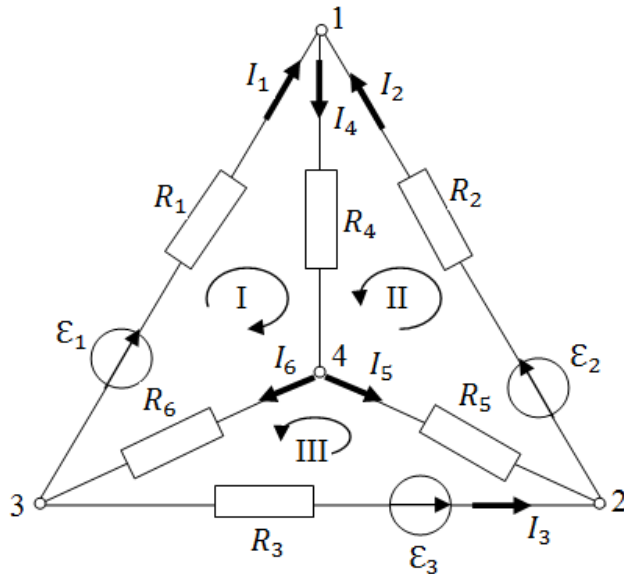


KODUTÖÖ NR 1. ALALISVOOLU LINEAARAHELATE ARVUTAMINE

Arvutuste näide

On antud: $\mathcal{E}_1 = 100 \text{ V}$; $\mathcal{E}_2 = 30 \text{ V}$; $\mathcal{E}_3 = 10 \text{ V}$; $R_1 = R_2 = 10 \Omega$; $R_3 = 6 \Omega$;

$R_5 = 15 \Omega$; $R_6 = 1 \Omega$; $R_4 = 5 \Omega$



Leida voolud kõikides skeemi ahelates Kirchhoffi seaduste järgi. Saadud võrrand lahendada vastava programmi abil.

Kirchoffi I seadus. Kõikide sisenevate ja väljuvate voolude summa on võrdne nulliga (sisenevad voolud „+” märgiga, väljuvad voolud „-”, märgiga). $\sum_{i=1}^N I_i = 0$

Kirchoffi II seadus. Pingelangude summa kontuuris on võrdne elektromotoorjõudude summaga (kui e.m.j ei ole kontuuris, siis pingelangude summa pannakse võrduma nulliga).

$$\sum_{i=1}^N I_i R_i = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i$$

Antud ahelas on 4 sõlme, ehk rakendame Kirchhoffi I seaduse nendest kolmele (ehk n-1 sõlmede jaoks). Kirchhoffi II seaduse rakendame sõltumatute kontuuride jaoks.

Esimene samm: valime suvaliselt voolude suunas kõikides ahelates ning kontuuride ringkäigusuunad. E.m.j. suunad on juba antud.

1 sõlm: $I_1 + I_2 - I_4 = 0$

2 sõlm: $-I_2 + I_3 - I_5 = 0$

3 sõlm: $-I_1 - I_3 + I_6 = 0$

I kontuur: $I_1 R_1 + I_4 R_4 + I_6 R_6 = \mathcal{E}_1$

II kontuur: $I_2 R_2 + I_4 R_4 + I_5 R_5 = \mathcal{E}_2$

III kontuur: $I_3 R_3 - I_5 R_5 + I_6 R_6 = \mathcal{E}_3$

Kui voolu suund ühtib ringkäigusuunaga, siis IR on „+” märgiga, kui ei ühti, siis „-” märgiga. Sama reeale kehtib ka e.m.j kohta.

