

KLASSIKALISED JAOTUSED

1. BINOOMJAOTUS

Juhuslikku suurust X , mille võimalike väärtuste hulgaks on naturaalarvud $0, 1, \dots, n$ ja millele vastavad tõenäosused arvutatakse Bernoulli valemiga

$$P(X = m) = P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

nimetatakse **binoomjaotusega juhuslikuks suuruseks**.

Asjaolu, et juhuslik suurus X on binoomjaotusega *parameetritega* n ja p märgitakse lühidalt: $X \sim B(n, p)$.

Binoomjaotuse tõenäosused võrduvad binoomi $(q + p)^n$ arenduse vastavate liikmetega:

$$(q + p)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m}$$

Viimasest valemist järeldub ka, et selle juhusliku suuruse kõigi võimalike väärtuste tõenäosuste summa võrdub ühega, kuna

$$(q + p)^n = 1^n = 1.$$

Binoomjaotusega juhuslik suurus on diskreetne. Seetõttu ei eksisteeri sellel ka tõenäosuse tihedust (tihedusfunktsiooni). Binoomjaotusega suuruse jaotuspolügooni nimetatakse sageli ka **binoompolügooniks**.

Näide: Koostada sageduse k jaotustabel ja binoompolügoon, kui $n = 6$ ja $p = 0,7$.

Lahendus: Sageduse k tõenäosused leiame Bernoulli valemist:

$$P_{6,m} = C_6^m \cdot 0,7^m \cdot 0,3^{6-m}$$

Jaotustabel:

X	p
0	0,0007
1	0,0102
2	0,0595
3	0,1852
4	0,3241
5	0,3025
6	0,1176



1.1. BINOOMJAOTUSEGA JUHUSLIKU SUURUSE KESKVÄÄRTUS

Diskreetse juhusliku suuruse keskväärtuse definitsiooni kohaselt:

$$EX = \sum_{m=0}^n m \cdot C_n^m p^m q^{n-m} \quad (1)$$

Selle keskväärtuse leidmiseks diferentseerime p järgi võrrandit

$$(q + p)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (2)$$

Tulemuseks on võrrand

$$n \cdot (q + p)^{n-1} = \sum_{m=0}^n m \cdot C_n^m p^{m-1} q^{n-m}.$$

Selle võrrandi korrutame läbi arvuga p :

$$np \cdot (q + p)^{n-1} = \sum_{m=0}^n m \cdot C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (3)$$

Võrrandite (1) ja (3) paremad pooled langevad kokku, järelikult peavad võrdsed olema ka vasakud pooled:

$$EX = np \cdot (q + p)^{n-1} = np.$$

Dispersiooni leidmiseks kasutame valemit $DX = EX^2 - (EX)^2$. Leiame esmalt EX^2 :

$$EX^2 = \sum_{m=0}^n m^2 \cdot C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Summa leidmiseks diferentseerime valemit (2) kaks korda p järgi:

$$n \cdot (n-1) \cdot (q + p)^{n-2} = \sum_{m=0}^n m \cdot (m-1) \cdot C_n^m p^{m-2} q^{n-m}$$

$$n \cdot (n-1) \cdot p^2 \cdot (q + p)^{n-2} = \sum_{m=0}^n m \cdot (m-1) \cdot C_n^m p^m q^{n-m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cdot (n-1) \cdot p^2 = \sum_{m=0}^n m^2 \cdot C_n^m p^m q^{n-m} - \sum_{m=0}^n m \cdot C_n^m p^m q^{n-m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \cdot (n-1) \cdot p^2 = EX^2 - EX \Rightarrow EX^2 = n \cdot (n-1) \cdot p^2 + np$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = n \cdot (n-1) \cdot p^2 + np - (np)^2 = np(1-p) = npq.$$

Standardhälve: $\sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{npq}$

Binoomjaotusega juhusliku suuruse mood e. tõenäoiseim sagedus m_0 :

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

Kui $np - q$ ei ole täisarv, siis

$$m_0 = \underbrace{[np - q]}_{\text{täisosa}} + 1.$$

Kui $np - q$ on täisarv, siis on binoomjaotusega juhuslikul suurusel kaks väärtust, mille esinemistõenäosus on ülejäänute omast suurem. Need on

$$m_0 = np - q \quad \text{ja} \quad m_0 = np - q + 1$$

Kui $p = 1/2$, siis on binoomjaotusega juhuslik suurus sümmeetriline.

2. POISSONI JAOTUS

Kui Bernoulli valemis on n suur, on tema kasutamine komplitseeritud. Seetõttu kasutatakse sageli ka binoomjaotuse piirjaotusi, millest üheks on *Poissoni jaotus* (harva esinevate sündmuste jaotusseadus).

