

Kodune töö nr 3 „Ühefaasilise voolu elektriahelate arvutamine”

Arvutuste näidis

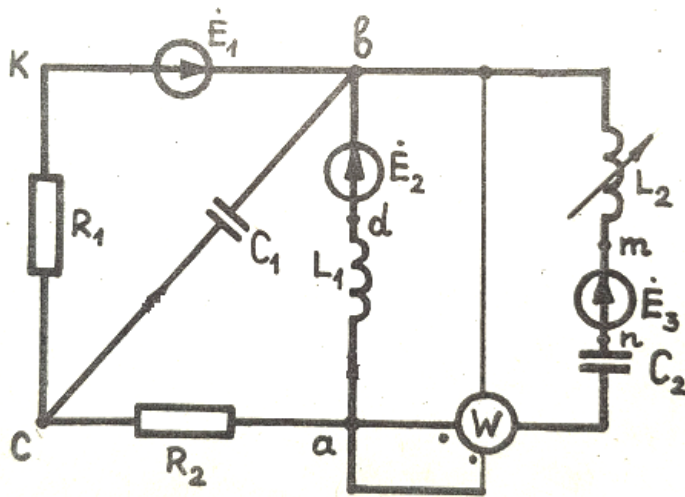
Oma variandi toodud skeemi jaoks leida järgmised punktid:

1. Leida kompleksvoolude tegeväärtused skeemi kõikides ahelates, kasutades vabalt valitud meetodikat elektriahelate arvutamiseks (Kirchhoffi reeglid, kontuurvoolude meetod, sõlmpotentsiaalide meetod).
2. Enda arvutuste kontrolliks teha võimsuse bilanssi arvutus.
3. Arvutustulemuste põhjal leida vattmeetri näit.
4. Konstrueerida voolude vektordiagrammid.
5. Võttes skeemis ühe punkti potentsiaali võrdseks nulliga, konstrueerida potentsiaalide diagrammi.
6. Leida pinge hetkväärtus takisti R_1 peal.

Olgu on antud järgmine elektriskeem ning skeemi parameetrid:

$$E_1 = 85 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ (V)}; \quad E_2 = 38 \sin(\omega t - 45^\circ) \text{ (V)}; \quad E_3 = 96 \sin(\omega t + 68^\circ) \text{ (V)};$$

$$\text{välistakistused: } R_1 = 20 \, \Omega, R_2 = 15 \, \Omega, X_{L1} = 21 \, \Omega, X_{L2} = 10 \, \Omega, X_{C1} = 16 \, \Omega, X_{C2} = 6 \, \Omega$$



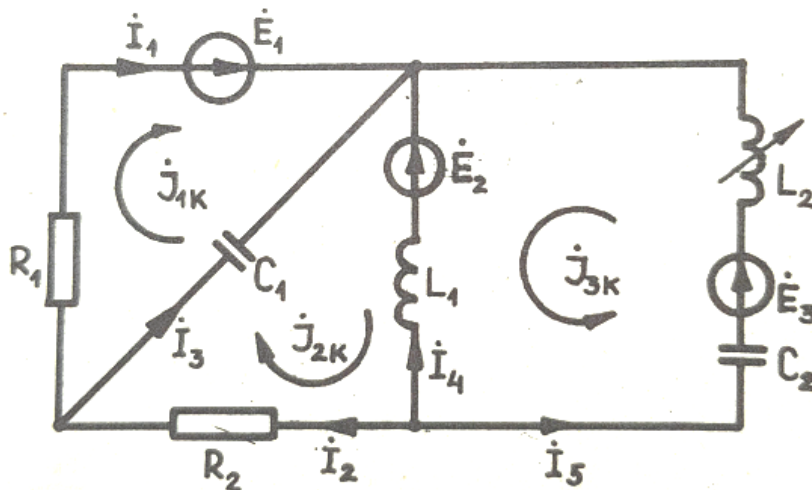
Joonis 1. Skeem

LAHENDUS

Leida kompleksvoolude tegeväärtused skeemi kõikides ahelates, kasutades vabalt valitud meetodikat elektriahelate arvutamiseks (antud näides kasutame kontuurvoolude meetodi).

