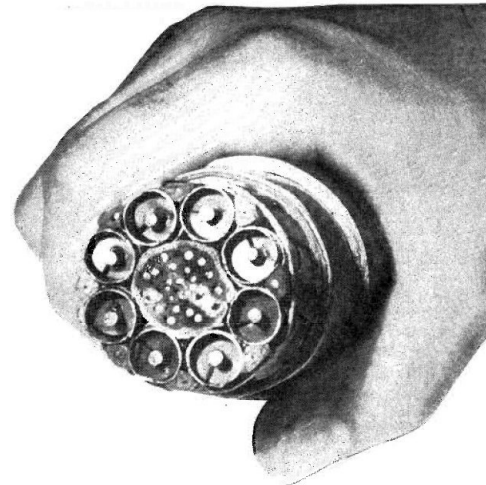


16. Ülekandeliin

IEE1110 – Elektromagnetväljatehnika

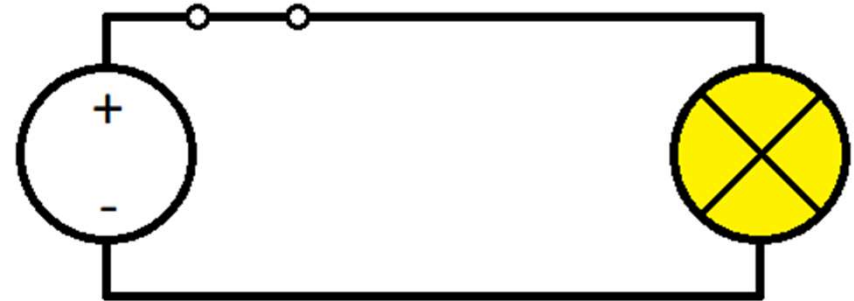
Ülekandeliini mõiste

- **Ülekandeliin** (*transmission line*) on struktuur mis on mõeldud elektromagnetlainete energia suunatud ülekandeks.
- Ülekandeliinina käitub taoline struktuur juhul kui selle mõõtmed (esmajärjekorras pikkus l) on laineomaduste avaldumiseks piisavalt suured ($l > 0,05...0,125 \lambda$).



Energiaülekanne kiirus ülekandeliinis

- Signaali energia kulgeb tüüpilises ülekandeliinis faasikiirusega 50 kuni 80 % valguse kiirusest vaakumis.
- Üksiku elektroni Fermi kiirus toatemperatuuril on suurusjärgus $v_F = 1600 \text{ km/s}$ (vases).

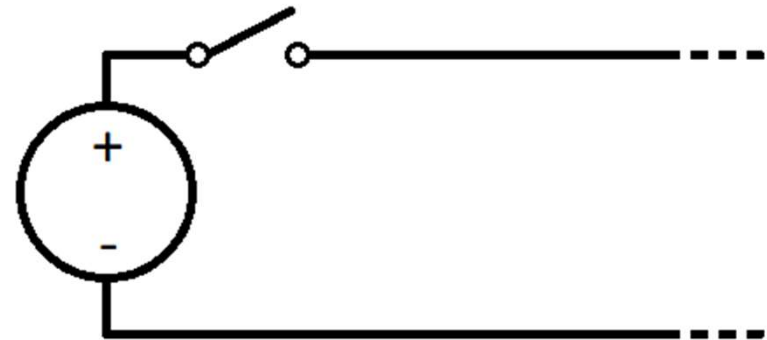


- Elektronide triivkiirus materjalis on leitav avaldisega

$$v = \frac{j}{ne}.$$

- Näiteks: 1 A voolutugevus 2 mm läbimõõduga vaskjuhtmes annab triivkiiruseks ainult $v = 23 \text{ } \mu\text{m/s}$.

Mõtteline eksperiment– Lõputu juhe



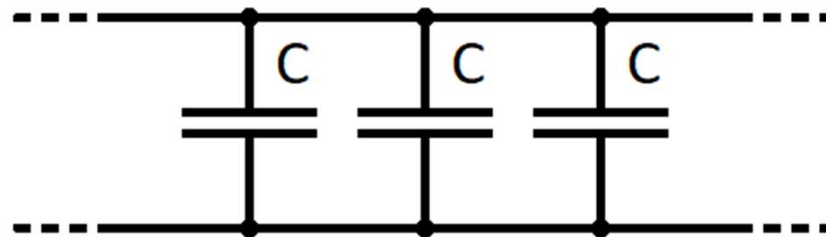
- Kas lüliti sulgemisel tekib lõputus juhtmes vool?
- Kui suur oleks sellisel juhul voolutugevus?
- Kui suur oleks lõputu juhtme impedants?