Poissoni jaotus on binoomjaotuse piirjaotuseks sel juhul, kui katseseeria pikkus $n \rightarrow \infty$, tõenäosus $p \rightarrow 0$ selliselt, et korrutis $\lambda = np$ püsib konstantsena (läheneb konstandile).

Osutub, et sel korral

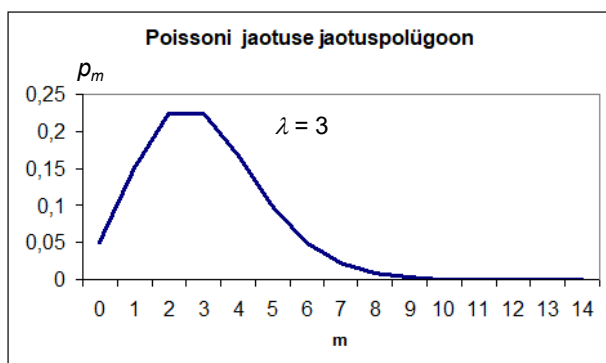
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X = m) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Juhuslikku suurust, mille võimalike väärtuste hulgaks on täisarvud 0, 1, 2, ... ja mille jaotus on määratud valemiga

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

nimetatakse **Poissoni jaotusega juhuslikuks suuruseks**.

Sümboolselt tähistatakse asjaolu, et juhuslik suurus on Poissoni jaotusega, $X \sim P(\lambda)$.



Poissoni jaotusega on näiteks radioaktiivses aines lagunevate aatomite arv ajaühikus, telefonikeskjaama teatud ajavahemiku vältel laekuvate väljakutsete arv jne.

Jämeda hinnanguna on Poissoni jaotuse kasutamine õigustatud, kui $np \leq 5$ ja $n \geq 30$.

2.1. POISSONI JAOTUSE PARAMEETRID

Poissoni jaotuse keskväärtus: $EX = \lambda = np$

Poissoni jaotuse dispersioon: $DX = \lambda = np$

Poissoni jaotuse standardhälve: $\sigma X = \sqrt{\lambda} = \sqrt{np}$.

Teine kriteerim Poissoni jaotuse kasutamiseks:

Poissoni jaotust võib kasutada ligikaudse jaotusena juhul, kui juhusliku suuruse täpseks jaotuseks on binoomjaotus, mille keskväärtus erineb vähe dispersioonist, s.o. kui

$$np \approx npq.$$

Näide: Aparatuur koosneb 1000 elemendist, kusjuures elemendid töötavad üksteisest sõltumatult. Tõenäosus elemendi riknemiseks ajavahemiku T jooksul olgu kõikide elementide jaoks ühesugune ja võrdne 0,0005-ga. Leida tõenäosus, et ajavahemiku T jooksul rikneb mitte rohkem kui 2 elementi.

Lahendus: Tehtud eeldustel on ajavahemiku T jooksul riknenud elementide arv binoomjaotusega, $X \sim B(1000; 0,0005)$. Kuna $n \geq 30$ ja $np = 1000 \cdot 0,0005 = 0,5 \leq 5$, siis on Poissoni jaotuse kasutamine õigustatud.

Poissoni jaotuse parameeter:

$$\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0,0005 = 0,5.$$

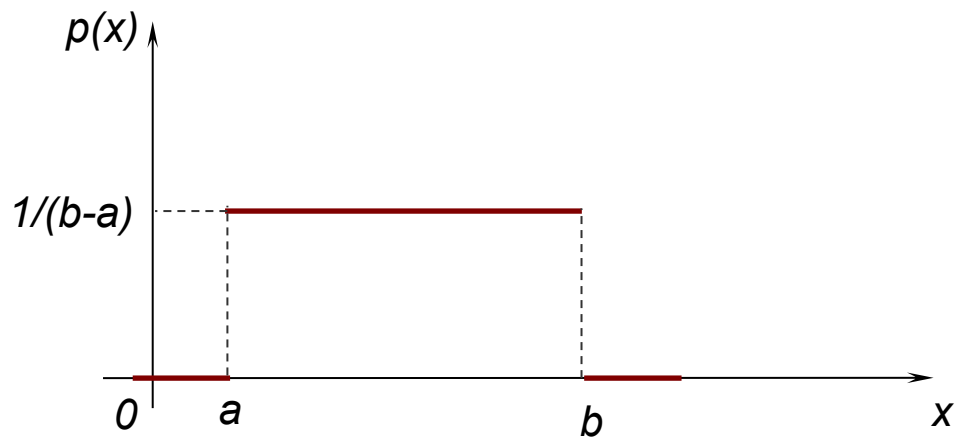
$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\ &= \frac{0,5^0}{0!} e^{-0,5} + \frac{0,5^1}{1!} e^{-0,5} + \frac{0,5^2}{2!} e^{-0,5} \approx 0,986 \end{aligned}$$