Süsteem on analoogiline, mida kasutatakse alalisvoolu ahelates.

- Alguseks valime vabalt voolude suunas igas ahelas.
- Valime kontuurvoolude suunad. Kui mingit takistust läbivad mitu voolu, siis tuleb nende suunale tähelepanu pöörata. Suunade valik on näidatud joonisel (arvutuste hetkel eemaldatakse vattmeeter).



Joonis 2. Kontuurvoolude suunad

Komplekstakistuse arvutamises mahtuvuslik takistus on alati miinus märgiga: $-jX_C$, aga indusktiivne takistus on pluss märgiga: $+jX_L$. Kui sama takistuse läbivad mitu kontuurvoolud, siis need liidetakse, vastupidises olukorras – lahutatakse. Analoogiliselt käib ka elektrimootorjõuga. Kui e.m.j ühtib kontuurvoolude suunaga, siis e.m.j on positiivne, kui ei ühti, siis negatiivne.

Kontuurvoolude meetodiga lahendatud võrrandite süsteem:

$$\begin{cases} i_{1k}(R_1 - jX_{C1}) - i_{2k}(-jX_{C2}) = \dot{E}_1 \\ i_{2k}(R_2 - jX_{C1} + jX_{L1}) - i_{1k}(-jX_{C1}) + i_{3k}(jX_{L1}) = -\dot{E}_2 \\ i_{3k}(-jX_{C2} + jX_{L1} + jX_{L2}) + i_{2k}(jX_{L1}) = \dot{E}_3 - \dot{E}_2 \end{cases}$$

Asendades ülesandes toodud andmed võrrandi sisse ning natuke lihtsustades, saame:

$$\begin{cases} i_{1k}(20 - j16) + i_{2k}j16 = \frac{85}{\sqrt{2}}e^{j30^\circ} \\ i_{2k}(15 + j5) + i_{1k}j16 + i_{3k}j21 = -\frac{38}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ} \\ i_{3k}j25 + i_{2k}j21 = \frac{96}{\sqrt{2}}e^{j68^\circ} - \frac{38}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ} \end{cases}$$

Võrrandi lahendamiseks tuleb kasutada vabalt valitud matemaatilist tarkvara. Arvutuste lihtsustamiseks võrrandite paremad pooled on mõistlikum esitada algebralises vormis:

$$\begin{cases} \dot{I}_{1k}(20 - j16) + \dot{I}_{2k}j16 = 52.1 + j30.1 \\ \dot{I}_{2k}(15 + j5) + \dot{I}_{1k}j16 + \dot{I}_{3k}j21 = -19 + j19 \\ \dot{I}_{3k}j25 + \dot{I}_{2k}j21 = 6.43 + j81.94 \end{cases}$$

Kompleksarvu esitamise kujud on näidatud järgmisel joonisel:

Kompleksarvu esitamise vormid:

$$E_1 = 85 \sin(\omega t + 30^\circ)$$

E. m. j. tegewväärtus (RMS - root means square)

$$E_1 = \frac{85}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + 30^\circ)$$

Trigonomeetrilisel kujul: $\dot{E}_1 = \frac{85}{\sqrt{2}} \cos 30^\circ + j \frac{85}{\sqrt{2}} \sin 30^\circ$

Diferentsiaalkujul: $\dot{E}_1 = \frac{85}{\sqrt{2}} e^{j30^\circ}$

Algebralisel kujul (sellaks lihtsustame trigonomeetriline kuju)

$$\dot{E}_1 = 60,1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + j 60,1 \cdot \frac{1}{2} = 52,1 + j 30,1$$

Joonis 3. Kompleksarvude esitamine

Antud võrrandisüsteemi lahendused algebralisel kujul:

$$\dot{I}_{1k} = 0,11 + 0,66j \text{ (A)}$$

$$\dot{I}_{3k} = 2,31 + 1,81j \text{ (A)}$$

$$\dot{I}_{2k} = 1,16 - 2,46j \text{ (A)}$$

Esitame tulemused eksponentkujul. Täpne arvutuskäik ühe kontuurvoolu jaoks on toodud joonisel 4.

