

15. Fresneli võrrandid

IEE1110 – Elektromagnetväljatehnika

Võimsuse levi keskkondade piiril

- Seaduspärad võimsuse ülekande kohta kahe keskkonna piiril on tuletatavad faasorkujul avaldisest

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*\} .$$

- Langeva laine võimsuse keskmine pindtihedus

$$\overline{\Pi_1^+} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{E_{x10}^+ H_{y10}^{+*}\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\eta_1^*}\right\} |E_{x10}^+|^2 .$$

- Sarnaselt on peegeldunud laine korral

$$\overline{\Pi_1^-} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\eta_1^*}\right\} |\Gamma|^2 |E_{x10}^+|^2 .$$

Võimsuse peegeldumine keskkondade piiril

- Peegeldunud- ja langeva võimsuse pindtihedused on omavahel seotud peegeldusteguri mooduli ruudu kaudu

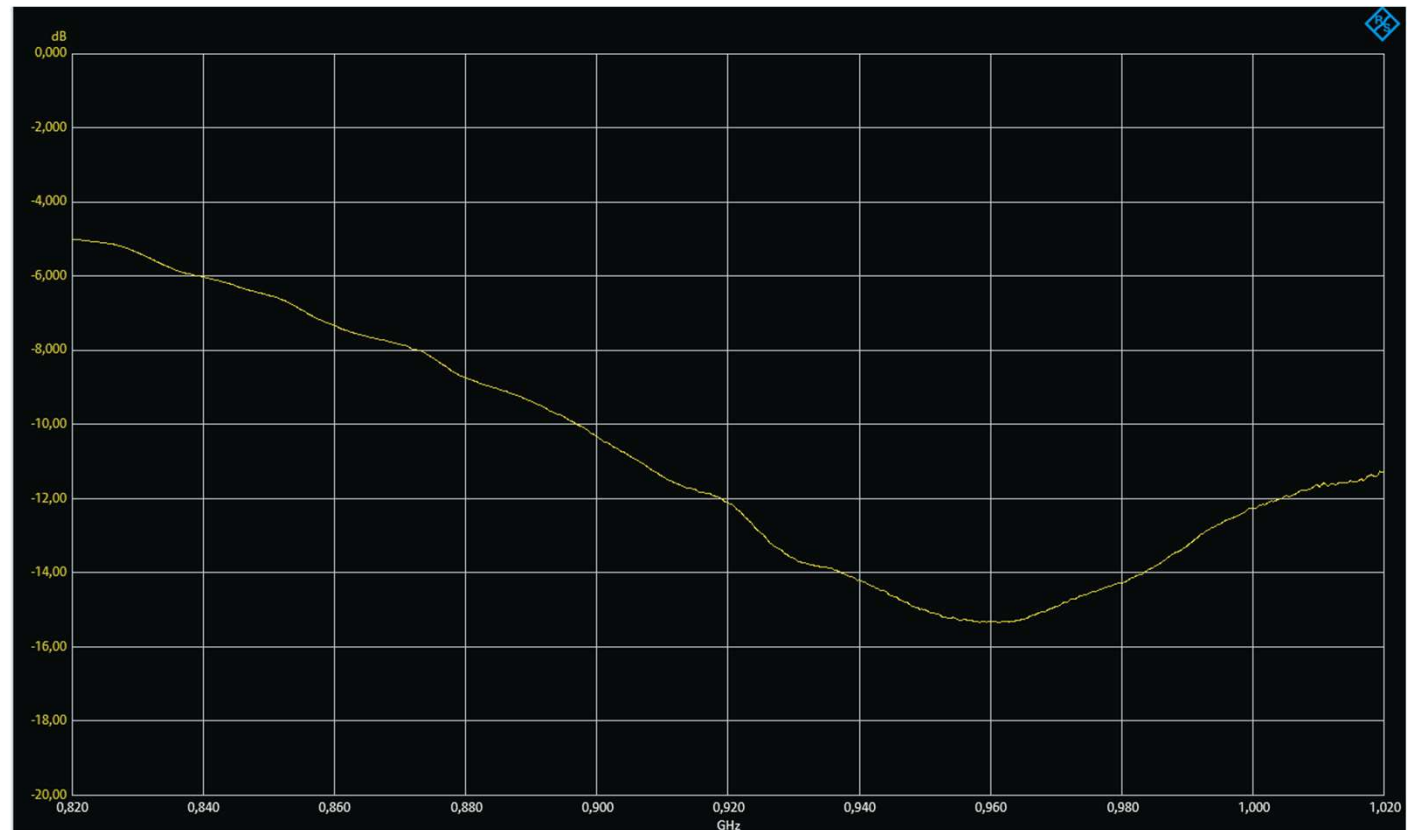
$$\overline{\Pi_1^-} = |\Gamma|^2 \overline{\Pi_1^+} .$$

- Peegeldunud- ja langeva laine võimsuste suhet $|\Gamma|^2$ nimetatakse **peegelduskaoks** RL (*reflection loss*).
- Peegelduskadu väljendatakse tavaliselt logaritmilistes ühikutes

$$RL = 20\log|\Gamma|.$$

Näide - peegelduskadu

- Joonisel on kujutatud dipoolantenni sobituse sagedussõltuvust.
- Ordinaattelg näitab peegelduskao RL suurust detsibellides.



Võimsuse ülekanne keskkondade piiril

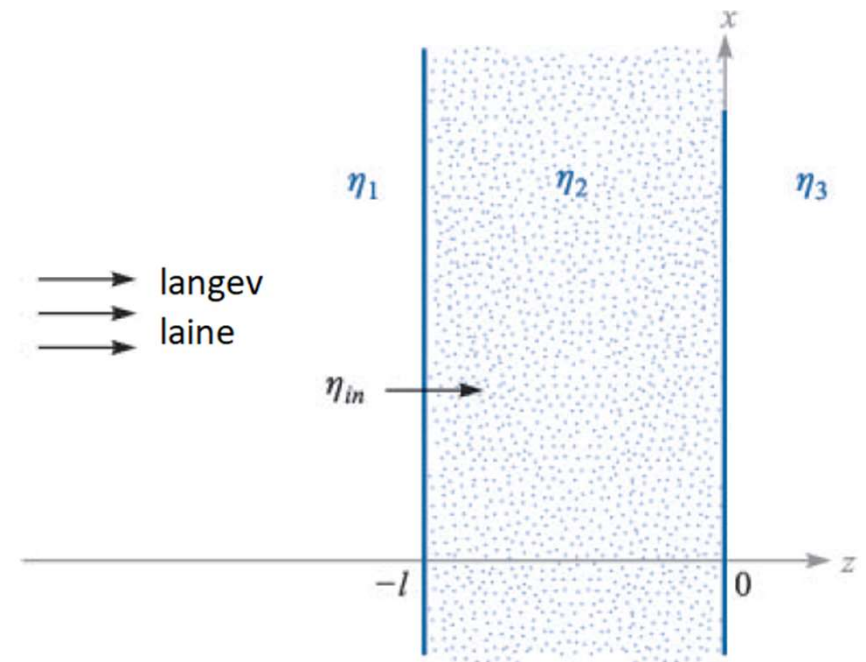
- Energia jäävuse seadusest lähtudes saab leida ülekantud laine võimsuse

$$\overline{\Pi}_2^+ = (1 - |\Gamma|^2) \overline{\Pi}_1^+.$$

- Suurust $ML = (1 - |\Gamma|^2)$ nimetatakse ka **sobituskaoks** (*Mismatch Loss*).

