

6. Elektriväli dielektrikutes

IEE1110 Elektromagnetväljatehnika

Dielektriline polarisatsioon

- Elektrivälja tugevus dielektrikus erineb selle välja tugevusest vaakumis tingituna **dielektrilise polarisatsiooni** nähtusest.
- Välise elektrivälja puudumisel on aines leiduvad dipoolid (näiteks polaarsed molekulid) orienteeritud juhuslikult ja nende summaarne elektriväli on seetõttu null.
- Välise elektrivälja mõjul orienteeruvad dipoolid elektrivälja jõujoonte suunas – dielektrik **polariseerub**.

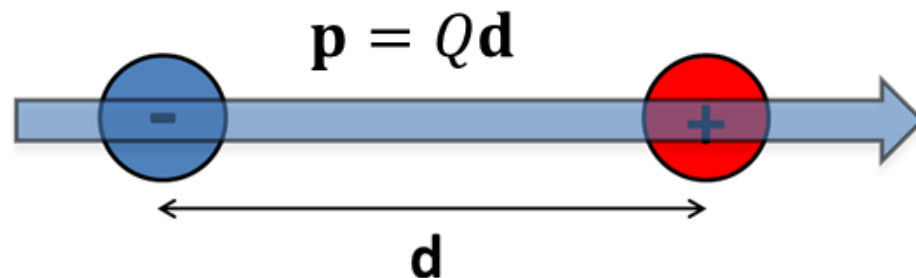


Elektriline dipoolmoment $\mathbf{p}$

- Süsteemi, mis koosneb kahest, teineteisest kaugusel d paiknevast erimärgilisest ja ühesuurusest laengust Q , nimetatakse elektriliseks dipooliks.
- Taolist süsteemi iseloomustavaks suuruseks on elektriline dipoolmoment

$$\mathbf{p} = Q\mathbf{d} \text{ [C} \cdot \text{m]}$$

- $\mathbf{d}$ on vektor pikkusega d , mis on suunatud negatiivsest laengust positiivse laengu suunas.



Vabad ja seotud laengud

- **Vabad laengud** (*free charge*) saavad vabalt makroskoopilises skaalas liikuda.
 - Elektronid juhis või vaakumis;
 - Ioonid vedelikus või gaasis.
- Vabad laengud tekitavad elektrivälja **E** (Elektrivoo tiheduse **D** [C/m^2]).
- **Seotud laengud** (*bound charge*) saavad üldjuhul liikuda ainult atomaarses skaalas.
 - Elektronid aatomis;
 - Dipoolid isolaatoris.
- Seotud laengute elektriväljas orienteerumise tagajärjel tekib (indutseerub) dielektrikus **polarisatsioon** **P** [C/m^2] (*polarization density*)

Dielektriku polarisatsioon

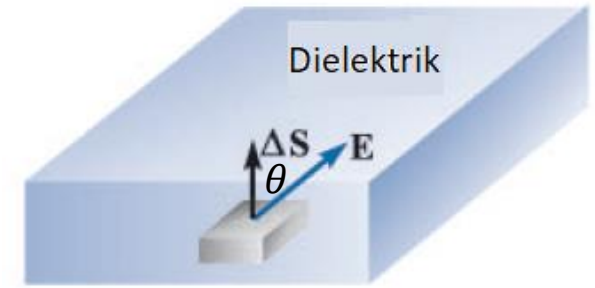
- Kui ühikulises ruumalas (1 m^3) on n dipooli, siis dipoolide koguarv (väikeses) ruumalas Δv on $n \cdot \Delta v$ ja **summaarne dipoolmoment** selles ruumiosas on

$$\mathbf{p}_{kogu} = \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{p}_i .$$

- Polarisatsioon $\mathbf{P}$ [C/m^2] on summaarne dipoolmoment ruumalaühiku kohta

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^{n\Delta v} \mathbf{p}_i .$$