Mahtuvus pikkusühiku kohta

- Kahe juhi vahel on alati mingi mittenulline mahtuvus C .
- Kui meil on kaks paralleelset ümmargust juhet raadiustega r , millede keskpunktid paiknevad teineteisest kaugusel d , siis on nende vaheline mahtuvus meetri kohta:

$$C = \frac{\pi \varepsilon}{\cosh^{-1} \frac{d}{2r}} \left[\frac{\text{F}}{\text{m}} \right].$$

- Lõputu juhtme aseskeem:

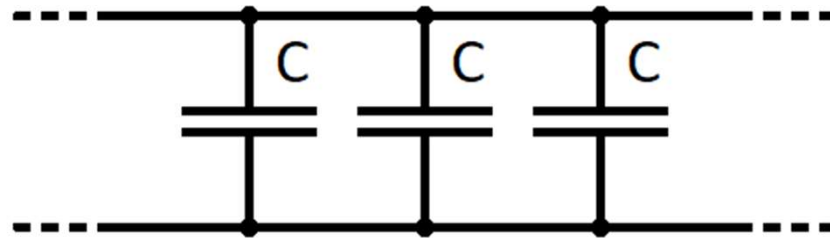


Mahtuvus pikkusühiku kohta

- Kondensaatori laadimisvool on teatavasti:

$$i = C \frac{du}{dt} .$$

- Lõputut juhet läbiks seega **lõpmatu voolutugevus**?

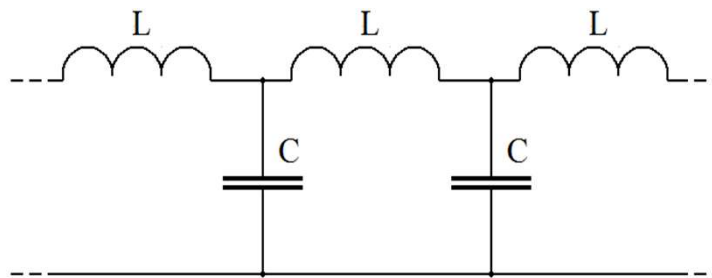


Induktiivsus pikkusühiku kohta

- Mistahes juhil on mingi (enese) induktiivsus L .
- Teatavasti seisab induktiivsus vastu mistahes voolutugevuse muutustele indutseerides vastuelektromotoorjõu

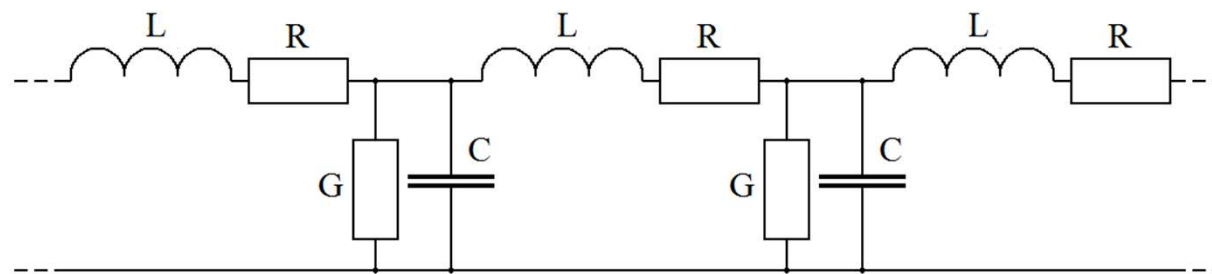
$$u = L \frac{di}{dt} .$$

- Seega tarbiks ka lõputu juhe siiski ainult lõpliku voolu.
- Kaovaba ülekandeliini aseskeem näeb välja alljärgnev:

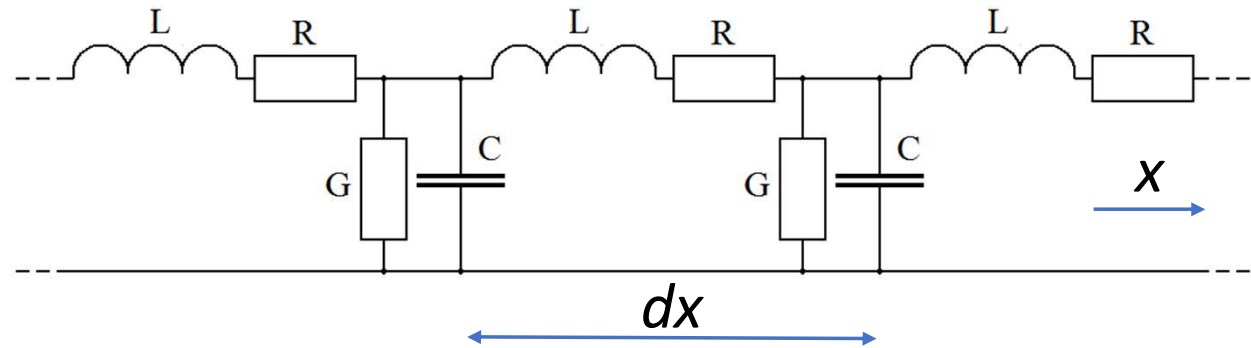


Reaalse ülekandeliini aseskeem

- Reaalsed ülekandeliinid on valmistatud lõpliku juhtivusega σ metallist ning juhtide vaheline isolaator kadudega dielektrilisest materjalist.
- Ülaloodud põhjustel esineb kõikides reaalsetes ülekandeliinides mõningane energiakadu. Aseskeemis väljendatakse viimast jada-
takistusega R [Ω/m] pikkusühiku kohta ning rööpjuhtivusega G [S/m],
seda siis samuti pikkusühiku kohta.