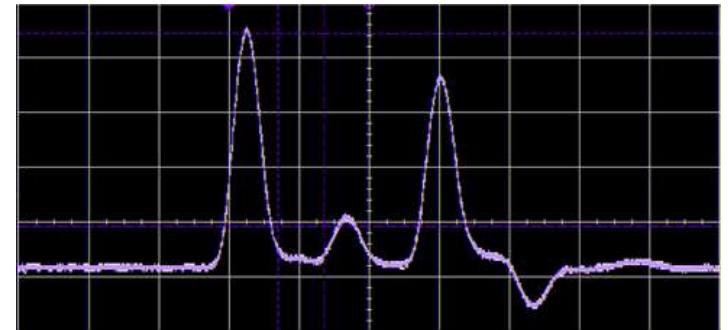
Mitmekordne peegeldus

- Praktikas võib laine järjest läbida mitut erinevat keskkonda.
 - Näiteks valguskiir läbi akna või veega täidetud klaasi.
 - Analoogiliselt võib elektrivool läbida mitut järjestiku ühendatud, erineva karakteristliku impedantsiga, lainejuhti.



Mitmekordne peegeldus

- Osa signaalist peegeldub esimeselt üleminekult tagasi, samas kui ülejäänud osa liigub teises keskkonnas edasi.
- Edasi liikunud lainest peegeldub omakorda osa tagasi teise- ja kolmanda keskkonna piirilt, ülejäänud liigub edasi kolmandasse keskkonda.
- Teises keskkonnas tagasi liikuv laine peegeldub uuesti osaliselt esimese ja teise keskkonna piirilt.
- Tulemuseks on suur hulk, erineva viite ja amplituudiga, peegeldusi.



Mitmekordne peegeldus statsionaarses režiimis

- Statsionaarses režiimis liituvad kõik peegeldused kokku selliselt, et igas keskkonnas tekib üheselt määratud amplituudi ja algfaasiga laine.
- Järgnevalt vaatlemegi statsionaarset olukorda, eeldades lihtsuse mõttes, et kõik kolm keskkonda on kaovabad. Samuti eeldame, et lained on lineaarselt polariseeritud elektrivälja võnkesihiga x-telje sihis.
- Elektrivälja tugevus teises keskkonnas on faasorkujul:

$$E_{xs2} = E_{x20}^+ e^{-j\beta_2 z} + E_{x20}^- e^{j\beta_2 z}.$$

- Viimasega kaasnev magnetvälja tugevus:

$$H_{ys2} = H_{y20}^+ e^{-j\beta_2 z} + H_{y20}^- e^{j\beta_2 z}.$$

Mitmekordne peegeldus statsionaarses režiimis

- Langeva- ja peegelduva laine amplituudid teises keskkonnas on omavahel seotud peegeldusteguriga teise- ja kolmanda keskkonna piiril

$$\Gamma_{23} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2}.$$

- Seega

$$E_{x20}^- = \Gamma_{23} E_{x20}^+.$$

- Seose magnet- ja elektriväljade tugevuste vahel on teatavasti järgnevad:

$$H_{y20}^+ = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2}; \quad H_{y20}^- = -\frac{E_{x20}^-}{\eta_2} = -\frac{\Gamma_{23} E_{x20}^+}{\eta_2}.$$

Mitmekordne peegeldus statsionaarses režiimis

- Defineerime lainetakistuse $\eta_w(z)$ asukohast z sõltuva suhtena elektri- ja magnetvälja tugevuse vahel

$$\eta_w(z) = \frac{E_{xs2}}{H_{ys2}} = \frac{E_{x20}^+ e^{-j\beta_2 z} + E_{x20}^- e^{j\beta_2 z}}{H_{y20}^+ e^{-j\beta_2 z} + H_{y20}^- e^{j\beta_2 z}}.$$

- Kasutades eelmisel slaidil toodud seoseid, saame viimase teisendada kujule

$$\eta_w(z) = \eta_2 \frac{e^{-j\beta_2 z} + \Gamma_{23} e^{j\beta_2 z}}{e^{-j\beta_2 z} - \Gamma_{23} e^{j\beta_2 z}}.$$

- Rakendame saadud tulemuse peal peegeldusteguri Γ_{23} definitsiooni (vt eelmine slaid) ja Euleri valemit.

Mitmekordne peegeldus

- Saab näidata, et

$$\eta_w(z) = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos(\beta_2 z) - j\eta_2 \sin(\beta_2 z)}{\eta_2 \cos(\beta_2 z) - j\eta_3 \sin(\beta_2 z)} .$$

- Seega lainetakistus esimese ja teise keskkonna piiril ($z = -l$):

$$\eta_{in} = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos(\beta_2 l) + j\eta_2 \sin(\beta_2 l)}{\eta_2 \cos(\beta_2 l) + j\eta_3 \sin(\beta_2 l)} .$$

- Mitmekordse peegelduse korral ei ole lainetakistus enam konstantne vaid sõltub asukohast z .
- Peegeldustegur esimese- ja teise keskkonna piiril ($z = -l$): IM3

$$\Gamma = \frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \frac{\eta_{in} - \eta_1}{\eta_{in} + \eta_1} .$$

Mitmekordne peegeldus

- Kui eelmisel slaidil toodud avaldises

$$\eta_w(z) = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos(\beta_2 z) - j\eta_2 \sin(\beta_2 z)}{\eta_2 \cos(\beta_2 z) - j\eta_3 \sin(\beta_2 z)},$$

jagada nii lugeja- kui nimetaja läbi suurusega $\cos(\beta_2 z)$ saab jõuda alternatiivse kirjapildini

$$\eta_w(z) = \eta_2 \frac{\eta_3 - j\eta_2 \tan(\beta_2 z)}{\eta_2 - j\eta_3 \tan(\beta_2 z)}.$$

- Viimasest on lihtne näha, et impedantsi sõltuvus on asukohas perioodiline perioodiga pool lainepikkust $\lambda_2/2$.

Mitmekordne peegeldus kadudega keskkonnas

- Kadudega keskkonnas on lainetakistuse sõltuvus asukohast z kujul

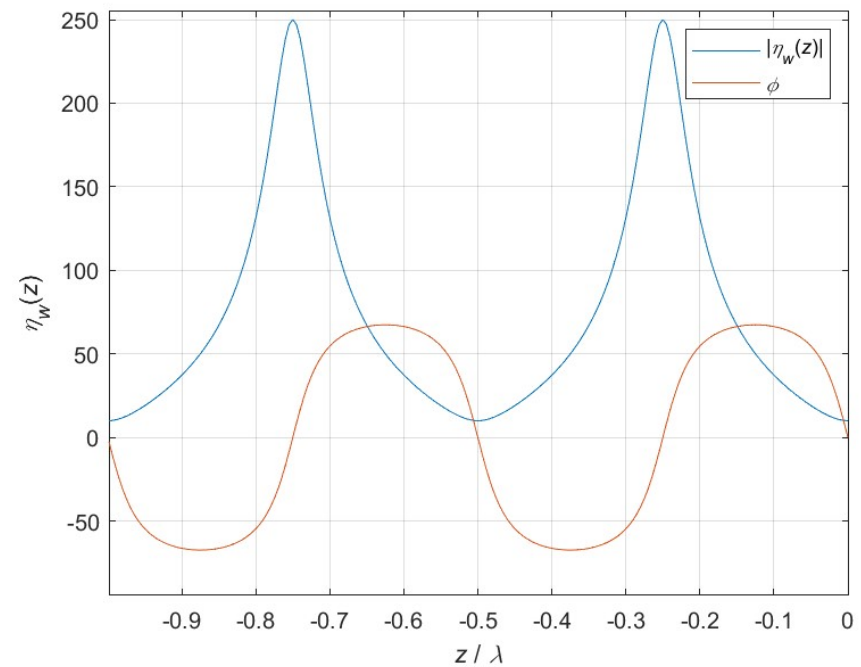
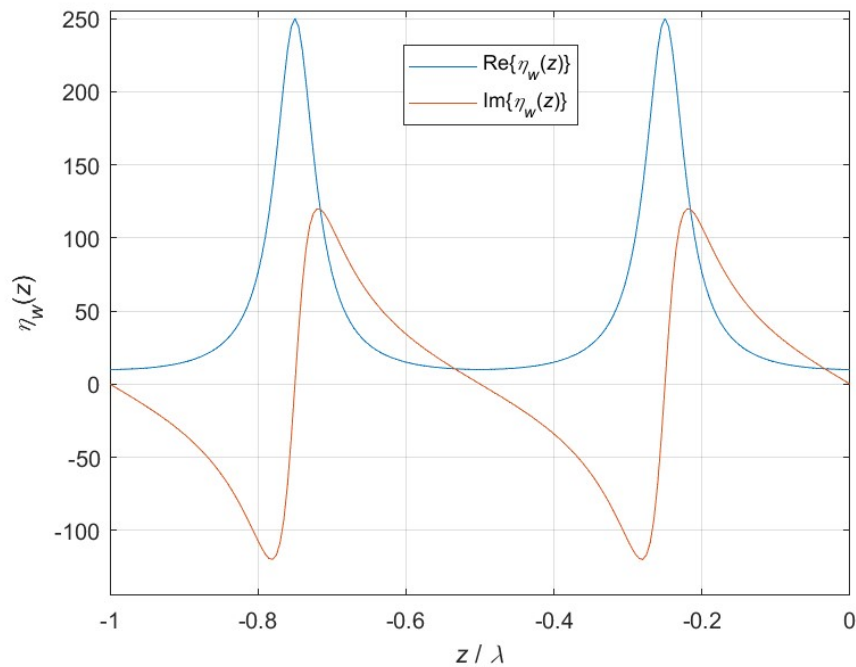
$$\eta_w(z) = \eta_2 \frac{\eta_3 - \eta_2 \tanh(\gamma_2 z)}{\eta_2 - \eta_3 \tanh(\gamma_2 z)}.$$