Dielektriku polarisatsioon



- Valime dielektrilises materjalis väikese pinnaelemendi ΔS .
- Olgu väline elektriväli $\mathbf{E}$ selle pinna suhtes nurga θ all.
- Enne välise välja rakendamist on polarisatsioon $\mathbf{P}$ materjalis null.
- Kuna dielektrikus ei saa laengukandajad vabalt liikuda, siis saavad valitud pinda läbida ainult need laengukandjad mis asuvad selle vahetus läheduses. Juhul kui elektriväli on pinna normaaliga samasihiline ($\theta = 0$) peavad dipoolide keskpunktid olema pinnale lähema kui $\pm d/2$.
- Muu nurga väärtuse korral on panustava kihi piirid vastavalt

$$\pm \frac{d}{2} \cos(\theta).$$

Dielektriku polarisatsioon

- Seega saavad pinda ΔS läbida ainult laengud nendest dipoolidest mis paiknevad ruumalas

$$\Delta v = d\Delta S \cos(\theta).$$

Ligikaudu poole kogupanusest annavad ΔS sihis, „alt ülese“, nihkuvad positiivsed laengud ja teise poole vastas-sihis, „ülalt alla“, nihkuvad negatiivsed laengud.

- Dipoolide arv antud ruumalas on $n\Delta v$ ja seega seotud laeng ΔQ_b mis, välise elektrivälja tõttu, läbi meie väikese pinna ΔS nihkub on

$$\Delta Q_b = nQ\Delta v = nQd\cos(\theta)\Delta S.$$

Dielektriku polarisatsioon

- Eeldades, et väikeses ruumalas on kõik dipoolmomendid võrdsed on summaarse dipoolmomendi moodul

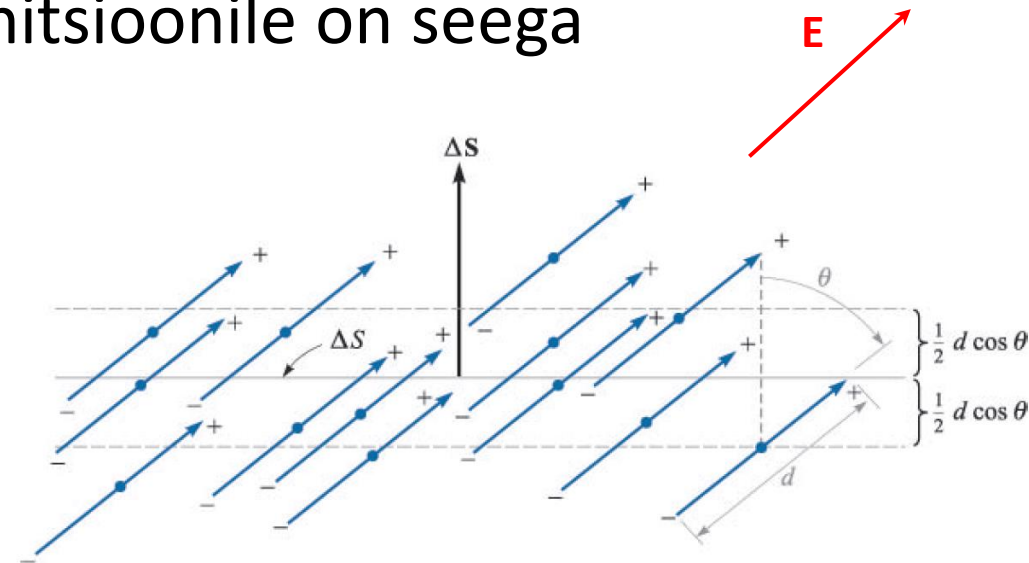
$$p_{kogum} = n\Delta v Qd.$$

- Vastavalt dielektrilise polarisatsiooni definitsioonile on seega polarisatsiooni $\mathbf{P}$ moodul antud ruumalas