Saame võrrandisüsteemi, mida saab lahendada suvalise programmiga:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_4 = 0 \\ -I_2 + I_3 - I_5 = 0 \\ -I_1 - I_3 + I_6 = 0 \\ 10I_1 + 5I_4 + I_6 = 100 \\ 10I_2 + 5I_4 + 15I_5 = 30 \\ 6I_3 - 15I_5 + I_6 = 10 \end{cases}$$

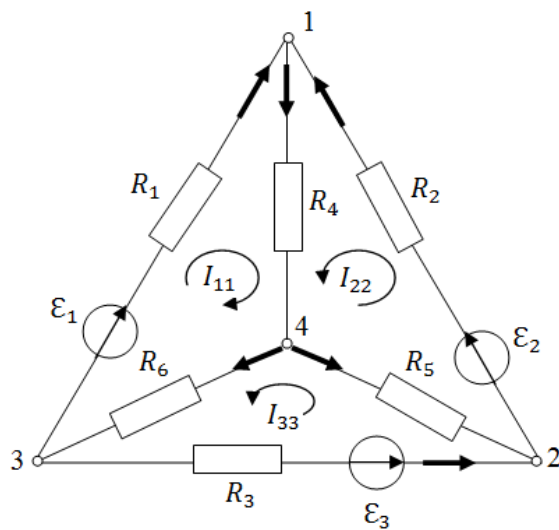
Lahendades antud süsteemi, saame:

$$I_1 = 6,212 \text{ A} \qquad I_3 = 0,225 \text{ A} \qquad I_5 = -0,148 \text{ A}$$

$$I_2 = 0,077 \text{ A} \qquad I_4 = 6,289 \text{ A} \qquad I_6 = 6,437 \text{ A}$$

Kui voolu väärtus tuli „-”, märgiga, siis reaalne voolu suund on vastassuunaline.

Leida voolud kõikides skeemi ahelates kontuurvoolude meetodiga. Võrrandisüsteemi lahendamiseks võib samuti kasutada vastava programmi.



Tähistame, et kontuuris, nt 143 läbib üks vool I_{11} joonisel näidatud suunas. Kontuuris 124 kulgeb vool I_{22} ning kontuuris 342 vool I_{33} . Voolude suunad valitakse suvaliselt. Kasutame Kirchhoffi II seaduse. Kasutame sama reegli, nagu eelmises näides toodud, kuid tuleb üks lisa juurde.

Vt, nt 143 kontuuri. Kontuuris on olemas takisti R_4 , mida läbib nii vool I_{11} , kui ka vool I_{22} . Voolude suunad ühtivad, siis kasutame „+” märgi. Samuti samas kontuuris on olemas takisti R_6 , mida läbib nii vool I_{11} kui ka vool I_{33} , need voolud on omavahel vastassuunalised, siis

kasutame „-“, märgi. Sama skeem käib ka teiste kontuuride kohta. Seega saame kolm võrrandit:

$$I_{11}(R_1 + R_4 + R_6) + I_{22}R_4 + I_{33}R_6 = E_1$$

$$I_{22}(R_2 + R_4 + R_5) + I_{11}R_4 - I_{33}R_5 = E_2$$

$$I_{33}(R_3 + R_5 + R_6) + I_{11}R_6 - I_{22}R_5 = E_3$$

Lahendades antud võrrandisüsteemi, saame:

$$I_{11} = 6,213 \text{ A}$$

$$I_{22} = 0,077 \text{ A}$$

$$I_{33} = 0,225 \text{ A}$$

Leiame voolud antud skeemis järgmiselt:

Kuna takistid R_1 , R_2 ja R_3 on seotud ainult ühe kontuuriga, siis selge, et:

$$I_{11} = I_1 = 6,213 \text{ A}$$

$$I_{22} = I_2 = 0,077 \text{ A}$$

$$I_{33} = I_3 = 0,225 \text{ A}$$

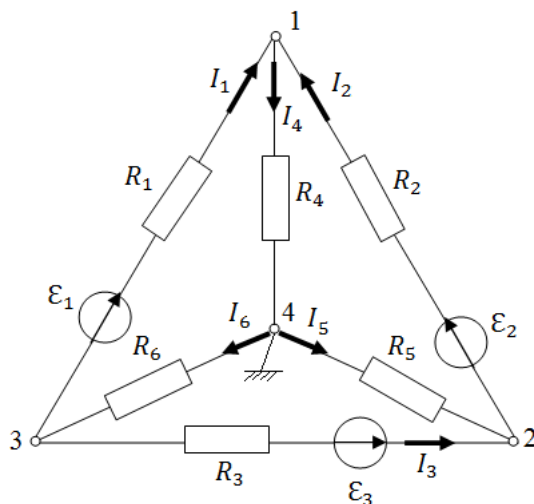
$$I_4 = I_{11} + I_{22} = 6,213 + 0,077 = 6,290 \text{ A}$$