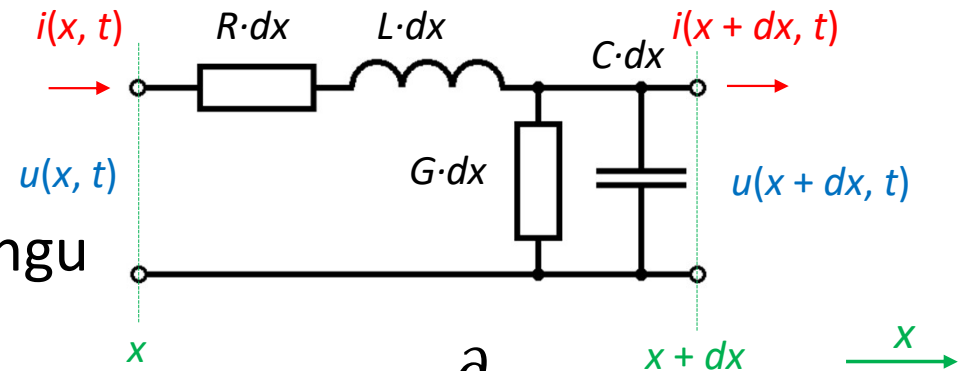
Ülekandeliini aseskeem



- Pinge liinis: $u(x, t)$;
- Voolutugevus liinis: $i(x, t)$;
- Pingelang takistus: $u_R = iR$;
- Pingelang induktiivsus: $u_L = L \frac{di}{dt}$;
- Voolutugevus läbi juhtivuse: $i_G = uG$;
- Voolutugevus läbi mahtuvuse: $i_C = C \frac{du}{dt}$.

Telegraafi võrrandid

- Väljundpinge on sisendpingest madalam takistusel ja induktiivsusel tekkiva pingelangu võrra



$$u(x + dx, t) = u(x, t) - R \cdot dx \cdot i(x, t) - L \cdot dx \frac{\partial}{\partial t} i(x, t).$$

- Teisisõnu on pinge muutus pikkusühiku kohta

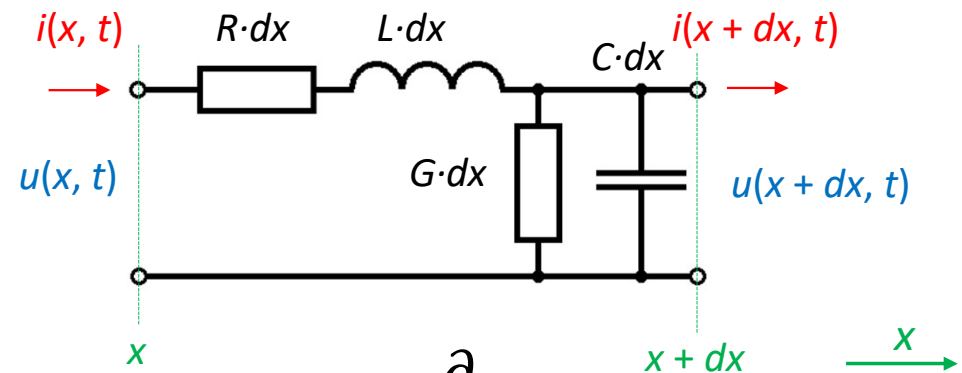
$$du = u(x + dx, t) - u(x, t) = -R \cdot dx \cdot i(x, t) - L \cdot dx \frac{\partial}{\partial t} i(x, t).$$

- Pinge muutus pikki ülekandeliini on seega:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = -R \cdot i(x, t) - L \frac{\partial}{\partial t} i(x, t).$$

Telegraafi võrrandid

- Väljundvool on sisendvoolust nõrgem, juhtivust ja mahtuvust läbiva, hargnenud voolutugevuse võrra



$$i(x + dx, t) = i(x, t) - G \cdot dx \cdot u(x, t) - C \cdot dx \frac{\partial}{\partial t} u(x, t).$$

- Voolutugevuse muutus pikkusühiku kohta

$$di = i(x + dx, t) - i(x, t) = -G \cdot dx \cdot u(x, t) - C \cdot dx \frac{\partial}{\partial t} u(x, t).$$

- Voolutugevuse muutumise kiirus pikki liini

$$\frac{\partial}{\partial x} i(x, t) = -G \cdot u(x, t) - C \frac{\partial}{\partial t} u(x, t).$$