$$P = nQd.$$

- Pinda ΔS alt ülese (välja) läbiv seotud laeng

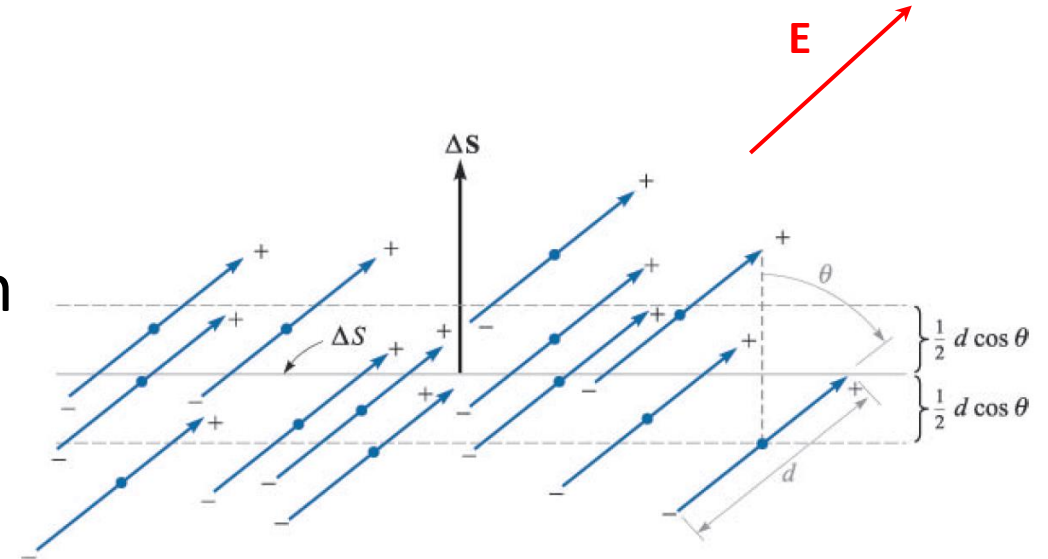
$$\Delta Q_b = P \cos(\theta) \Delta S = \mathbf{P} \cdot \Delta \mathbf{S}.$$



Dielektriku polarisatsioon

- Seotud laeng suletud (kinnises) pinnas on

$$Q_b = - \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}.$$



- Negatiivne märk tuleneb sellest, et kui polarisatsioon $\mathbf{P}$ on pinna normaaliga samas suunas, siis liigub positiivne laeng suletud pinnast välja.
- Dipoolide pool tekitatud elektriväli on suunalt **vastupidine** välisele elektriväljale.

Dielektriku polarisatsioon

- Kogulaeng suletud pinna sees $Q_T = Q_b + Q$, mis vastavalt Gaussi seadusele:

$$Q_T = \oiint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} .$$

- Seega kehtib vaba laengu Q jaoks

$$Q = Q_T - Q_b = \oiint_S (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{S} .$$

Elektrivoo tihedus dielektrikus

- Elektrivoo tihedus dielektrikus

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right].$$

- Elektrivoo tihedus $\mathbf{D}$ dielektrikus on võrdeline vabade laengute poolt põhjustatud elektrivälja tugevusega $\mathbf{E}$.
- Lineaarses, isotroopses ja homogeenses dielektrikus sõltub $\mathbf{P}$ elektrivälja tugevusest $\mathbf{E}$ lineaarselt

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}.$$

- Võrdeteguriks χ_e on keskkonna **dielektriline vastuvõtlikkus** (*Electric susceptibility*).

Elektrivoo tihedus dielektrikus

- Elektrivoo tihedust dielektrikus saab avaldada kujul:

$$\mathbf{D} = (1 + \chi_e)\varepsilon_0\mathbf{E}.$$

- Materjali **suhteline dielektriline läbitavus** ε_r näitab mitu korda on elektriväli antud materjalis nõrgem kui vaakumis:

$$\varepsilon_r = (1 + \chi_e).$$

- Materjali (absoluutne) **dielektriline läbitavus** ε (*permittivity*) on

$$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0 = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \left[\frac{\text{F}}{\text{m}} \right].$$

- Elektrivoo tihedus

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r\varepsilon_0\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}.$$