$$\dot{I}_{1k} = 0,67 e^{j80,54^\circ} \text{ (A)}$$

$$\dot{I}_{3k} = 2,93 e^{j38,1^\circ} \text{ (A)}$$

$$\dot{I}_{2k} = 2,72 e^{j-64,75^\circ} \text{ (A)}$$

$$\dot{I}_{1k} = 0,11 + 0,66j \text{ (A)}$$

leiame kompleksarvu moodul

$$I_{1k} = |\dot{I}_{1k}| = \sqrt{0,11^2 + 0,66^2} = 0,67$$

leiame kompleksarvu argumendi:

$$\varphi = \arctan \frac{+0,66}{+0,11} \Rightarrow \varphi = 80,54^\circ$$

Antud kompleksarvu eksponentkujul on järgmine

$$\dot{I}_{1k} = 0,67 e^{j80,54^\circ} \text{ (A)}$$

Joonis 4.

Nüüd leiame voolud skeemi kõikides ahela osades:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1k} = 0,67 e^{j80,54^\circ} \text{ (A)}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{2k} = 2,72 e^{-j64,75^\circ} \text{ (A)}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{2k} - \dot{I}_{1k} = 2,72 e^{-j64,75^\circ} - 0,67 e^{j80,54^\circ} = 3,29 e^{-j71,4^\circ} \text{ (A)}$$

$$\dot{I}_4 = -\dot{I}_{2k} - \dot{I}_{3k} = -2,72 e^{-j64,75^\circ} - 2,93 e^{j38,1^\circ} = 3,5 e^{-j169,4^\circ} \text{ (A)}$$

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_{3k} = 2,93 e^{j38,1^\circ} \text{ (A)}$$

Täpne lahenduskäik on toodud joonisel 5a ja 5b.

$$2,72 e^{-j64,75^\circ} - 0,67 e^{j80,54^\circ} =$$

$$= 2,72 [\cos(-64,75^\circ) + j \sin(-64,75^\circ)] - 0,67 (\cos 80,54^\circ + j \sin 80,54^\circ) =$$

$$= 1,16 - 2,46j - 0,11 - 0,66j = 1,05 - 3,12j$$

kompleksarvu eksponentkujul:

$$1,05 - 3,12j = \underline{3,29 e^{-j71,4^\circ}}$$

Joonis 5a.

$$\begin{aligned}
 & -2,72 e^{-j64,75^\circ} - 2,93 e^{j38,1^\circ} = -2,72 [\cos(-64,75^\circ) + j \sin(-64,75^\circ)] - \\
 & \quad 2,93 (\cos 38,1^\circ + j \sin 38,1^\circ) = \\
 & = -1,16 + 2,46j - 2,31 - 1,81j = -3,47 + 0,65j \\
 & \text{kompleksarv eksponentkujul:} \\
 & -3,47 + 0,65j = 3,5 e^{-j10,6^\circ} = 3,5 e^{+j169,4^\circ} \\
 & \text{nurk } \varphi \text{ loetakse } x\text{-telje positiivsest} \\
 & \text{suunast, ehk } \varphi = 180^\circ - 10,6^\circ = 169,4^\circ
 \end{aligned}$$

Joonis 5b.

Võimsuse bilanssi arvutus

Arvutuste kontrolliks teema võimsuse bilanssi arvutuse. Näivvõimsus (S): $S = I \cdot U$. Kuna vaheldusvoolu korral näivvõimsus ei ole siinusfuksioon, siis antud juhul pinge korrutatakse voolu kaaskompleksarvuga $\dot{I}^*$.