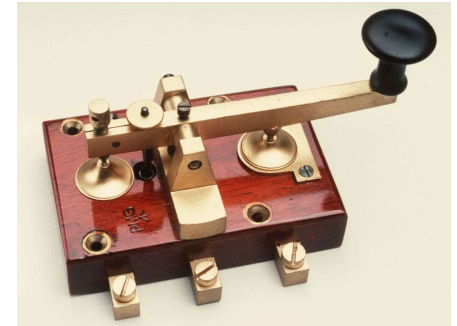
Telegraafi võrrandid

- Tulemuseks on osaliste diferentsiaalvõrrandite süsteem mis seob omavahel pinge- ja voolutugevuse muutused ajas ja ruumis ning ülekandeliini elektrilised parameetrid:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = -Ri(x, t) - L \frac{\partial}{\partial t} i(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} i(x, t) = -Gu(x, t) - C \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \end{cases} .$$

- Saamaks võrrandit mis kirjeldab ainult ühte suurust, näiteks pinget $u(x, t)$, diferentseerime esimest võrrandit asukoha x ja teist aja t järgi.

Telegraafi võrrandid



- Tulemuseks saame

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = -R \frac{\partial}{\partial x} i(x, t) - L \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} i(x, t) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} i(x, t) = -G \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - C \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) \end{cases} .$$

- Teine võrrand eelmisel slaidil:

$$\frac{\partial}{\partial x} i(x, t) = -G u(x, t) - C \frac{\partial}{\partial t} u(x, t).$$

- Nende seoste põhjal on võimalik saada avaldis ainult pinge jaoks.

Telegraafi võrrandid

- Tulemuseks on võrrand mis kirjeldab pinge levimist suunavas süsteemis (ülekanделиinis):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = (RC + GL) \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + RGu(x, t).$$

- Analoogiliselt saab tuletada valemi ka voolutugevuse $i(x, t)$ jaoks:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} i(x, t) - LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} i(x, t) = (RC + GL) \frac{\partial}{\partial t} i(x, t) + RGi(x, t).$$

Kaovaba ülekandeliin

- Kaovabas liinis on R ja G väärtused nullid, võrrandsüsteem lihtsustub kujule

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = -L \frac{\partial}{\partial t} i(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial x} i(x, t) = -C \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \end{cases}.$$

- Samuti lihtsustuvad võrrandid ping- (ja ka voolutugevuse) kohta:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = 0.$$

Kaovaba ülekandeliin

- Viimast saab avaldada, meile juba tuttava, lainevõrrandi kujul:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = v_p^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t).$$

- Viimases on v_p **laine levimise-** ehk **faasikiirus**: $v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
- Suurust, mis näitab, kui palju on faasikiirus v_p ülekandeliinis väiksem, kui vaakumis c , nimetatakse ülekandeliini **kiirusteguriks** (*velocity factor*):

$$VF = \frac{v_p}{c}.$$

- Viimane on analoogiks keskkonna murdumisnäitajale $n = c / v_p$.

Harmooniline signaal ülekandeliinis

- Pinget- ja voolutugevust saab harmooniliste signaalide korral esitada samuti faasorkujul: $U_s(x)$ ja $I_s(x)$.
- Pinge- ja voolutugevuse hetkväärtused saab viimaste kaudu leida, kui

$$u(x, t) = \operatorname{Re}\{U_s(x)e^{j\omega t}\};$$
$$i(x, t) = \operatorname{Re}\{I_s(x)e^{j\omega t}\}.$$

- Faasorkujul kehtib teatavasti seos:

$$\frac{d}{dt}u(x, t) \Leftrightarrow j\omega U_s(x).$$

Harmooniline signaal ülekandeliinis

- Faasorkujul võrrandsüsteem harmoonilise signaali levimisel kaovabas ülekandeliinis oleks seega

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} U_s(x) = -j\omega L I_s(x) \\ \frac{d}{dx} I_s(x) = -j\omega C U_s(x) \end{cases}.$$

- Harmoonilise signaali korral saame seega pinget kirjeldava lainevõrrandi:

$$\frac{d^2}{dx^2} U_s(x) = -k^2 U_s(x),$$

kus k on **lainearv** : $k = \omega\sqrt{LC}$.

Harmoonilise signaali korral

- Tegemist on teist järku hariliku diferentsiaalvõrrandiga, mille üks võimalik lahend on kujul:

$$U_s(x) = U_s^+ e^{-jkx} + U_s^- e^{jkx}.$$

- Väärtused $U_s^+ = U_{s0}^+ e^{j\phi^+}$ ja $U_s^- = U_{s0}^- e^{j\phi^-}$ on määratud piirtingimustega ülekandeliini lõpus ja alguses (peegeldusteguritega).

Lained kaovabas ülekandeliinis.