Elektrivälja tugevus dielektrikus

- Kasutades elektrilise induktsiooni definitsiooni saame leida elektrivälja tugevuse dielektrikus:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D} - \mathbf{P}}{\epsilon_0} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} - \chi_e \mathbf{E} = \mathbf{E}_f - \mathbf{E}_b.$$

- Kus $\mathbf{E}_f$ on vabade laengute poolt põhjustatud elektriväli vaakumis ja $\mathbf{E}_b$ on seotud laengu poolt tekitatud **vastuelektriväli** dielektrikus.
- Gaussi seadust rakendades näeme, et dielektrikus on elektrivälja voog läbi kinnise pinna ϵ_r korda väiksem, kui vaakumis:

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r}.$$

Elektriväli dielektrikus

- Elektriväli $\mathbf{E}$, ehk ühiklaengule mõjuv jõud, keskkonnas on pöördvõrdeline antud keskkonna suhtelise dielektrilise läbitavusega ϵ_r

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_r \epsilon_0} .$$

- Elektriline induktsioon $\mathbf{D}$ jääb keskkonnast sõltumata konstantseks, sest tegemist on parameetriga mis on seotud elektrivälja allikaga – vaba laenguga.

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q .$$

Läbitavus ajas muutavas elektriväljas

- Polariseerimine ei toimu hetkeliselt, vaid selleks kulub teatud aeg:

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi_e(t - \tau) \mathbf{E}(\tau) d\tau.$$

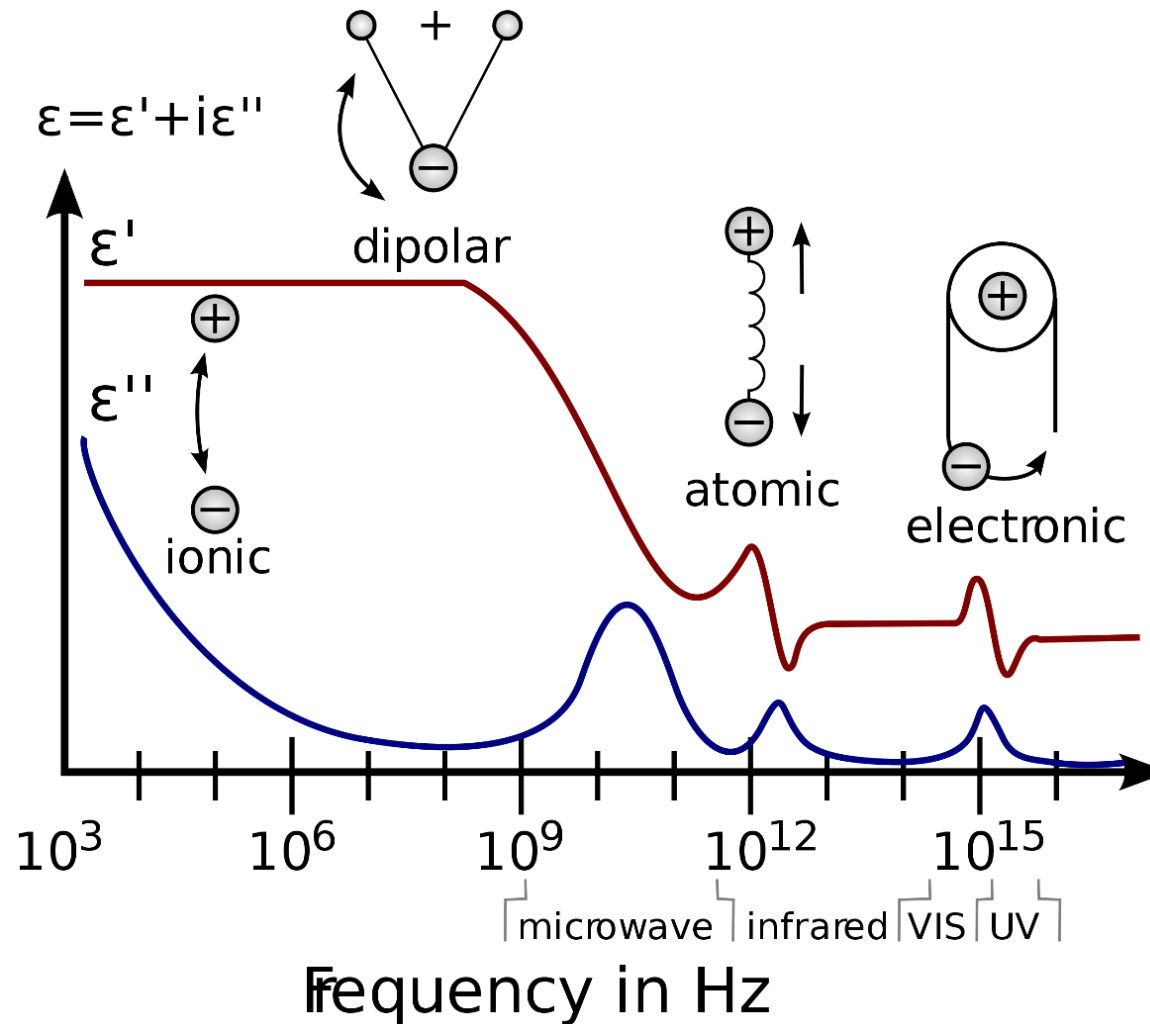
- Kovolutsiooniteoreemist lähtuvalt:

$$\mathbf{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi_e(\omega) \mathbf{E}(\omega).$$

- Hilistumine elektrivälja $\mathbf{E}$ ja polarisatsiooni $\mathbf{P}$ vahel tekitab faasinihke, mistõttu dielektriline läbitavus on oma olemuselt kompleksne suurus:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega).$$

Dielektrilise läbitavuse sagedussõltuvus

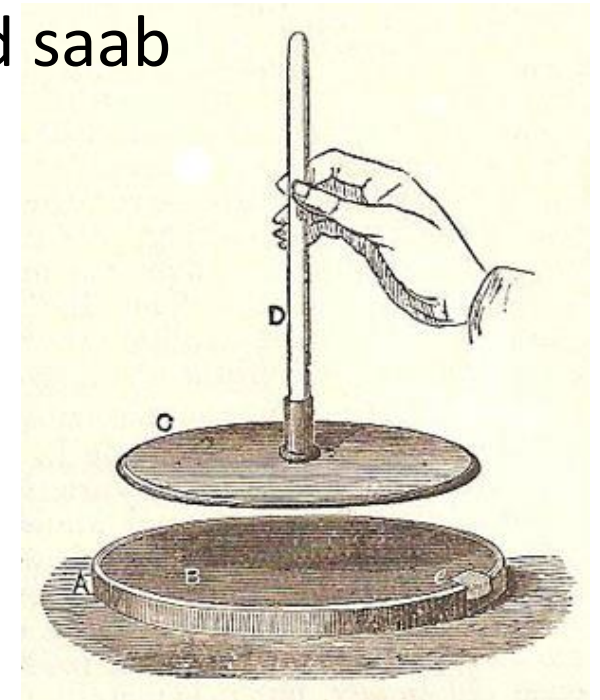


Mittelineaarsed dielektrikud

- Enamuses materjalidest on polarisatsioon $\mathbf{P}$ ja seega ka elektrivoo tihedus $\mathbf{D}$ elektrivälja tugevusest $\mathbf{E}$ lineaarselt sõltuvad.
- Materjalides mis on tuntud **paraelektrike** nime all ei ole see sõltuvus lineaarne.
- Leidub materjale mille puhul ei sõltub polarisatsioon ainult elektrivälja tugevusest käesoleval hetkel vaid ka selle muutumise ajaloost. Nähtust ennast tuntakse **hüstereesi** nime all ning sellise omadusega materjale nimetatakse **ferroelektrikeks**.
- Ferroelektrikus võib polarisatsioon eksisteerida ka välise elektrivälja puudumisel.