$$I_5 = I_{22} - I_{33} = 0,077 - 0,225 = -0,148 \text{ A}$$

$$I_6 = I_{33} + I_{11} = 0,225 + 6,213 = 6,438 \text{ A}$$

Leida voolud kõikides skeemi ahelates sõlmpotentsiaalide meetodiga.

Antud meetodi olemus seisneb selles, et arvutused tehakse $n-1$ sõlmede jaoks, aga viimane sõlm (ehk siis 4-s, vt joonis) maandatakse.



Meetodi reegel: Voolude summa iga sõlme jaoks on võrdne allikate voolude summaga. Antud juhul $I = \varphi \cdot 1/R$, kus $\sigma = 1/R$ – juhtivus.

Alguses määratakse kõikide sõlmede potentsiaalid järgmise valemi abil:

$$\varphi_1 \sigma_{11} - \varphi_2 \sigma_{12} - \varphi_3 \sigma_{13} - \dots - \varphi_s \sigma_{1s} - \dots - \varphi_n \sigma_{1n} = \sum_1 \varepsilon \sigma$$

$$\varphi_2 \sigma_{22} - \varphi_1 \sigma_{21} - \varphi_3 \sigma_{23} - \dots - \varphi_s \sigma_{2s} - \dots - \varphi_n \sigma_{2n} = \sum_2 \varepsilon \sigma$$

$$\varphi_3\sigma_{33} - \varphi_2\sigma_{32} - \varphi_1\sigma_{31} - \dots - \varphi_s\sigma_{3s} - \dots - \varphi_n\sigma_{3n} = \sum_3 \mathcal{E}\sigma$$

$$\varphi_n\sigma_{nn} - \varphi_1\sigma_{n1} - \varphi_2\sigma_{n2} - \dots - \varphi_s\sigma_{ns} = \sum_n \mathcal{E}\sigma$$

Siin: σ_{ss} - juhtivuste summa, mis on seotud sõlmega s ; σ_{sk} - juhtivuste summa, mis ühendavad antud sõlme sõlmega k ; $\sum_n \mathcal{E}\sigma$ - e.m.j ja selle juhtivuse korrutise summa: „+” märk on nendel juhtivustel, kus e.m.j mõjub sõlme suunas ning „-”, märk, kui e.m.j mõjub vastupidises suunas.

$$\varphi_1(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4) - \varphi_2 \cdot \sigma_2 - \varphi_3 \cdot \sigma_1 = \mathcal{E}_1 \cdot \sigma_1 + \mathcal{E}_2 \cdot \sigma_2$$

$$\varphi_2(\sigma_5 + \sigma_2 + \sigma_3) - \varphi_1 \cdot \sigma_2 - \varphi_3 \cdot \sigma_3 = \mathcal{E}_3 \cdot \sigma_3 - \mathcal{E}_2 \cdot \sigma_2$$

$$\varphi_3(\sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_6) - \varphi_1 \cdot \sigma_1 - \varphi_2 \cdot \sigma_3 = -\mathcal{E}_1 \cdot \sigma_1 - \mathcal{E}_3 \cdot \sigma_3$$