- Pinge hetkväärtus kaovabas ülekandeliinis:

$$u(x, t) = \operatorname{Re}\{U_s(x)e^{j\omega t}\} = U_{s0}^+ \cos(\omega t - kx + \phi^+) + U_{s0}^- \cos(\omega t + kx + \phi^-).$$

- Näeme, et tegemist on kahe, vastassuundades leviva, harmoonilise lainega.
Mõlema laine levikiirus on

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

- Voolutugevus faasorkujul:

$$I_s(x) = \frac{U_s^+}{Z_0} e^{-jkx} - \frac{U_s^-}{Z_0} e^{jkx}.$$

- Kaovaba ülekandeliini **karakteristlik impedants**:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Harmooniline signaal kadudega ülekandeliinis

- Telegraafi võrrandid kadudega lainejuhi korral annavad tulemuseks:

$$\frac{d^2}{dx^2} U(x) = \gamma^2 U(x).$$

- Kus γ on kompleksne **levikonstant**

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta.$$

- Levikonstandi reaalosa α ehk **sumbetegur** määrab sumbumuse liinis pikkusühiku kohta [Np/m]. Levikonstandi imaginaarosa β näitab faasinihke suurust pikkuseühiku kohta (**faasikonstant**) [rad/m].

Harmooniline signaal kadudega ülekandeliinis

- Karakteristlik impedants kadudega ülekandeliinis:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}}.$$

- Faasorkujul pinge ja voolutugevus kadudega liinis:

$$U_s(x) = U_s^+ e^{-\gamma x} + U_s^- e^{\gamma x} ;$$

$$I(x) = \frac{U_s^+}{Z_0} e^{-\gamma x} - \frac{U_s^-}{Z_0} e^{\gamma x}.$$

Väikeste kadudega ülekandeliin

- Juhul, kui kaod ülekandeliinis on väikesed ($R \ll \omega L$) ja ($G \ll \omega C$), siis on sumbetegur ja faasikonstant leitavad ligikaudsete avaldistega:

$$\alpha = \operatorname{Re}(\gamma) \approx \frac{\sqrt{LC}}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right);$$

$$\beta = \operatorname{Im}(\gamma) \approx \omega \sqrt{LC}.$$

Koaksiaalne ülekandeliin - mahtuvus

- Koaksiaalkaabli mahtuvus pikkusühiku kohta oli mäletatavasti

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} \left[\frac{\text{F}}{\text{m}} \right],$$

kus b ja a on vastavalt välimise ja sisemise juhi raadiused ja ϵ nende vahelise isolaatori dielektriline läbitavus.



Koaksiaalne ülekandeliin - induktiivsus



- Samuti teame, et vaadeldava geomeetria korral on induktiivsus pikkusühiku kohta

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \left[\frac{\text{H}}{\text{m}} \right].$$

- Viimases avaldises on μ kabli isolaatori magnetiline läbitavus, mis praktikas on enamasti väga lähedane vaakumi omale $\mu = \mu_0$.
- Kaovaba koaksiaalkaabli karakteristiklik impedants on seega

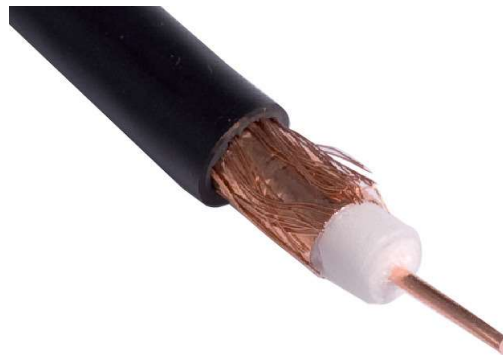
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} [\Omega].$$

Koaksiaalne ülekandeliin - lainetakistus

- Arvestades, et üldjuhul on $\mu = \mu_0$, asetades sisse suuruste arvulised väärtused ja minnes üle naturaalogaritmit kümnenlogaritmile saame koaksiaalkaabli karakteristliku impedantsi kujul

$$Z_0 = \frac{138}{\sqrt{\epsilon_r}} \log \frac{b}{a} ,$$

kus ϵ_r on kaabli dielektriku suhteline dielektriline läbitavus.



Koaksiaalne ülekandeliin - takistus

- Alalisvoolu ja väga madala sagedusega vahelduvvoolu korral on koaksiaalkaabli takistus pikkusühiku kohta

$$R = \frac{1}{2\pi(a+b)d\sigma} \left[\frac{\Omega}{\text{m}} \right],$$

kus d on välimise- ja sisemise juhi paksus. Kui paksused on erinevad (d_a ja d_b), siis asendub avaldises $(a+b)d$ vastavalt $ad_a + bd_b$ -ga.