$$\begin{aligned}
 \dot{S} &= \dot{E}_1 \cdot \dot{I}_1^* + \dot{E}_2 \cdot \dot{I}_4^* + \dot{E}_3 \cdot \dot{I}_5^* = \\
 &= 60,1 e^{j30^\circ} \cdot 0,67 e^{-j80,54^\circ} + 27 e^{-j45^\circ} \cdot 3,5 e^{-j169,4^\circ} + 68 e^{j68^\circ} \cdot 2,93 e^{-j38,1^\circ} = \\
 &= 40,3 e^{-j50,54^\circ} + 94,5 e^{-j214,4^\circ} + 199,2 e^{j29,9^\circ} = 120,33 + 121,6j \text{ (VA)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Ehk } P_{\text{allikas}} = 120,33 \text{ W}$$

$$P_{\text{kasutatud}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 0,67^2 \cdot 20 + 2,72^2 \cdot 15 = 120 \text{ W}$$

$$\text{Viga: } \varepsilon (\%) = \frac{|P_{\text{kasutatud}} - P_{\text{allikas}}|}{P_{\text{kasutatud}}} \cdot 100\% = \frac{120 - 120,33}{120} \cdot 100\% = 0,3\%$$

Viga on vähem kui 5%, järelikult arvutus on tehtud õieti.

Vattmeetri näit

Joonise 1 järgi vattmeeter on ühendatud punktide a b vahel. Kuna vattmeeter näiteb võimsuse, siis valem on järgmine:

$$\dot{S} = \dot{U}_{ab} \cdot \dot{I}_5^* = 65,3 e^{j59,5^\circ} \cdot 2,93 e^{-j38,1^\circ} = 191,3 e^{j21,4^\circ} = 178 + 70j \text{ (VA)}$$

$$P = 178 \text{ W}$$

$$\varphi_a - \dot{I}_4 \cdot jX_{L1} + \dot{E}_2 = \varphi_b$$

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_{ab} &= \varphi_a - \varphi_b = \dot{I}_4 \cdot jX_{L1} - \dot{E}_2 = 3,5 e^{-j169,4^\circ} \cdot j21 - 27 e^{-j45^\circ} = \\
 &= (-3,59 + j0,67)j21 - (19,1 + j19,1) = -33,17 - j56,29 = 65,3 e^{j59,5^\circ} \text{ (V)}
 \end{aligned}$$

Pinge hetkväärtus takisti R_1 peal

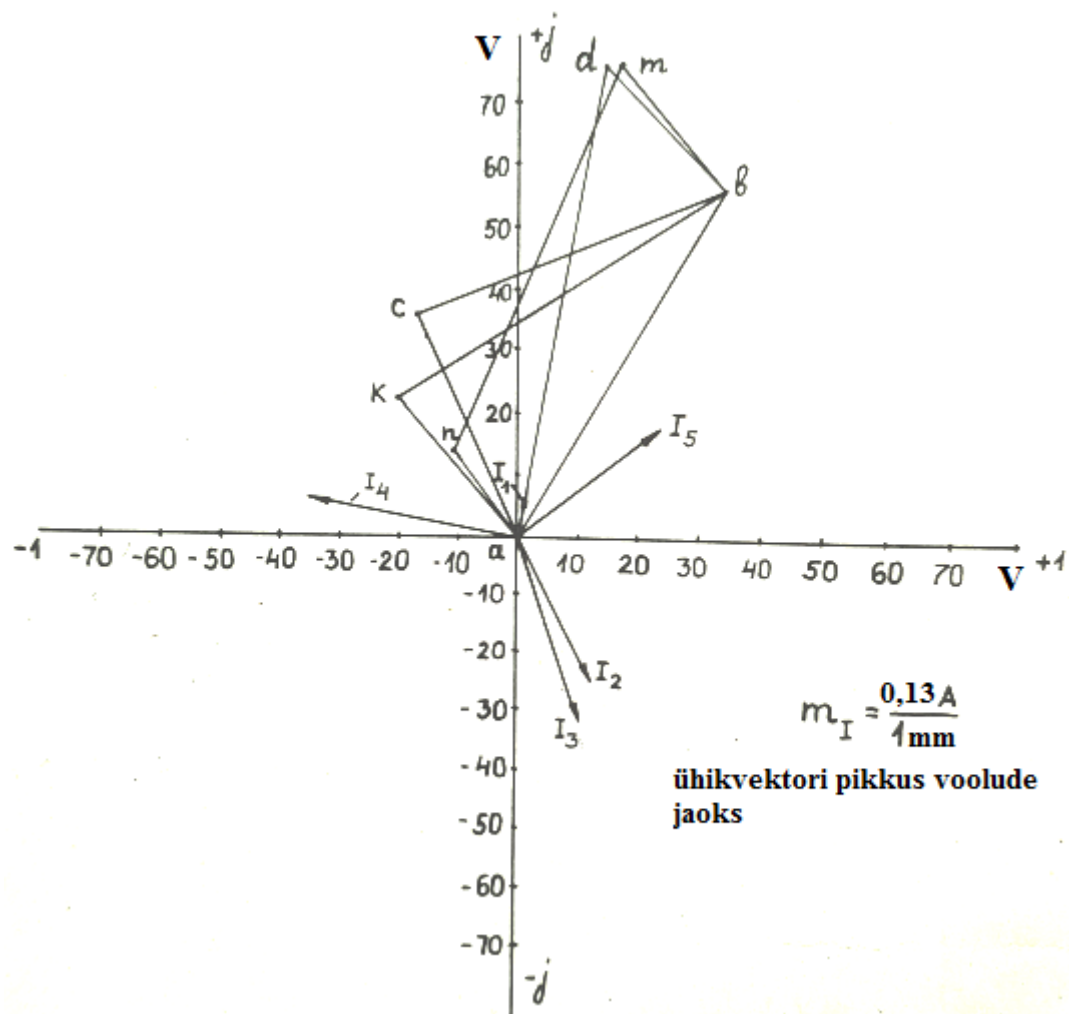
$$\begin{aligned}\dot{U}_{R1} &= \sqrt{2} \cdot \dot{I}_1 \cdot R_1 = \sqrt{2} \cdot 0,67 e^{j80.54^\circ} \cdot 20 = \\ &= 20 \cdot 0,67 \sqrt{2} \sin(\omega t + 80.54^\circ) = 19 \sin(\omega t + 80.54^\circ) \text{ (V)}\end{aligned}$$