3. ÜHTLANE JAOTUS

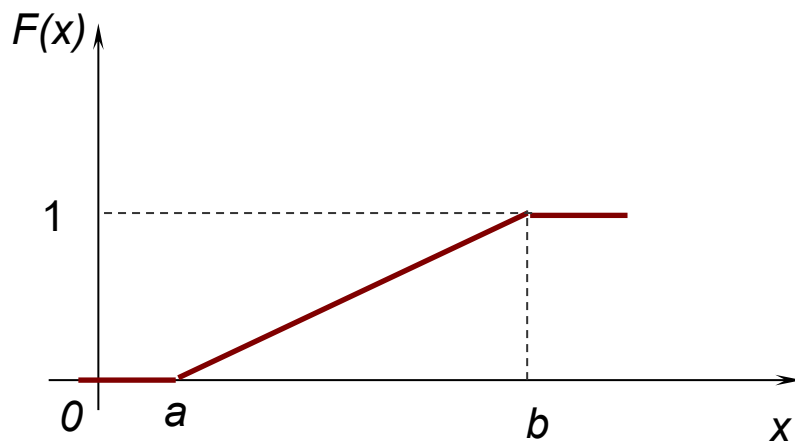
Pidev juhuslik suurus X on *ühtlase jaotusega* lõigul $[a; b]$, kui sellel lõigul on tema tihedusfunktsioon konstantne ja väljapool seda lõiku võrdne nulliga:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{kui } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{kui } x > b. \end{cases}$$

Ühtlase jaotuse tihedusfunktsioon



Ühtlase jaotuse jaotusfunktsioon



Asjaolu, et juhuslik suurus X on ühtlase jaotusega lõigul $[a; b]$, tähistatakse sümboliseelt $X \sim U(a; b)$.

3.1. ÜHTLASE JAOTUSE PARAMEETRID

Ühtlase jaotusega juhusliku suuruse keskväärus:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

Ühtlase jaotusega juhusliku suuruse dispersioon:

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

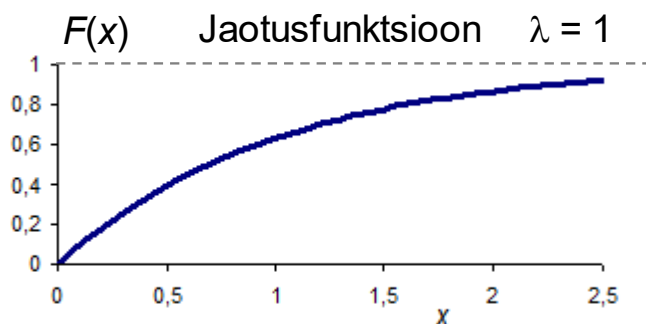
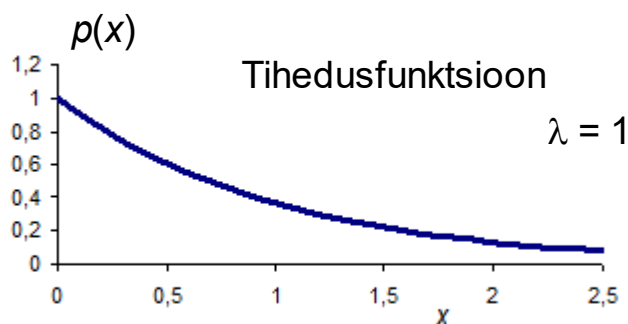
Ühtlase jaotusega juhusliku suuruse standardhälve: $\sigma(X) = \sqrt{DX} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

4. EKSPONENTJAOTUS

Öeldakse, et juhuslik suurus X on eksponentjaotusega, kui tema tihedusfunktsiooniks on

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \text{ kui } x \geq 0, \\ 0 & , \text{ kui } x < 0. \end{cases}$$

Eksponentjaotusega juhusliku suuruse jaotusfunktsioon: $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \text{ kui } x \geq 0, \\ 0 & , \text{ kui } x < 0. \end{cases}$



4.1. EKSPONENTJAOTUSE PARAMEETRID

Keskväärtus: $EX = \frac{1}{\lambda}$

Dispersioon: $DX = \frac{1}{\lambda^2}$

Standardhälve: $\sigma X = \sqrt{DX} = \frac{1}{\lambda}$.

Näide: Raadiolambi tööiga T on eksponentjaotusega juhuslik suurus keskväärtusega 400 tundi. Leida tõenäosus selleks, et raadiolamp funktsioneerib vähemalt 600 tundi.

Lahendus: Kuna $EX = \frac{1}{\lambda} = 400$, siis $\lambda = 1/400$.