- Kus hüperboolne tangens on defineeritud kui

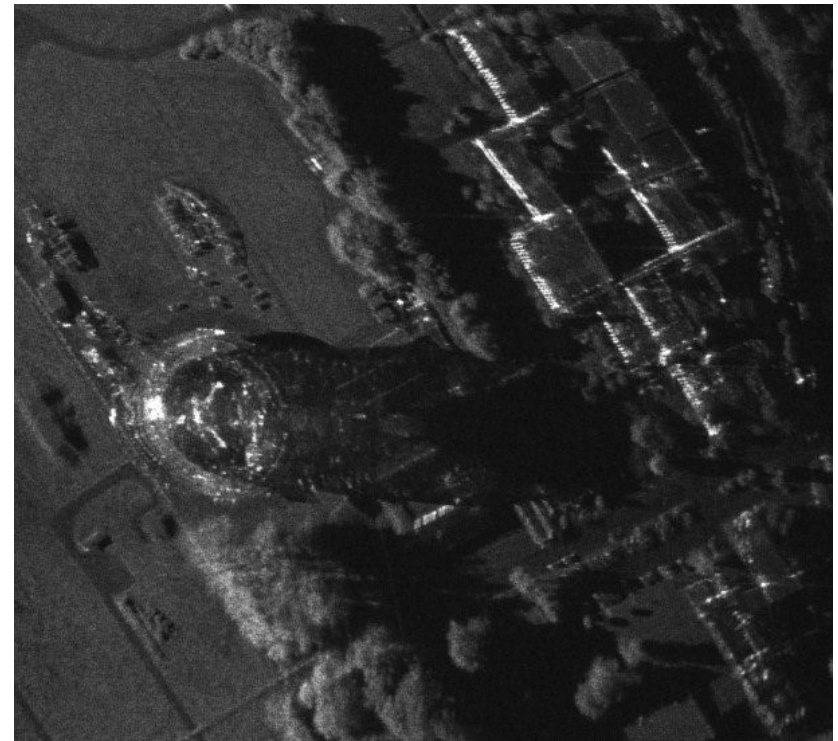
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

Impedantsi sõltuvus peegelduskoha kaugusest

Näide: $\eta_2 = 50 \, \Omega$; $\eta_3 = 10 \, \Omega$



Rakendus – antennikate (*radome*)



Joonis: https://www.researchgate.net/publication/244572994_SARape_-_Synthetic_Aperture_Radar_for_all_weather_penetrating_UAV_Application/figures?lo=1

Peegelduste vastane kate



Joonised: <https://www.eyebuydirect.com/prescription-lens/anti-reflective-coating> ja <https://midopt.com/anti-reflection/>

Laine levi meelevaldses suunas

- Siiani vaatlesime juhtu, kui laine levis z – telje sihis, sellisel juhul oli lainearv kaovabas keskkonnas skalaarne suurus

$$\beta = k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}.$$

- Elektrivälja tugevus faasorkujul oli sellisel juhul

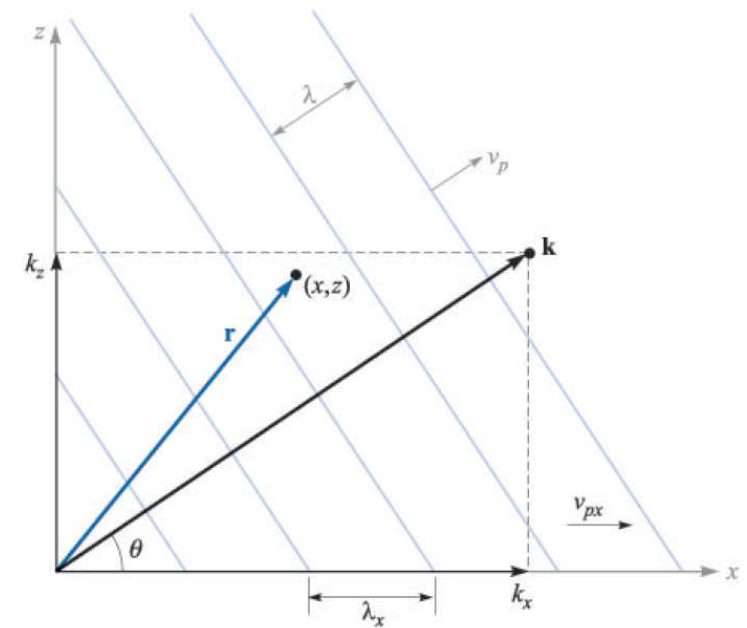
$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_0 e^{-jkz}.$$

- Kuna edaspidi pakub meile huvi lainete käitumine keskkondade piiril juhul, kui langemisnurk on täisnurgast erinev, siis tuleb lainearvu mõistet laiendada juhule, kus laine levib meelevaldses suunas.
- Leviteguri asemel on taolisel juhul **lainevektor** $\mathbf{k}$.