Võttes skeemis ühe punkti potentsiaali võrdseks nulliga, konstrueerida potentsiaalide diagrammi.

Võtame punkti „a” potentsiaali võrdseks nulliga. Teiste punktide potentsiaalid on järgmised:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_a &= 0 \\ \dot{\varphi}_d &= \dot{\varphi}_a - \dot{I}_4 X_{L1} = 0 - 3,65 e^{j169^\circ 25'} \cdot 21 e^{j90^\circ} = \\ &= 76,7 e^{j259^\circ 25'} = -(j75,5 - 14,1) \text{ V} \\ \dot{\varphi}_e &= \dot{\varphi}_d + \dot{E}_2 = (14,1 + j75,5) + 27 e^{-j45^\circ} = (32,8 + j54,2) \text{ V} \\ \dot{\varphi}_c &= \dot{\varphi}_a - \dot{I}_2 R_2 = 0 - 2,72 e^{-j64^\circ 45'} \cdot 15 = -40,8 e^{-j64^\circ 45'} = \\ &= (-17,4 + j36,8) \text{ V} \\ \dot{\varphi}_n &= \dot{\varphi}_c - \dot{I}_1 R_1 = -17,4 + j36,8 - 0,678 e^{j80^\circ 40'} \cdot 20 = \\ &= -17,4 + j36,8 - 13,5 e^{j80^\circ 40'} = (-19,6 + j23,4) \text{ V} \\ \dot{\varphi}_m &= \dot{\varphi}_a - \dot{I}_5 X_{C2} = 0 - 2,93 e^{j38^\circ 10'} \cdot 6 e^{-j90^\circ} = \\ &= 0 - 17 e^{j51^\circ 50'} = (-10,9 + j13,85) \text{ V} \\ \dot{\varphi}_m &= \dot{\varphi}_n + \dot{E}_3 = -10,9 + j13,85 + j63 + 25,5 = \\ &= (14,6 + j76,85) \text{ V}\end{aligned}$$

Voolude ja potentsiaalide diagrammid on toodud joonisel 6.



Joonis 6. Voolude ja pingete diagrammid