Lahendades antud võrrandisüsteemi, saame järgmsed lahendid:

$$\varphi_1 = 31,446 \text{ V}$$

$$\varphi_2 = 2,214 \text{ V}$$

$$\varphi_3 = -6,437 \text{ V}$$

Teades sõlmpunktide potentsiaale, leiame voolud kõikides ahelates (ahelat vaatame tavaliselt voolu suunas):

$$\varphi_2 - I_2 R_2 + \mathcal{E}_2 = \varphi_1 \rightarrow I_2 = 0,076 \text{ A}$$

$$\varphi_3 - I_1 R_1 + \mathcal{E}_1 = \varphi_1 \rightarrow I_1 = 6,211 \text{ A}$$

$$\varphi_4 - I_6 R_6 = \varphi_3 \rightarrow I_6 = 6,437 \text{ A}$$

$$\varphi_3 - I_3 R_3 + \mathcal{E}_3 = \varphi_2 \rightarrow I_3 = 0,225 \text{ A}$$

$$\varphi_4 - I_5 R_5 = \varphi_2 \rightarrow I_5 = 0,147 \text{ A}$$

$$\varphi_1 - I_4 R_4 = \varphi_4 \rightarrow I_4 = 6,290 \text{ A}$$

Arvutuste tulemused punktides 1-3 esitada tabelina ning võrrelda neid omavahel.

Voolud	$I_1, \text{ A}$	$I_2, \text{ A}$	$I_3, \text{ A}$	$I_4, \text{ A}$	$I_5, \text{ A}$	$I_6, \text{ A}$
Kirchoffi reeglite järgi	6,212	0,077	0,225	6,289	-0,148	6,437
Kontuurvoolude meetod	6,213	0,077	0,225	6,290	-0,148	6,438
Sõlmpotentsiaalide metod	6,211	0,076	0,225	6,290	0,147	6,437

Koostada võimsuste bilansi võrrand; arvutada sel korral eraldi alikate koguvõimsuse ja tarbijate peal eralduva koguvõimsuse.

Antud lahendust kasutatakse voolude arvutamise õigsuse kontrolliks. Energia jäävuse seaduse kohaselt: soojushulk, mis eraldub takistite peal ajaühikus on võrdne energiaga, mis antakse allikate poolt sama aja jooksul. Võimsuse bilansi võrrand on järgmine: $\sum I^2 R = \sum \mathcal{E} I$.

Koostame võimsuse bilansi võrrandi, arvestades ka märke:

$$\mathcal{E}_1 I_1 + \mathcal{E}_2 I_2 + \mathcal{E}_3 I_3 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6$$

Võimsus, mis eraldub takistite peal

$$\begin{aligned} \sum I^2 R &= \\ &= 6,212^2 \cdot 10 + 0,077^2 \cdot 10 + 0,225^2 \cdot 6 + 6,289^2 \cdot 5 + (-0,148)^2 \cdot 15 + 6,437^2 \cdot 1 = \\ &= 614,57 \text{ W} \end{aligned}$$

Allikate võimsus:

$$\sum \mathcal{E} I = 100 \cdot 6,212 + 30 \cdot 0,077 + 10 \cdot 0,225 = 626,01 \text{ W}$$

Arvutuste viga:

$$\varepsilon = \frac{626,01 - 614,57}{626,01} = 100\% = 1,83\%$$

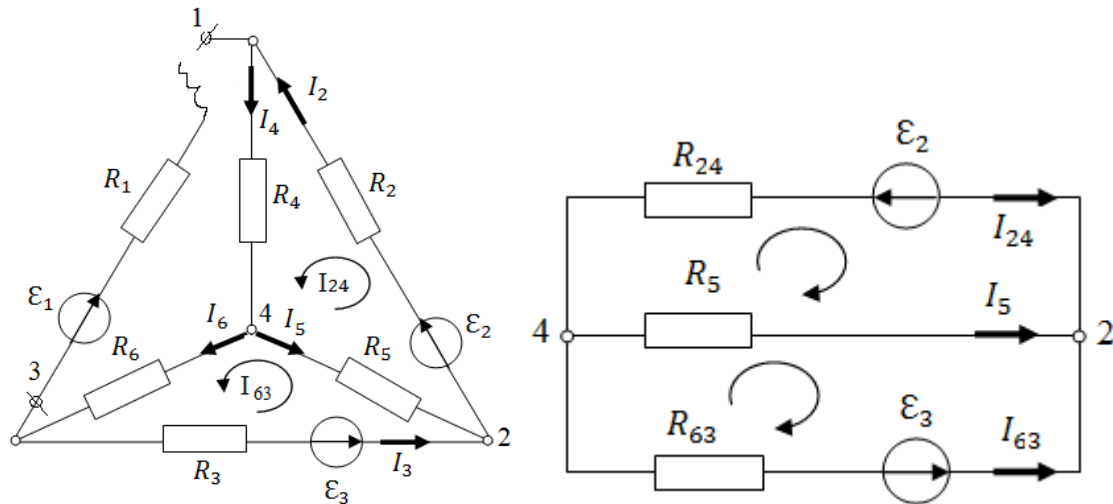
Kuna viga ei ületa 5%, siis arvutused on tehtud õieti.