- Arvestades pinnaefekti näeme, et kaotakistus sõltub sagedusest ($\delta \ll d$):

$$R = \frac{1}{2(a+b)} \sqrt{\frac{\mu f}{\pi \sigma}} \left[\frac{\Omega}{\text{m}} \right].$$

Koaksiaalne ülekandeliin - juhtivus

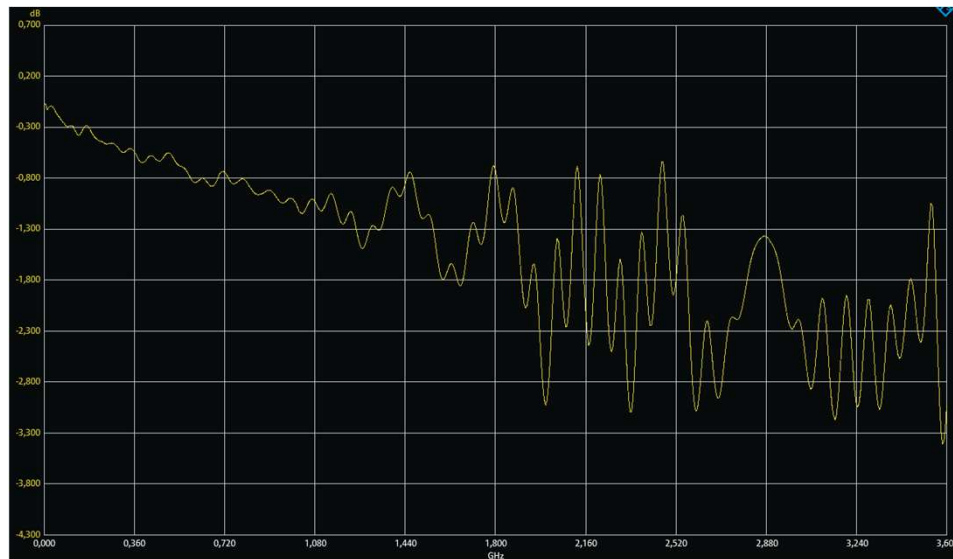
- Juhtivuse ülekandeliini aseskeemis põhjustavad peamiselt kaod juhtide vahelises dielektrikus. Arvestades, et mõningase juhtivusega keskkonnas on $\sigma = \omega\epsilon''$ saame:

$$G = \frac{2\pi\omega\epsilon''}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{4\pi^2 f \epsilon''}{\ln \frac{b}{a}} \left[\frac{S}{m} \right].$$

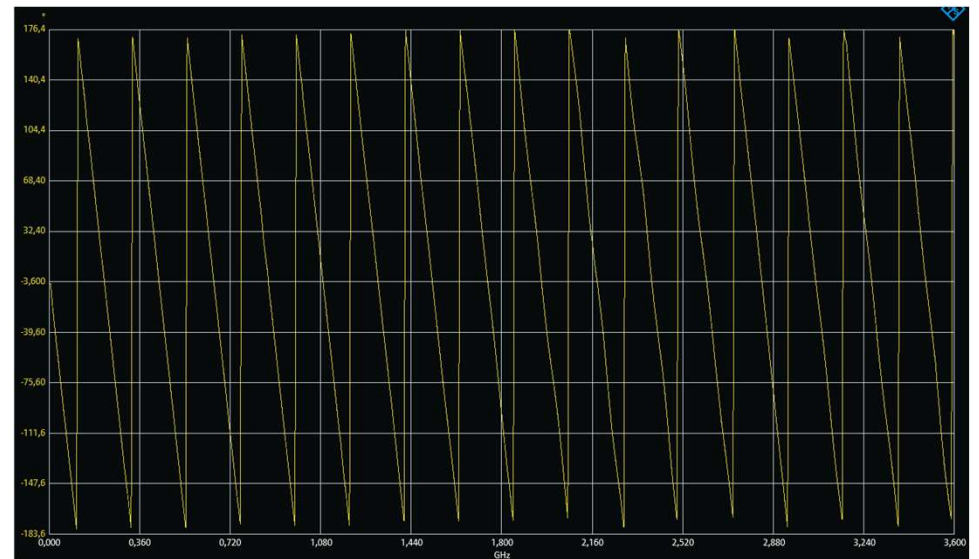
- Siinkohal tuleb meeles pidada, et üldjuhul on ϵ'' sagedusest sõltuv! Madalatel sagedustel võib ta väärtus olla nullilähedane.

Ülekande sagedussõltuvus

Koaksiaalkaabli ülekanne – amplituudi sagedussõltuvus.



Koaksiaalkaabli ülekanne – faasi sagedussõltuvus.



Koormatud ülekandeliini impedants

- Alljärgnevate avaldiste tuletuskäik ja matemaatiline sisu on identsed mitmekordsete peegelduste analüüsi juhuga ühtlase tasalaine korral.