Laine levi meelevaldses suunas

- Lainevektori suund näitab laine levimise suunda ja üldjuhul (isotroopses keskkonnas) ka Poyntingi vektori $\mathbf{\Pi}$ suunda.
- Lainevektori moodul näitab faasinihet ühikpikkuse kohta laine levimise suunas.
- Üldjuhul on lainevektoril $\mathbf{k}$ kolm komponenti. Järgnevate probleemide korral piisab ainult kahest mittenuilisest komponendist, seega

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{a}_x + k_z \mathbf{a}_z.$$



Laine levi meelevaldses suunas

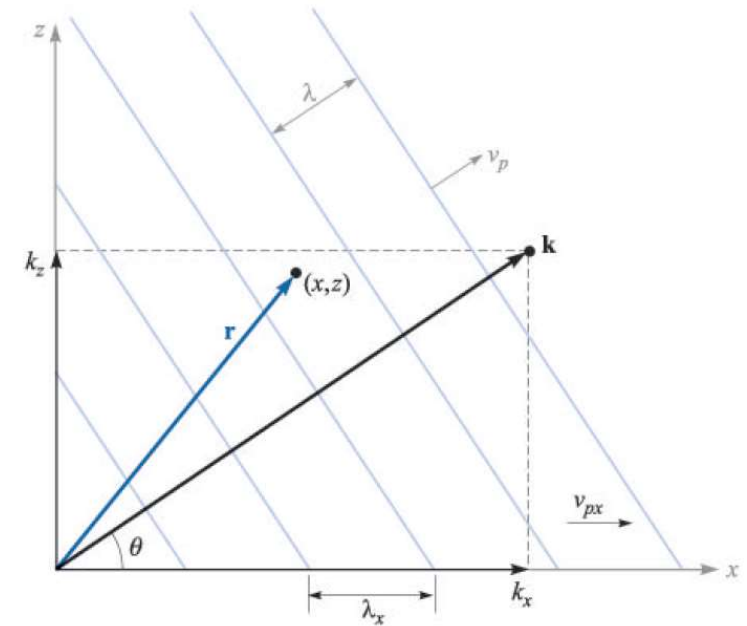
- Elektrivälja tugevus faasorkujul on nüüd

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}.$$

Kus $\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + z\mathbf{a}_z$ on punkt milles elektrivälja tugevust kirjeldatakse.

- Pikemalt välja kirjutades on meie kahe-mõõtmelisel juhul

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_0 e^{-j(k_x x + k_z z)}.$$

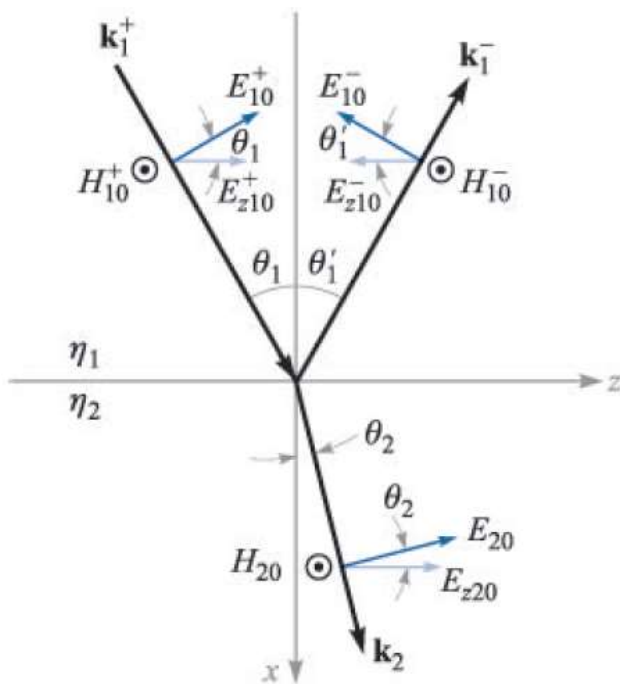


Fresneli võrrandid

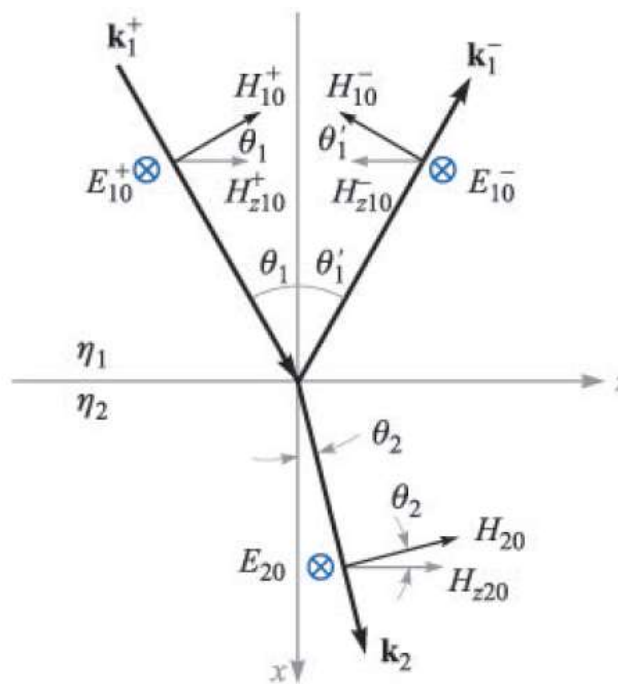
- Augustin-Jean Fresnel (1788- 1827).
- **Fresneli võrrandid** kirjeldavad tasalaine peegeldumist keskkondade piiril suvalise langemisnurga korral.
- Varasemalt vaadeldud täisnurkse langemisnurga puhul on tegemist nende erijuhuga.
- Peegeldus- ja ülekandetegur sõltuvad langeva laine polarisatsioonist.



Fresneli võrrandid



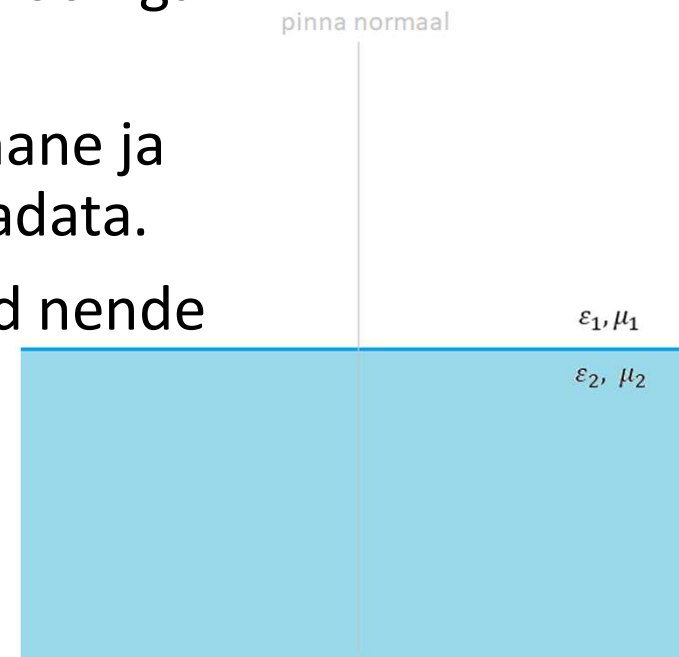
p-polarisatsioon (TM – *Transverse Magnetic*)



s-polarisatsioon (TE – *Transverse Electric*)

Fresneli võrrandid s-polarisatsiooni korral

- Järgnevalt vaatleme lähemalt s – polarisatsiooniga tasalaine käitumist kahe keskkonna piiril.
- Tuletuskäik p-polarisatsiooni korral on sarnane ja selle võib ise tuletada või õpikust järele vaadata.
- Kõik muud polarisatsioonid on vaadeldavad nende kahe kombinatsioonina.