Leida vool I_1 voolugeneraatori meetodiga.

Antud meetodi rakendus on vajalik tundmatu voolu määramiseks suvalises ahelas väga keerulise elektriahela korral. Voolu I_1 leidmiseks ahelas (13), mille takistus on R_1 , on vajalik antud ahelat katkestada ning ülejäänud skeemi osa vahetada voolugeneraatoriga elektromotoorjõuga $\mathcal{E}_g$ ja sisetakistusega R_g . Antud generaatori e.m.j on võrdne pingega katkestatud ahela klemmidel (tühijooksu pinge): $\mathcal{E}_g = U_{13(t,j)}$. Skeemi arvutus tühijooksu režiimis $\mathcal{E}_g$ määramiseks kasutatakse suvalise meetodi (mis on juba üleval pool kirjeldatud).

Generaatori sisetakistus on võrdne passivse skeemi takistusega ahela 13 klemmide suhtes, kust on eemaldatud kõik e.m.j-id.

Kõigepealt katkestame ahelat 13 ning joonistame ülejäänud skeemi osa ümber.



Kasutades Kirchhoffi reeglid, leiamed voolud (I_{24}, I_5, I_{63}):

$$\begin{cases} I_{24} + I_5 + I_{63} = 0 \\ I_{24}R_{24} - I_5R_5 = -\mathcal{E}_2 \\ I_5R_5 - I_{63}R_{63} = -\mathcal{E}_3 \end{cases}$$

$$R_{24} = R_2 + R_4 = 10 + 5 = 15 \, \Omega$$

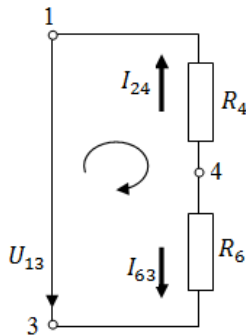
$$R_{63} = R_6 + R_3 = 1 + 6 = 7 \, \Omega$$

$$I_{24} = -1,862 \, A$$

$$I_5 = 0,138 \, A$$

$$I_{63} = 1,724 \, A$$

Nüüd on vaja leida $\mathcal{E}_g$. Nagu üleval pool oli öeldud, viimane võrdub pingega ahela 13 klemmidel tühijooksu režiimis, ehk peame leidma pinged klemmidel 13. Selleks valime kontuuri, mis sisaldaks sõlmed 1,3. Joonistame skeemi ümber.