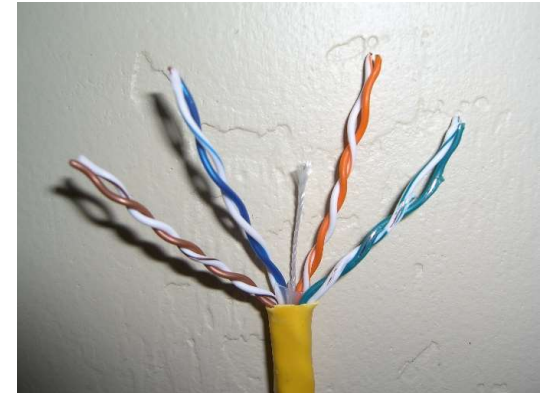
- Ülekandeliini Impedants koormusest Z_L kaugusel x :

$$Z(x) = Z_0 \frac{Z_L - Z_0 \tanh(\gamma x)}{Z_0 - Z_L \tanh(\gamma x)}.$$

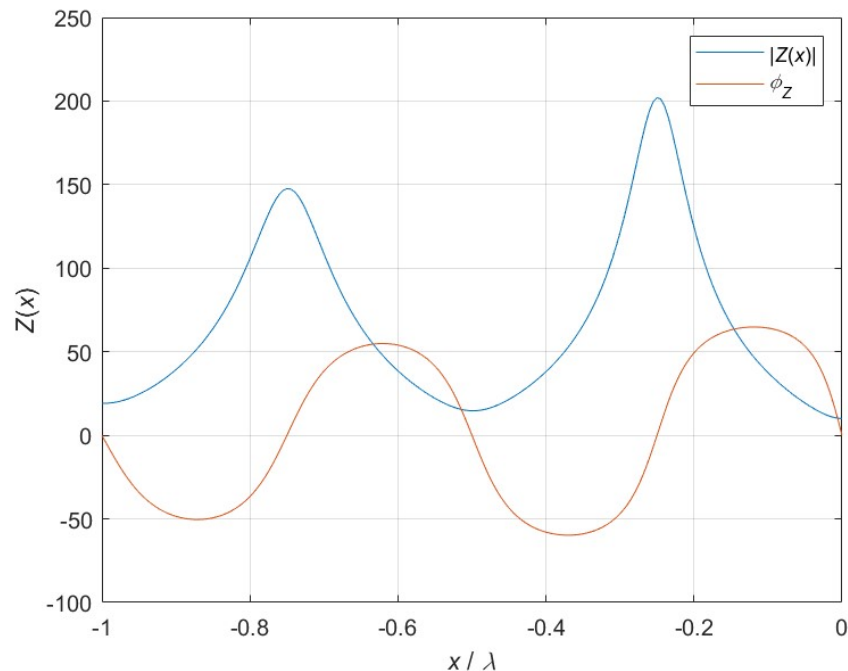
- Kus hüperboolne tangens on defineeritud kui:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

$$\Gamma(x) = \Gamma_L e^{2\gamma x}$$



Näide: koormatud kadudega ülekandeliin



- Kadudega liini lainetakistus on $Z_0 = 50 \, \Omega$ koormuse takistus on $Z_L = 10 \, \Omega$. Liini levitegur on $\gamma = 0,2 + 2\pi j$.
- Näeme, et graafik on kvaasiperioodiline – kuju kordub, kuid mitte täpselt.

Kaovaba koormatud ülekandeliini impedants

- Kaovaba liini korral jääb levitegurist γ alles ainult lainearv k .
- Koormatud liini impedants on sellisel juhul perioodiline (perioodiga $\lambda/2$)

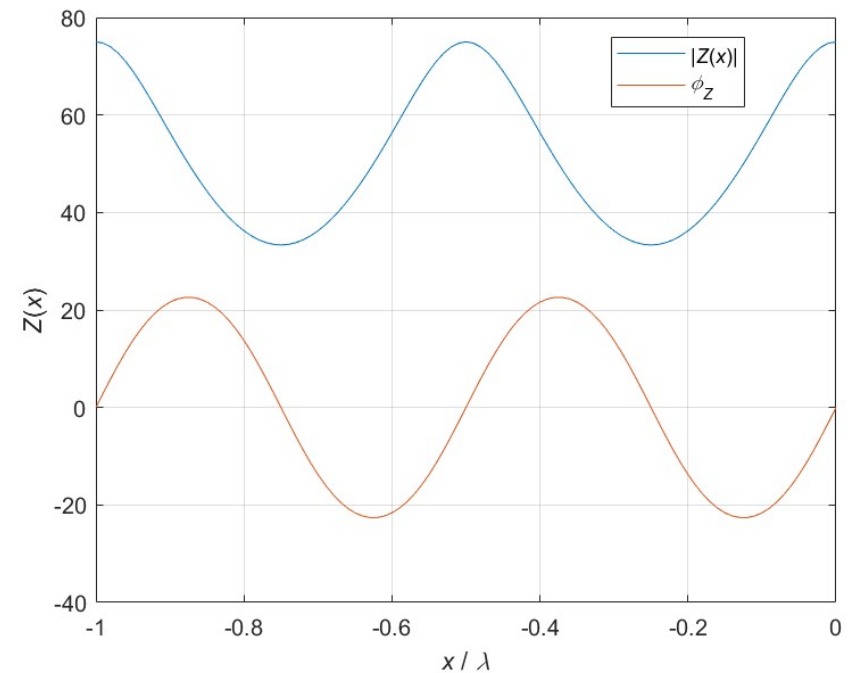
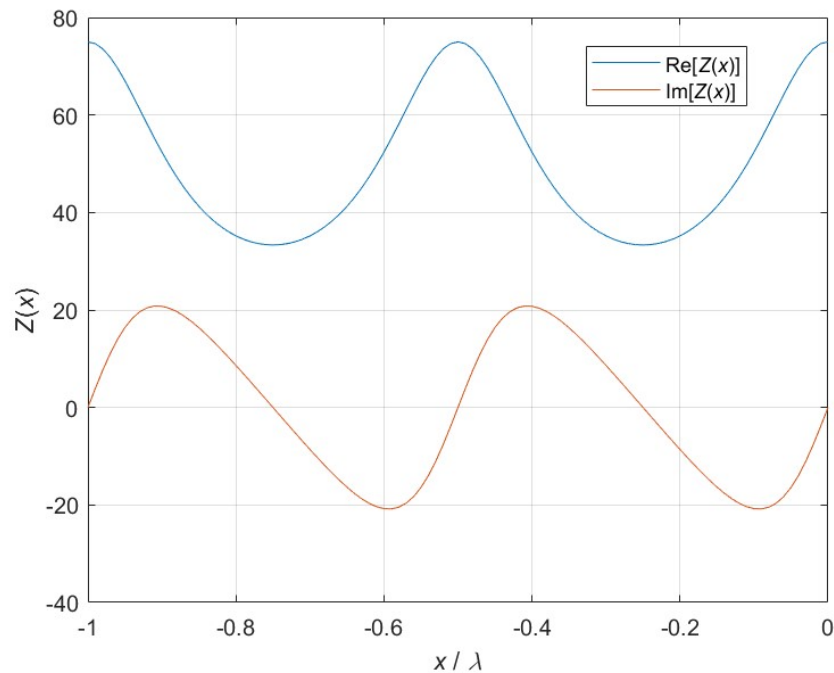
$$Z(x) = Z_0 \frac{Z_K - jZ_0 \tan(kx)}{Z_0 - jZ_K \tan(kx)}$$