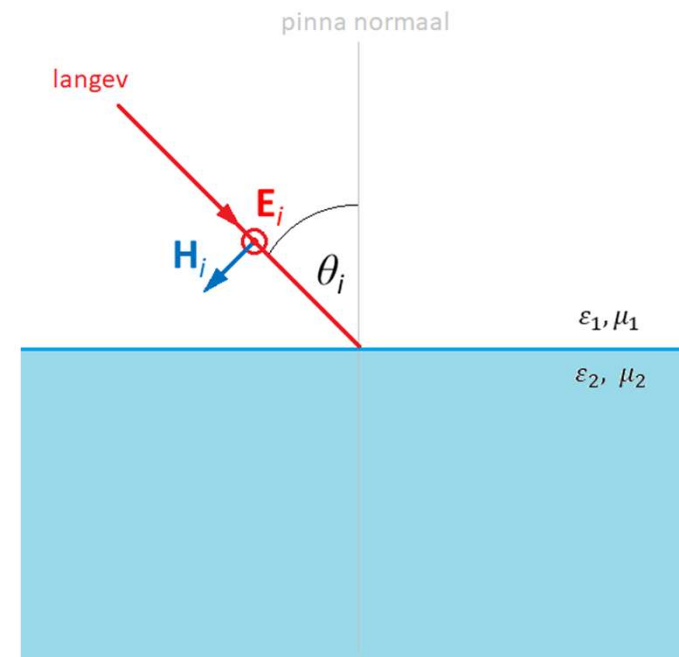


$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}$$

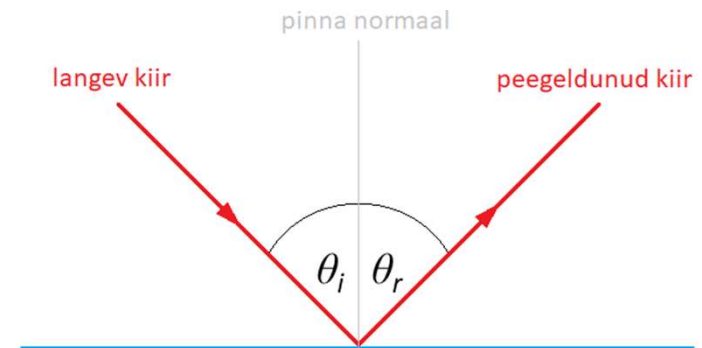
Langev laine

- Langemisnurka θ_i (*angle of incidence*) mõõdetakse lainevektori $\mathbf{k}$ ja pinna normaali vahel.
- Vaadeldava s-polarisatsiooni (TE) korral on elektrivälja polarisatsioon paralleelne piirpinnaga. Teisisõnu on elektriväljal $\mathbf{E}_i$ ainult tangentsiaalne komponent.
- Magnetvälja tugevusel $\mathbf{H}_i$ on nüüd nii normaalne- kui ka tangentsiaalne komponent.



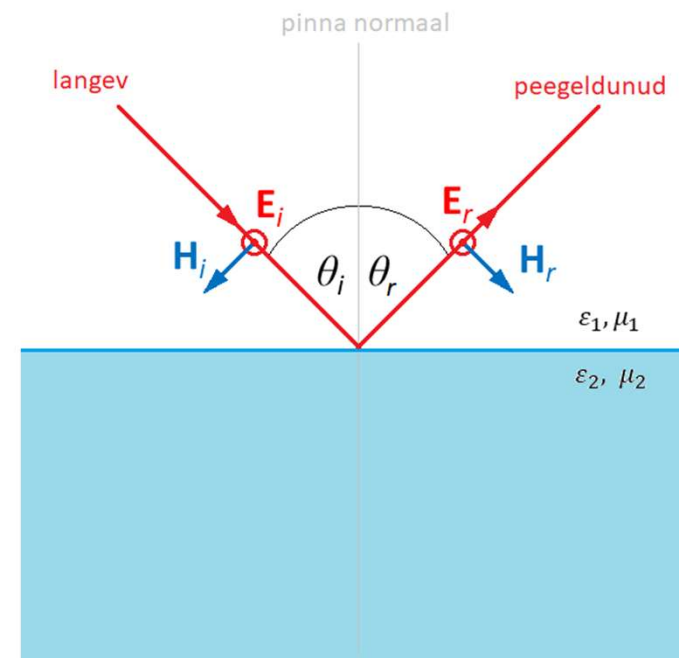
Peegeldumisseadused

- Langeva ja peegeldunud laine levimissuunad on lahutuspinna normaaliga samal tasandil.
- Seda tasandit nimetatakse ka **langemistasandiks** (*plane of incidence*).
- Peegeldumisnurk θ_r on võrde langemisnurgaga θ_i
$$\theta_r = \theta_i.$$



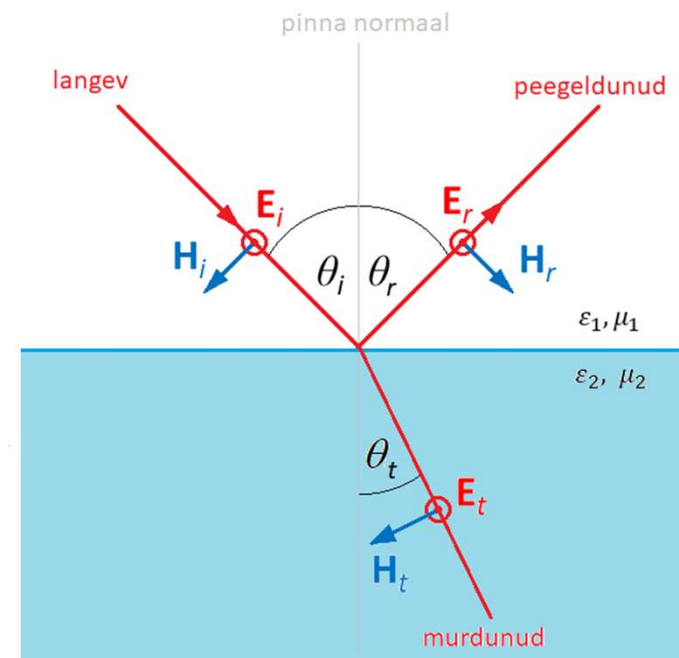
Peegeldunud laine

- Peegeldumisseaduse kohaselt on langemis- ja peegeldumisnurgad alati võrdsed. Ka viimast mõõdetakse pinnanormaali suhtes.
- Elektrivälja komponent on peegeldunud lainel samuti lahutuspinnaga paralleelne ja samasuunaline kui langeval lainel.
- Magnetvälja tangentsiaalne komponent muudab, langeva laine oma suhtes, peegeldudes suunda.



Edasikandunud laine

- Optikas nimetatakse edasikandunud lainet enamasti **murdunud laine**ks (*refracted wave*).
- Ka murdunud laine korral jääb elektrivälja võnketasand samaks kui langeval lainel.
- Järgnevalt eeldame, et voolu pindtihedus kahe keskkonna piiril on null: $\mathbf{K} = 0$. Viimane eeldus on praktikas üldjuhul igati õigustatud.



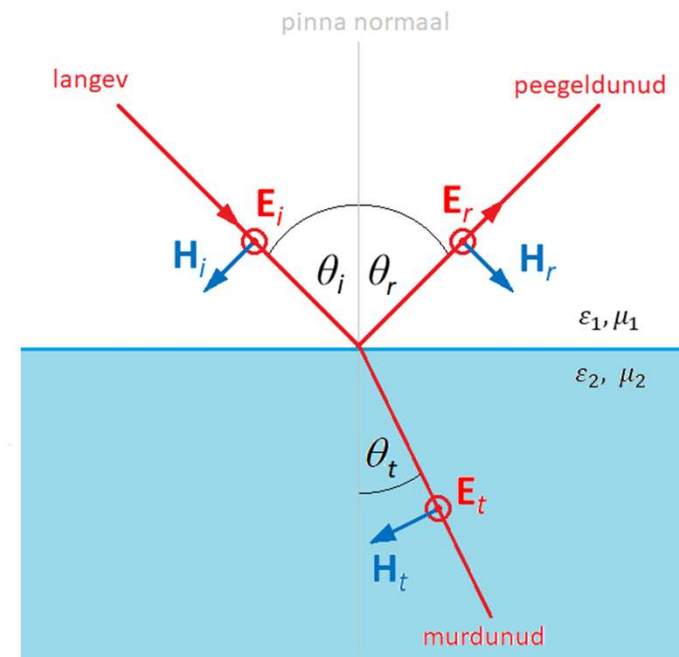
Piirtingimused elektrivälja jaoks

- Kuna antud juhul on kõik elektrivälja komponendid eralduspinna suhtes tangentsiaalsed, siis saame kasutada piirtingimusi elektriväljade tangentsiaalsete komponentide kohta:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}.$$