Otsitav tõenäosus

$$P(T \geq 600) = 1 - P(T < 600) = 1 - F(600) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{400} \cdot 600}) = e^{-1,5} \approx 0,2231$$

5. NORMAALJAOTUS

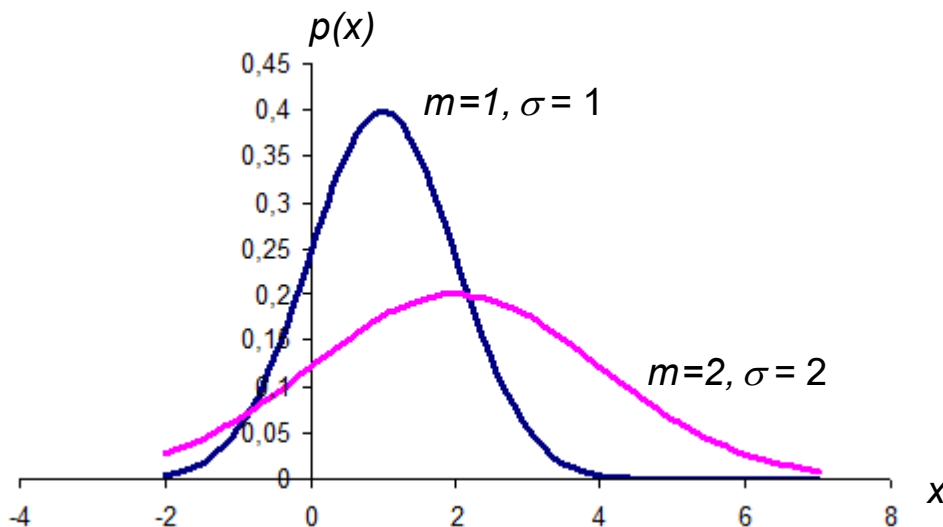
Kui pideva juhusliku suuruse tihedusfunktsiooniks on funktsioon

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

siis öeldakse, et see suurus on **normaaljaotusega** e. **Gaussi jaotusega**.

Kui $m = 0$ ja $\sigma = 1$, siis nimetatakse vastavat normaaljaotust **normeerituks**.

Normaaljaotuse tihedusfunktsioon



5.1. NORMAALJAOTUSE PARAMEETRID

Keskväärtus: $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = m$ (asendusega $t = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$)

Dispersioon: $DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 p(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$
(asendusega $t = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$)

Standardhälve: $\sigma(X) = \sigma$

5.2. NORMAALJAOTUSEGA JUHUSLIKU SUURUSE ANTUD VAHEMIKKU SATTUMISE TÕENÄOSUS.

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right)$$

(Asendus $t = \frac{x-m}{\sigma}$). Funktsiooni $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ nimetatakse Laplace'i

funktsiooniks e. **tõenäosuse integraaliks**.

Laplace'i funktsiooni omadusi:

- $\Phi(0) = 0$
- $\Phi(\infty) = 0,5$
- $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

Näide: Kui tõenäone on normaaljaotusega juhusliku suuruse $X \sim N(100, 5)$ väärtuste langemiseks vahemiku (90, 105)?

Lahendus: Leiame $u_1 = \frac{90-100}{5} = -2$, $u_2 = \frac{105-100}{5} = 1$

$$P(90 < X < 105) = \Phi(1) - \Phi(-2) = 0,34134 + 0,47725 = 0,81859.$$

Näide: Kui tõenäone on normaaljaotusega juhusliku suuruse $X \sim N(m, s)$ tsentreeritud hälbe absoluutväärtus $|X - m|$ ei ületa standardhälbe k -kordset ($k = 1, 2, 3$)?

Lahendus: Eesmärgiks on leida $P(|X - m| < k\sigma) = P(m - k\sigma < X < m + k\sigma)$

$$u_1 = \frac{m - k\sigma - m}{\sigma} = -k, \quad u_2 = \frac{m + k\sigma - m}{\sigma} = +k$$

$$P(m - k\sigma < X < m + k\sigma) = \Phi(k) - \Phi(-k) = 2\Phi(k)$$

$$k = 1: \quad P(m - \sigma < X < m + \sigma) = 2\Phi(1) \approx 0,6826$$

$$k = 2: \quad P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) = 2\Phi(2) \approx 0,9544$$

$$k = 3: \quad P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) = 2\Phi(3) \approx 0,9974$$

5.3. NORMAALJAOTUSE JAOTUSFUNKTSIOON

Normaaljaotuse jaotusfunktsioon avaldub Laplace'i funktsiooni kaudu järgmiselt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \dots = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Normeeritud normaaljaotuse korral kehtib seos: $F(-x) = 1 - F(x)$.

Näide: Leida juhusliku suuruse $X \sim N(8, 2)$ jaotusfunktsiooni väärtus kohal $X = 10$

Lahendus: $F(10) = 1/2 + \Phi((10 - 8)/2) = 1/2 + \Phi(1) = 0,8413$.