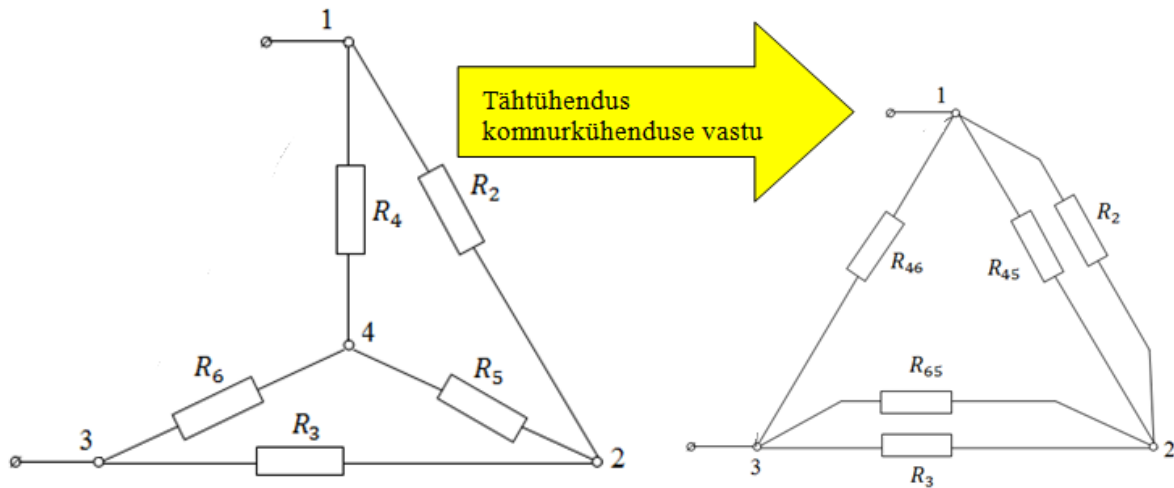


Kasutades Kirchhoffi II seaduse, saame järgmise võrrandi:

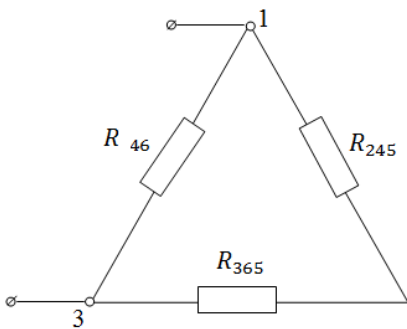
$$-I_{24}R_4 - U_{13} + I_{63}R_6 = 0$$

$$U_{13} = 11,034 \, V \rightarrow U_{13} = \mathcal{E}_g$$

Nüüd leiame generaatori sisetakistuse. Selleks joonistame skeemi (ilma ahelat 13) ning eemaldame sealt kõik e.m.j-id. Edasi leiame antud skeemi kogutakistuse (kasutades ekvivalenttakistuse leidmiseks sobiva meetoodika).



Tähtkujuühendus asendame kolmnurkühenduse vastu. Seega uus skeem näeb välja sellisel kujul (vt joonis).



$$R_{46} = R_4 + R_6 + \frac{R_4 \cdot R_6}{R_5} = 5 + 1 + \frac{5 \cdot 1}{15} = 6,333 \, \Omega$$

$$R_{45} = R_4 + R_5 + \frac{R_4 \cdot R_5}{R_6} = 5 + 15 + \frac{5 \cdot 15}{1} = 95 \, \Omega$$

$$R_{65} = R_6 + R_5 + \frac{R_6 \cdot R_5}{R_4} = 1 + 15 + \frac{1 \cdot 15}{5} = 19 \, \Omega$$

$$R_{245} = \frac{R_2 \cdot R_{45}}{R_2 + R_{45}} = \frac{10 \cdot 95}{10 + 95} = 9,048 \, \Omega$$

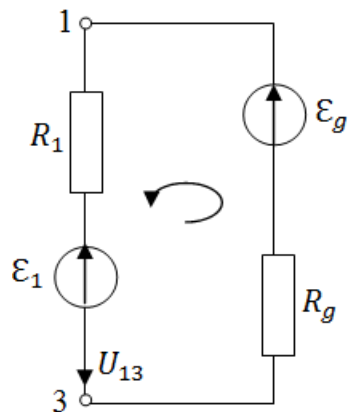
$$R_{365} = \frac{R_3 \cdot R_{65}}{R_3 + R_{65}} = \frac{6 \cdot 19}{6 + 19} = 4,56 \, \Omega$$

$$R_{365,245} = R_{365} + R_{245} = 4,56 + 9,048 = 13,608 \, \Omega$$

$$R_g = \frac{R_{365,245} \cdot R_{46}}{R_{365,245} + R_{46}} = \frac{13,608 \cdot 6,333}{13,608 + 6,333} = 4,322 \, \Omega$$