- Viimasest järeldub, et antud juhul on

$$E_i + E_r = E_t.$$



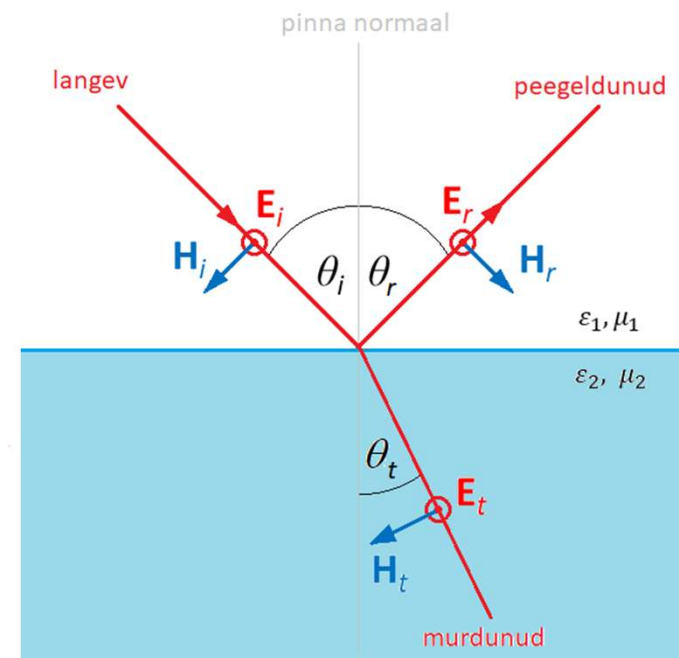
Piirtingimused magnetvälja jaoks

- Meie eeldusel, et voolu pindtihedus puutepinnal on null, on ka magnetväljade tangentsiaal-komponendid keskkondade piiril omavahel võrdsed:

$$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}.$$

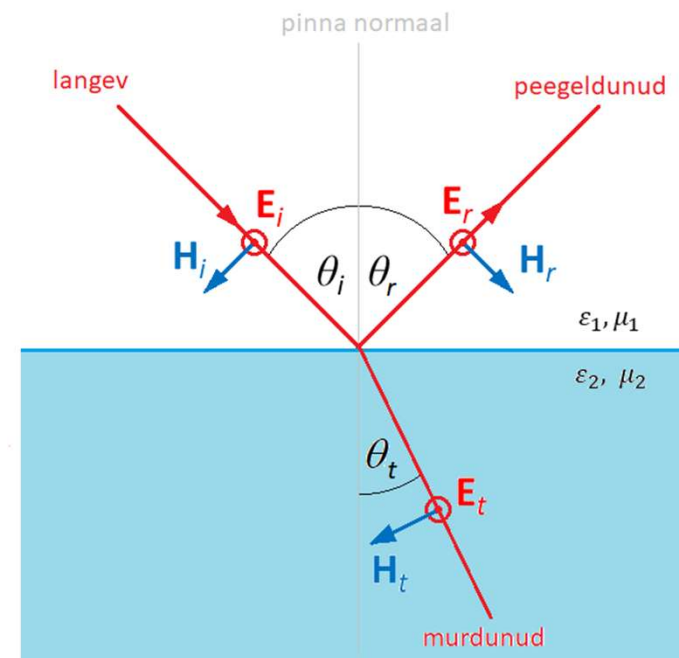
- Magnetvälja tangentsiaalkomponent s-polarisatsiooni korral on

$$H_{\tau} = |\mathbf{H}| \cos \theta.$$



Piirtingimused magnetvälja jaoks

- Kahest viimasest seosest saame
$$\cos \theta_i (|\mathbf{H}_i| - |\mathbf{H}_r|) = \cos \theta_t |\mathbf{H}_t|.$$
- Saadud avaldises on arvesse võetud, et peegeldumisseaduse kohaselt on $\theta_r = \theta_i$.



Fresneli võrrandid s-polarisatsiooni korral

- Järgnevalt võtame arvesse seose elektri- ja magnetvälja amplituudide vahel vastavate keskkondade lainetakistuste kaudu

$$|\mathbf{H}| = \frac{|\mathbf{E}|}{\eta}.$$

- Tulemuseks on võrrandsüsteem

$$\begin{cases} E_i + E_r = E_t \\ \frac{\cos \theta_i}{\eta_1} (E_i - E_r) = \frac{\cos \theta_t}{\eta_1} E_t \end{cases}.$$

- Võrrandsüsteemi lahendiks ongi peegeldus- ja ülekandetegurid s - polarisatsiooni korral.

Peegeldustegur

- Peegeldustegur s-polarisatsiooni korral:

$$\Gamma_s = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}.$$

- Tulemust saab kirjutada kompaktsemal kujul

$$\Gamma_s = \frac{\eta_{2s} - \eta_{1s}}{\eta_{2s} + \eta_{1s}},$$

kus η_{1s} ja η_{2s} on vastavalt keskkondade efektiivsed lainetakistused s-polarisatsiooni korral langemisnurga θ_i ja sellel vastava murdumisnurga θ_t juures:

$$\eta_{1s} = \frac{\eta_1}{\cos \theta_i}; \quad \eta_{2s} = \frac{\eta_2}{\cos \theta_t}.$$

Ülekandetegur

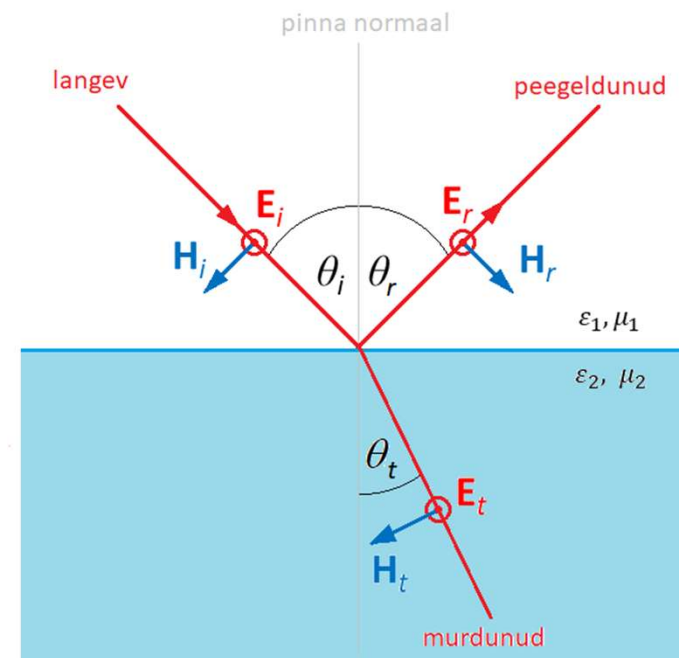
- Ülekandetegur, s-polarisatsiooni korral, väljendatuna keskkondade efektiivsete lainetakistuste kaudu on

$$\tau_s = \frac{2\eta_{2s}}{\eta_{1s} + \eta_{2s}}.$$

- Näeme, et meile esialgu veel tundmatu väärtusega murdumisnurk θ_t on sees nii peegeldus- kui ülekandeteguri avaldises.
- Teiseks on meil jäänud veel käsitlemata magnetväljade normaalkomponendid H_n .

Piirtingimused magnetvälja jaoks

- Piirtingimused magnetväljade normaalkomponentide jaoks on
$$H_{n2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n1}.$$
- Viimased on omakorda leitavad kui
$$H_n = |\mathbf{H}| \sin \theta.$$
- Rõhutame, et normaalkomponendi suund jääb peegeldumisel endiseks.



