

SIIRDEPROTSESSID KOONDPARAMEEETRITEGA

LINEAARSETES ELEKTRIAHELATES

1. Siirdeprotsesside teke elektriahelas.....	2
2. Siirdeprotsesside arvutamise põhimeetodid elektriahelas:	2
3. Kommutatsiooniseadused ja algtingimused.....	3
4. Siirdeprotsessi püsi- ja vabarežiimid.....	5
5. Siirdeprotsess <i>RL</i> -ahelas.....	7
5.1 <i>RL</i> -ahela lülitamine alalispingele	7
5.2 <i>RL</i> -ahela lühistamine.....	8
5.3 <i>RL</i> -ahel lülitatakse siinuselisele emj-le	9
6. Siirdeprotsess <i>RC</i> -ahelas	11
6.1 <i>RC</i> -ahela lülitamine alalispingele	11
6.2 <i>RC</i> -ahela lühistamine	12
6.3 <i>RC</i> -ahela lülitamine siinuspingele	13
7. <i>RLC</i> –jadaahela lühistamine.....	16
(a) Aperioidiline siirdeprotsess	18
(b) Aperioidiline piirjuhtum.....	19
(c) Võnkerežiim, so siirdeprotsess sumbub võnkumistena.....	20
(d) Sumbumatu võnkumine	21
8. <i>RLC</i> -jadaahela lülitamine alalis- ja siinuspingele	22
8.1 <i>RLC</i> -ahela lülitamine alalispingele	22
8.2 <i>RLC</i> -ahela lülitamine siinuspingele	23
9. Siirdeprotsessi arvutuskäik klassikalisel meetodil.....	25

1. Siirdeprotsesside teke elektrialhas

Elektrotehnika kursuse esimese osa käsitlevates peatükkides oli vool konstantne või muutus perioodilise seaduspära kohaselt (alalis- või vahelduvvool). Tegelikuses eelneb sellise püsirežiimi tekkimisele alati **siirderežiim**, mille vältel ahela voolud-pinged-võimsused lähevad ühelt püsirežiimilt üle teisele püsirežiimile.

Siirderežiimi vältel muutuvad ahelas voolud ja pinged (ka pingelangud) **mitteperioodilise** seaduspära järgi.

Siirderežiimid tekivad elektrialhas **sisse-** või **väljalülitamisel** ning ka **ümberlülitamisel**. Neid lülitamisi nimetame **kommuteerimisprotsessideks**. 

Teoreetiliselt loetakse **kommuteerimiseks** kuluvat aega lõpmatult väikeseks, so $t_{kom} \rightarrow 0$. Tegelikuses see päris nii ei ole – tekib muutuv kontakttakistus $r_k(t)$.

Kommutatsioonile järgnev siirdeprotsess nõuab alati teatud aega, kui elektrialhas on sees energiat salvestavaid elemente (L või C). Põhjuseks on see, et kui muutuvad L või C töörežiimid ja seega ka nende energiad $\left(w_L = \frac{Li^2}{2}; w_C = \frac{Cu_C^2}{2} \right)$, siis selline energia muutumine nõuab teatud aega.

Kui energia muutumine saaks olla hüppeline, siis peaks sellele vastama lõpmatult suur võimsus:

$$p = \frac{dw}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \infty; \text{ see aga pole võimalik.}$$

Analoogia mehaanikaga – inerts.