- NB! Koormuse asukohale vastab vahepunkt $x = 0$, kaugus x allika suunas (vasakule) on seega **negatiivne!**

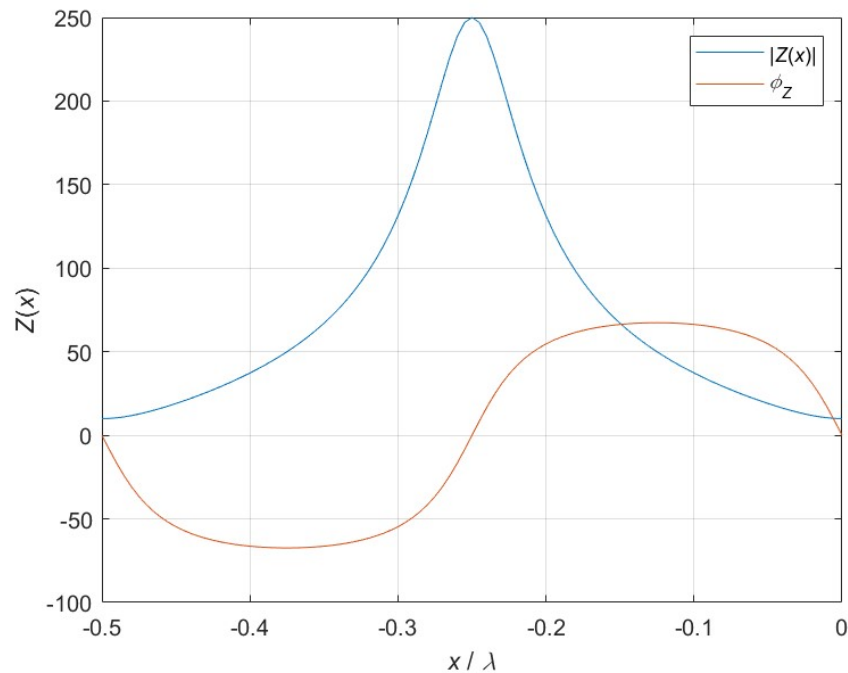


Näide: koormatud kaovaba ülekandeliin

Kaovaba ülekandeliin lainetakistusega $Z_0 = 50 \, \Omega$ on koormatud $Z_L = 75 \, \Omega$ takistiga. Faasinurk ϕ_Z parempoolsel joonisel on kujutatud kraadides $^\circ$.



Näide: koormatud kaovaba ülekandeliin



- Kaovaba ülekandeliini lainetakistus on $Z_0 = 50 \, \Omega$ koormuseks on $Z_L = 10 \, \Omega$ takisti.
- Sõltuvus on perioodiline.

Materjalid

- W.H. Hayt, J.A. Buck. **Engineering Electromagnetics**. 6th ed. Kolmeteistkümmes peatükk.
- Shang-Da Yang. Lesson 04 Steady-state Response of Transmission Lines. www.ee.nthu.edu.tw/~sdyang/Courses/EM/Lesson04_Std.pdf, 19.05.25