Piirtingimused magnetvälja jaoks

- Ülaltoodust järeldub, et

$$\mu_1 \sin \theta_i (|\mathbf{H}_i| + |\mathbf{H}_r|) = \mu_2 \sin \theta_t |\mathbf{H}_t|.$$

- Tuttavast seosest elektri- ja magnetvälja amplituudide vahel vastavate keskkondade lainetakistuste kaudu

$$|\mathbf{H}| = \frac{|\mathbf{E}|}{\eta},$$

saame

$$\mu_1 \frac{\sin \theta_i}{\eta_1} (E_i + E_r) = \mu_2 \frac{\sin \theta_t}{\eta_2} E_t.$$

- Meenutame, et elektriväljade korral kehtis: $E_i + E_r = E_t$.

Murdumisseadus

- Piiritingimuse elektriväljade kohta arvesse võttes lihtsustub viimane avaldis kujule

$$\mu_1 \frac{\sin \theta_i}{\eta_1} = \mu_2 \frac{\sin \theta_t}{\eta_2}.$$

- Meenutame nüüd, et keskkonna karakteristik impedants on

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \text{ seega on } \frac{\mu}{\eta} = \sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{1}{v} = \frac{n}{c},$$

kus v on laine faasikiirus keskkonnas ja n on sellesama keskkonna murdumisnäitaja.

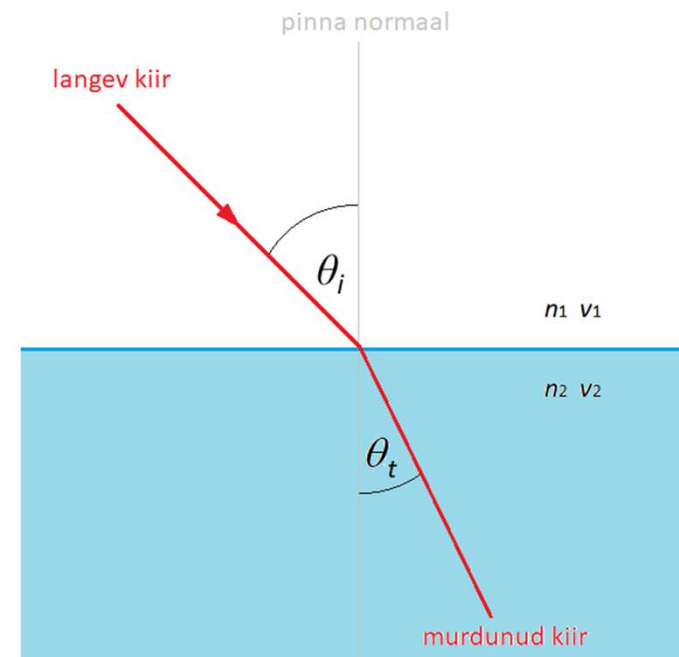
Snelli seadus

- Laine üleminekul ühest keskkonnast teise toimub **murdamine**, ehk leviteekonna suuna muutus.

- Murdumist kirjeldab **Snelli seadus**

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2}.$$

- Kus θ_i ja θ_t on vastavalt langemis- ja murdamisnurgad ning v_1 , v_2 , n_1 ja n_2 on vastavalt laine levikiirused ja keskkondade murdamisnäitajad.



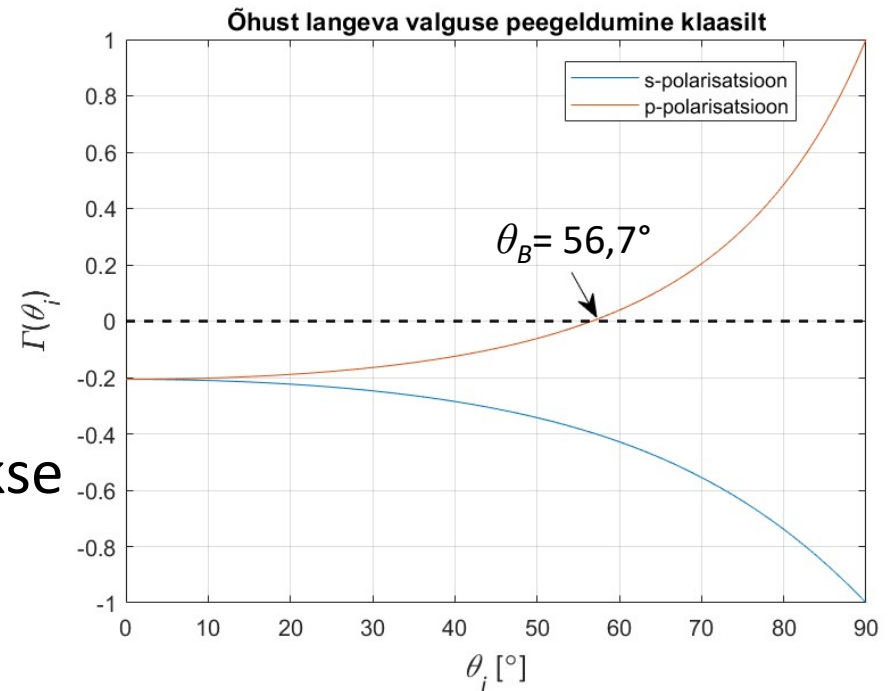
Näide – valguse peegeldumine klaasilt

- Aknaklaasi murdumisnäitaja $n_2 = 1,52$; õhu oma vastavalt $n_1 = 1$.
- Näeme, et peegeldustegur sõltub polarisatsioonist. Nurga

$$\theta_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}$$

juures on p-polarisatsiooniga laine peegeldustegur null. Seda nurka nimetatakse **Brewsteri nurgaks**.

- Brewsteri nurga all peegeldunud laine on täielikult lineaarselt polariseeritud.



