| \angle \Theta_\eta$, seega magnetvälja tugevus:

$$H_y(z, t) = \frac{E_{x0}}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \Theta_\eta).$$

- Poyntingi vektori hetk- ja keskväärtused on vastavalt:

$$\begin{aligned} \Pi_z(z, t) &= \frac{E_{x0}^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} [\cos(2\omega t - 2\beta z - \Theta_\eta) \pm \cos\Theta_\eta]; \\ \overline{\Pi_z} &= \frac{E_{x0}^2}{2|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos\Theta_\eta. \end{aligned}$$

Näide 2 – tasalaine vees II



Poyntingi vektor faasorkujul

- Poyntingi vektori keskväärtus (ajas) on kergesti leitav väljade faasorkujust

$$\overline{\Pi_z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*\}.$$

Lainelevi heades juhtides

- Levitegur

$$\gamma = jk = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon'}}.$$

- Heades juhtides on kaonurga tangens $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon'} \gg 1$ ja metallides loetakse tavaliselt $\varepsilon' = \varepsilon_0$.
- Kuna kaonurga tangens on ühest palju suurem saab leviteguri avaldist lihtsustada järgmisele kujule

$$jk \approx j\omega\sqrt{\mu\varepsilon'}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon'}} = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}.$$

Leviteguri väärtus heades juhtides

- Leides kompleksarvu $-j\omega\mu\sigma$ juure saame leviteguri kujul

$$jk = (1 + j)\sqrt{\pi f \mu \sigma} = \alpha + j\beta.$$

- Näeme, et sumbetegur α ja faasikonstant β on omavahel võrdsed:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi f \mu \sigma}.$$

- Tasalaine võrrand:

$$E_x(z, t) = E_{x0} e^{-\sqrt{\pi f \mu \sigma} z} \cos(\omega t - \sqrt{\pi f \mu \sigma} z).$$

- Juhtivusvoolu tihedus:

$$J_x(z, t) = \sigma E_x(z, t) = \sigma E_{x0} e^{-\sqrt{\pi f \mu \sigma} z} \cos(\omega t - \sqrt{\pi f \mu \sigma} z).$$

Pinnaefekt

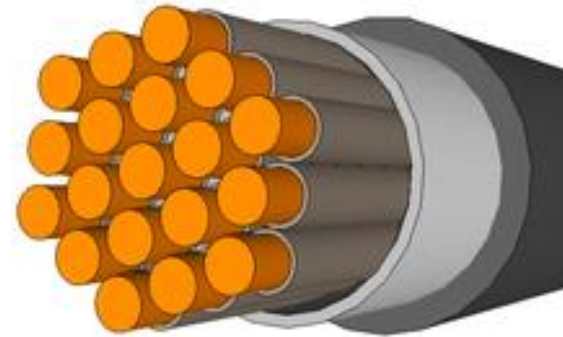
- Nii elektrivälja tugevus, kui ka juhtivusvoolu tihedus kahanevad väärtuseni $e^{-1} \approx 0,368$ sügavusel

$$z = \delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}.$$

- Nähtust ennast nimetatakse **pinnaefektiks** ja suurust δ **pinnakihi paksuseks**.
- Pinnaefekti tagajärjel on juhtme aktiivtakistus samuti sagedusest sõltuv. Sageduse suurenedes väheneb juhtiv pindala ja takistus suureneb võrdeliselt sagedusega.
- Lisaks suurendab juhtmete takistust täiendavalt veel ka **lähedusefekt** (*proximity effect*).

Litz'i juhe

Sama ruumala, ja seega sama massi ning hinna korral, saab juhtivat kogupindala suurendada, kui kasutada ühe juhtme asemel peenikeste traatide kimpu – **Litz'i juh**et (*Litzendraht*).



Pinnaefekt

- Pinnaefekti tõttu väheneb voolutihedus J materjalis sügavuse suurenedes eksponentsiaalselt.
- Saab näidata, et kogu voolutugevus I juhisis on sama suur kui oleks hüpoteetilisel, konstantse voolutihedusega juhul, olukorras kus vool kulgeks ainult kihis paksusega δ .
- Juhul, kui pinnakihi paksus on palju väiksem juhtme diameetrist $2a$ ($\delta \ll 2a$), saab ümarjuhtme takistust leida kui

$$R = \frac{L}{\sigma 2\pi a \delta},$$

kus L on juhtme pikkus.

Lainelevi heades juhtides

- Faasikiirus

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \omega\delta.$$

- Lainepikkus λ on seega

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\mu\delta.$$

- Karakteristlik impedants (lainetakistus):

$$\eta = \frac{1}{\sigma\delta} + j\frac{1}{\sigma\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma\delta} \angle \frac{\pi}{4}.$$

Lainelevi heades juhtides

- Elektrivälja tugevus

$$E_x(z, t) = E_{x0} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} \right).$$

- Magnetvälja tugevus

$$H_y(z, t) = \frac{\sigma \delta E_{x0}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos \left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4} \right).$$

- Poyntingi vektori keskväärtus

$$\overline{\Pi_z} = \frac{\sigma \delta E_{x0}^2}{2\sqrt{2}} e^{-2\frac{z}{\delta}} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sigma \delta E_{x0}^2}{4} e^{-2\frac{z}{\delta}}.$$

- Võimsuse pindtihedus juhi pinnast kaugusel δ on kahanenud 13,5 % selle väärtusest pinnal.

Materjalid

- W.H. Hayt, J.A. Buck. **Engineering Electromagnetics**. 6th ed.
Üheteistkümnes peatükk.



Lisa A – Kompleksarvu ruutjuur

- Kompleksarvu esitamisel eksponentkujul

$$z = |z|e^{j\varphi}.$$

on astmele n tõstmise teostatav kui

$$z^n = |z|^n e^{jn\varphi}.$$

- Ruutjuure leidmine on astendamine suurusega $n = \frac{1}{2}$, seega

$$\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}} e^{j\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{|z|} e^{j\frac{\varphi}{2}}.$$

Lisa A – Kompleksarvu ruutjuur

- Kompleksarvu eksponentkujul kehtivat seost saab rakendada ruutjuure leidmiseks algebralisel kujul kompleksarvust $z = x + yj$:

$$\sqrt{z} = \sqrt{x + yj} = a + bj,$$

kus a ja b on vastavalt ruutjuure real- ja imaginaarosa.

- Tõstes viimase võrrandi mõlemad pooled ruutu saame

$$x + yj = (a + bj)^2 = a^2 - b^2 + 2abj.$$

- Näeme, et tulemuseks on kahe tundmatuga võrrandsüsteem

$$\begin{cases} x = a^2 - b^2 \\ y = 2ab \end{cases}.$$

Lisa A – Kompleksarvu ruutjuur

- Viimast on lihtsam lahendada kui võtame arvesse seose kompleksarvu ja tema ruutjuure moodulite vahel

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a^2 + b^2.$$

- Lahendades süsteemi

$$\begin{cases} x = a^2 - b^2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = a^2 + b^2 \end{cases}$$

liitmisvõtte abil saame kompleksarvu z ruutjuure kujul:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} \pm j \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}.$$

Ruutjuure **imaginaarosa märk on sama mis arvul endal.**