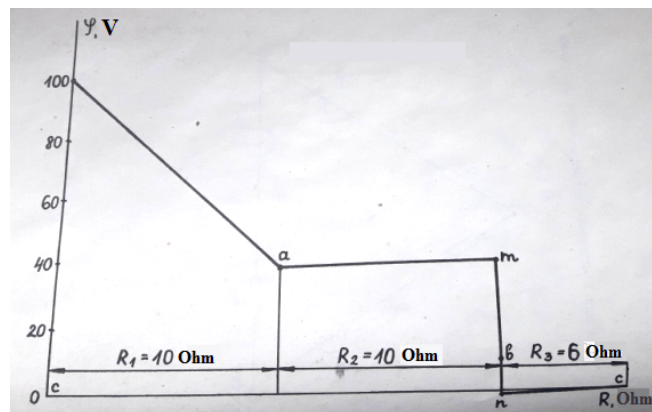
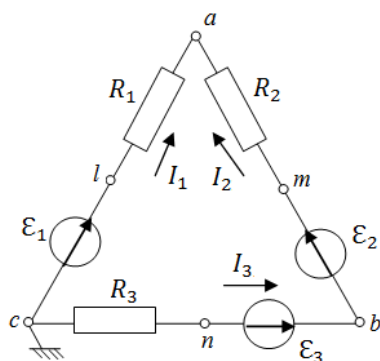
Voolu I_1 leidmiseks kasutame Ohmi seaduse kogu ahela kohta: $I = \frac{E}{R+r}$, või Kirchoffi II seaduse, ehk $I_1 R_1 + I_1 R_g = -\mathcal{E}_g + \mathcal{E}_1$

$$I_1 = \frac{\varepsilon_g - \varepsilon_1}{R_1 + R_g} = \frac{11,034 - 100}{10 + 4,322} = -6,212 \text{ A (illustreeriv joonis on allpool)}$$



Joonistada potentsiaaldiagrammi suvaliselt valitud suletud kohtuuri jaoks, mis sisaldab min kahte e.m.j-u (elektromotoorjõud).

Iga ahela elemendi elektrilist olekut võib piltlikult esitada potentsiaaldiagrammil. Antud diagramil x-teljele kantakse jadamisi takistuse väärtused iga naaberpunktide vahel, aga y-teljele kantakse nende punktide potentsiaalid. Valime kontuuri, mis sisaldab min kahte e.m.j-i. Valime kontuuris lisa sõlmed ning maandume ühe sõlme (c), ehk tema potentsiaal on võrdne nulliga.



Start punktiks on null potentsiaaliga sõlm. Skeemi hakkatakse vaatama punktist c ning minnakse sõlmpunktidesse a ja b. Saame potentsiaalide vahed:

$$\varphi_c + \varepsilon_1 = \varphi_l \rightarrow \varphi_l = 0 + 100 = 100 \text{ V}$$

$$\varphi_l - I_1 R_1 = \varphi_a \rightarrow \varphi_a = 100 - (6,212 \cdot 10) = 37,88 \text{ V}$$

$$\varphi_m - I_2 R_2 = \varphi_a \rightarrow \varphi_m = 37,88 + (0,077 \cdot 10) = 37,88 \text{ V}$$

$$\varphi_b + \varepsilon_2 = \varphi_m \rightarrow \varphi_b = 38,65 - 30 = 8,65 \text{ V}$$

$$\varphi_n + \varepsilon_3 = \varphi_b \rightarrow \varphi_n = 8,65 - 10 = -1,35 \text{ V}$$

$$\varphi_c - I_3 R_3 = \varphi_n \rightarrow \varphi_c = -1,35 + (0,225 \cdot 6) = 0 \text{ V}$$