Elektreedid

- Materjale, millel on nullist erinev polarisatsioon ka välise elektrivälja puudumisel nimetatakse **elektreetideks**.
 - **Elektriline magnet** (*electricity + magnet - electret*).
- Elektreetiks võib olla ferroelektriline materjal kuid neid saab valmistada ka muudel viisidel.



Anisotroopne dielektrik

- Dielektriline läbitavus suunast sõltuv:

$$\begin{aligned}D_x &= \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z \\D_y &= \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z \\D_z &= \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z\end{aligned}$$

- Maatrikskujul

$$\mathbf{D}^T = \bar{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \mathbf{E}^T.$$

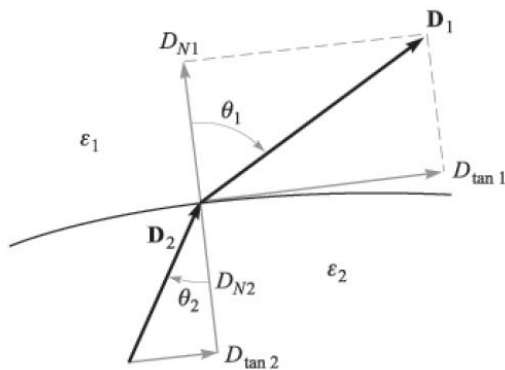


Piiritingimused ideaalsete dielektrikute korral

- Vaatleme kahe ideaalse (kaovaba) dielektrilise keskkonna kokkupuutepiiri.
- Esimese keskkonna dielektriline läbitavus olgu ϵ_1 ja teise oma vastavalt ϵ_2 .
- Elektriväljade tugevuste tangentsiaalsed komponendid on pinnal võrdsed:

$$E_{tan1} = E_{tan2}.$$

- Elektrivoo tiheduse tangentisaalkomponentide kohta kehtib seega:



$$\frac{D_{tan1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{tan2}}{\epsilon_2} \Rightarrow D_{tan2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} D_{tan1}.$$

Piirtingimused normaalkomponentide jaoks

- Elektrivoo tiheduse normaalkomponentide jaoks kehtib

$$D_{N1} - D_{N2} = \rho_S.$$

- Üldjuhul võib laengu pindtiheduse ρ_S lugeda nulliks ja kehtib

$$D_{N1} = D_{N2}.$$

- Seega on elektrivälja tugevuste normaalkomponendid seotud

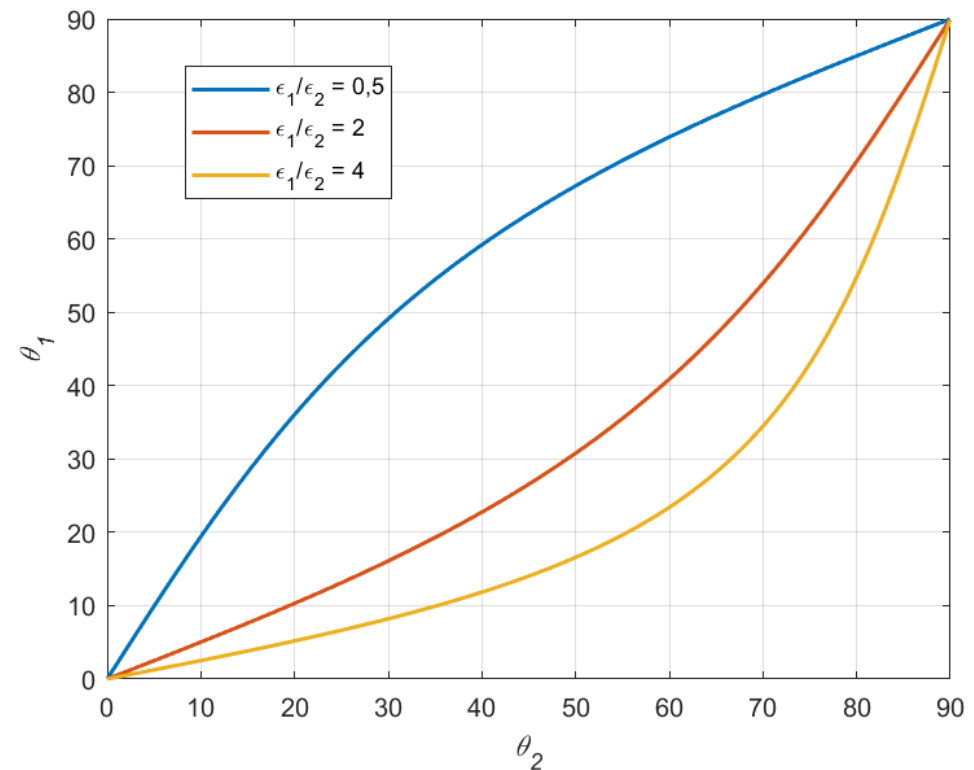
$$\varepsilon_1 E_{N1} = \varepsilon_2 E_{N2} \Rightarrow E_{N2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{N1} .$$