Brewsteri nurk - näide

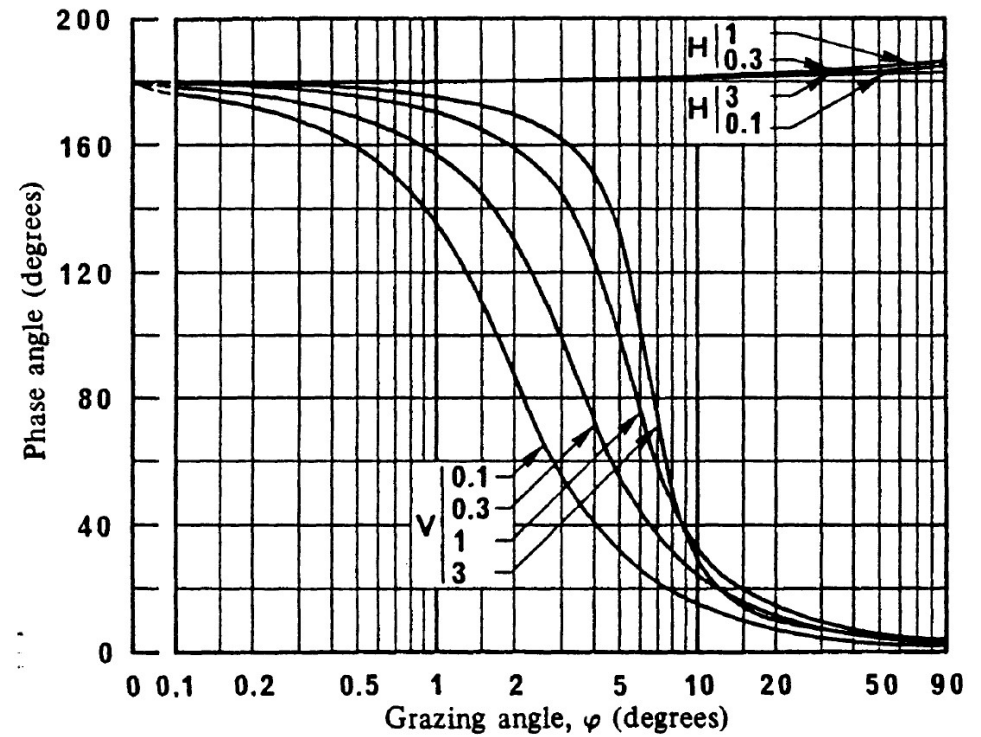
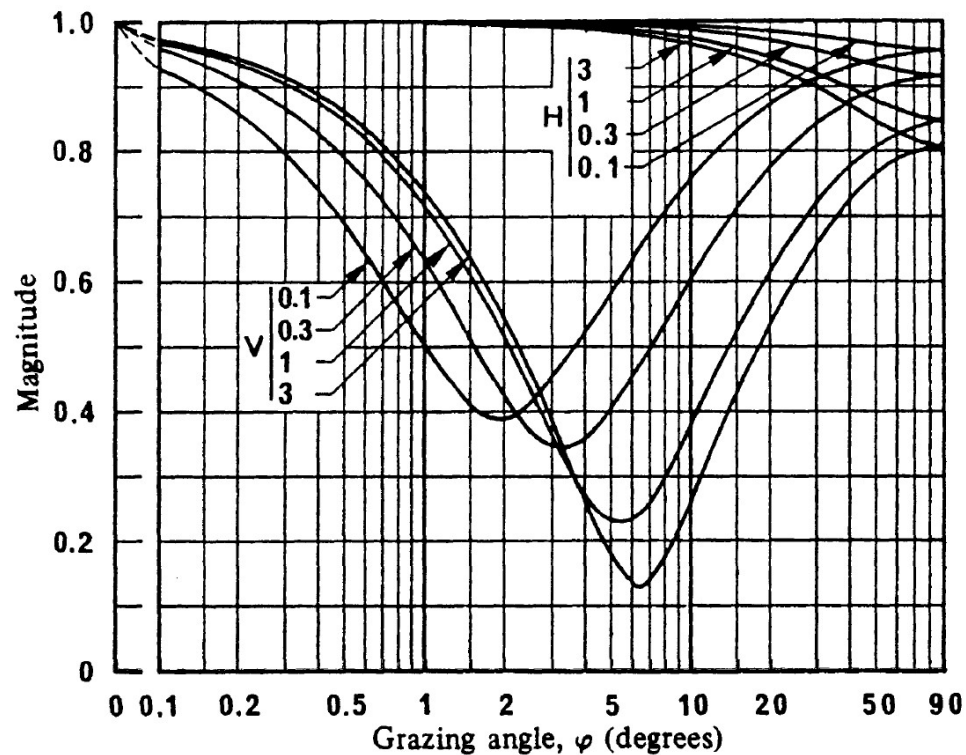


Brewsteri nurk - näide

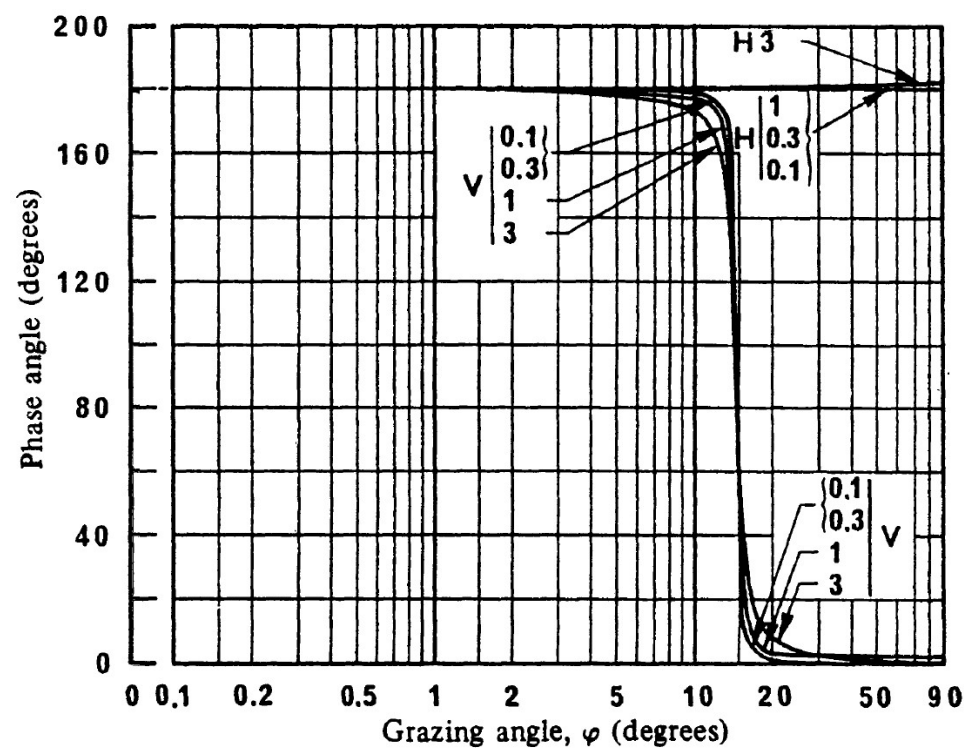
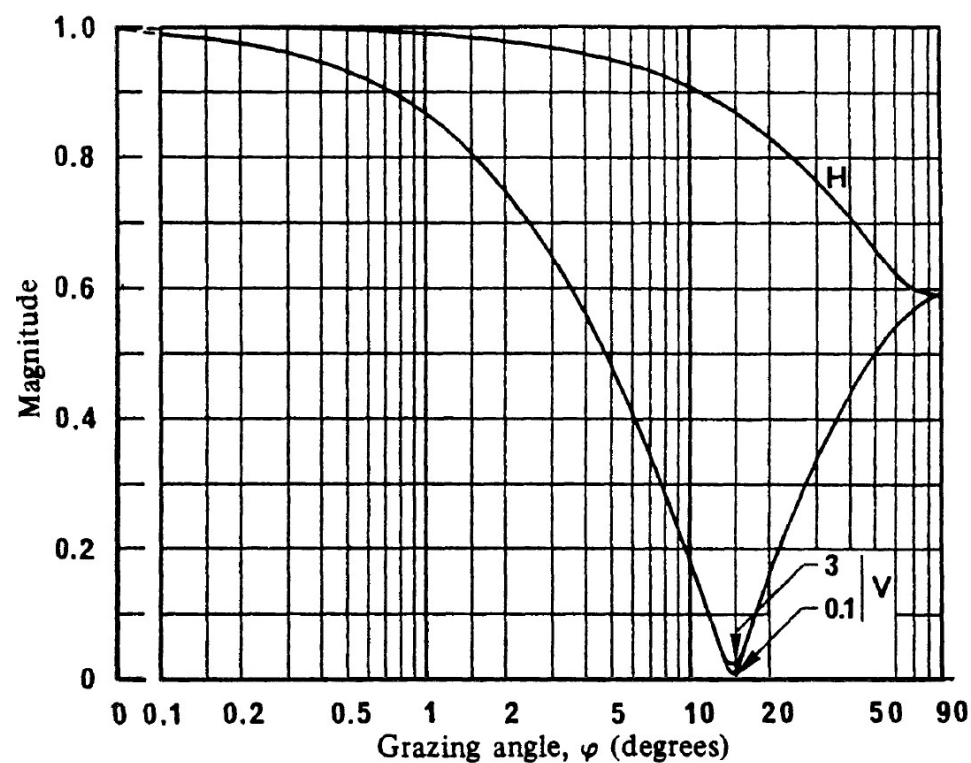


Foto: <https://www.diyphotography.net/use-polarized-lighting-techniques-capture-cool-color-effects/>

Näide - Merevee peegeldustegur



Näide - Poolkuiva pinnase peegeldustegur



Materjalid

- W.H. Hayt, J.A. Buck. **Engineering Electromagnetics**. 6th ed.
Kaheteistkümnes peatükk.