Suunamuutus keskkondade piiril

- Nurgad väljade suuna ja pinnanormaalide vahel (langemis- ja murdumisnurgad) on omavahel seotud kui

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

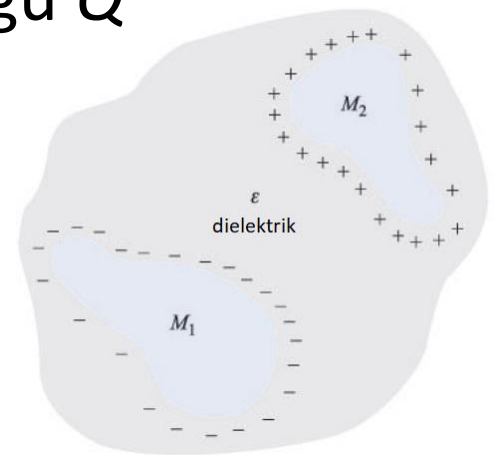
- Murdumisnurga θ_1 sõltuvus langemisnurgast θ_2 on kujutatud kõrvaloleval joonisel.



Mahtuvus

- Asugu homogeenises dielektrikus kaks juhti, üks laenguga Q ja teine sama suure, kuid vastandmärgilise laenguga $-Q$.
- Teisi laenguid süsteemis pole ja kogulaeng on null.
- Laeng on mõlema juhi pinnale ühtlaselt jaotunud – mõlemad on ekvipotentsiaalipinnad. Pindade potentsiaalide vahe on U .
- Kirjeldatud süsteemi **mahtuvus** C [F] (*capacitance*) on laengu Q suhe potentsiaalide erinevusse

$$C = \frac{Q}{U} .$$



Mahtuvus

- Üldjuhul on laeng Q mahtuvusel leitav Gaussi seadusega

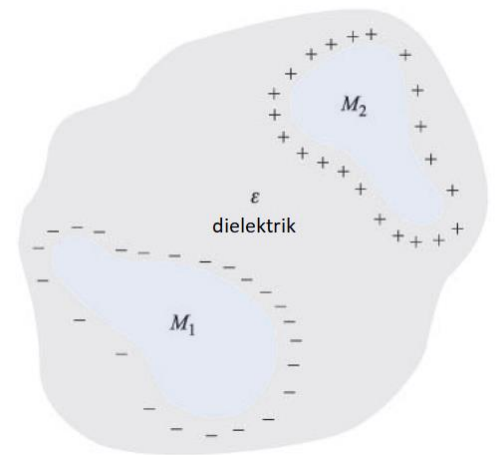
$$Q = \oiint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

- Mõlemad juhid on ekvipotentsiaalipinnad, seega potentsiaalide vahe on

$$U = - \int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}.$$

- Seega mahtuvuse üldisem definitsioon:

$$C = \frac{\oiint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}{- \int_{-}^{+} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}}.$$



Materjalid

- W.H. Hayt, J.A. Buck. **Engineering Electromagnetics**, kuues trükk. Teine peatükk.
- R. Feynman. **The Feynman lectures on physics**. Teine köide, 10. peatükk.