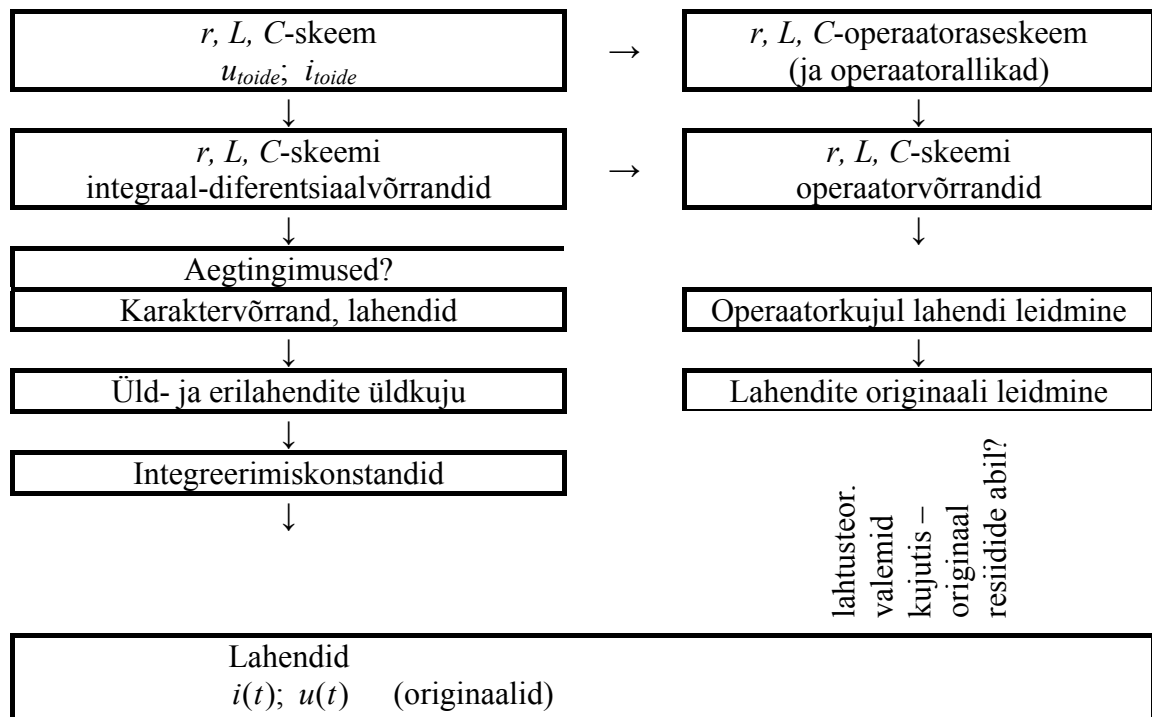
Näiteks vagunite sorteerimisjaamas vagun pörkub paigalseisva rongiga.

2. Siirdeprotsesside arvutamise põhimeetodid elektrialhas:

1. **Klassikaline meetod** – seisneb siirderežiimi kirjeldavate integraal-diferentsiaalkujuliste võrrandite lahendamises matemaatiliselt **integreerimise teel**.
2. **Operaatormeetod** – põhineb **Laplace teisendustele** elektrialhas siirderežiimi ajalisel kirjeldamisel.
3. **Spektraal-** ehk **sagedusmeetod** – põhineb **Fourier'i integraalide** kasutamisel.

Siirdeprotsesside lahendamisel lähtume lineaarsetest elementidest elektrialhas. Siirdeprotsesside määratlemine muutub aga väga keerukaks, kui ahela elementide parameetrid sõltuvad vooludest või pingetest. See on nii, kui elektrialhas on mittelineaarset elemente, elektrikaar või ferromagnetiliste omadustega elemente (trafo induktsoonpoolid ferromagnetilistel südamikel jne). Probleem taandub siis siirdeprotsessi kirjeldavate mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite integreerimisele, millega kaasnevad suured matemaatilised raskused käsitsi arvutamisel.

Siirdeprotsesside arvutamise meetodid elektrialhelates

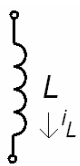


3. Kommutatsiooniseadused ja algtingimused

Siirdeprotsesside tekke aluseks on asjaolu, et elektrialhela reaktiivelementidel energia ei saa muutuda hüppeliselt. See võimaldab formuleerida **2 kommutatsiooniseadust**:

1. Elektrialhela mistahes induktiivses harus **elektrivool** (ja ka magnetvoog) **ei saa muutuda hüppeliselt**, st vool induktiivsuses vahetult enne kommutatsiooni peab võrduma vooluga vahetult pärast kommutatsiooni:

$$i_{L(0-)} = i_{L(0+)} \quad (1)$$



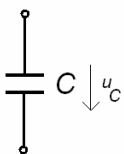
kus $i_{L(0-)}$ – vool hetkel, kus lülitamist pole veel toimunud,

$i_{L(0+)}$ – vool hetkel vahetult pärast lülitamist.

See on **I kommutatsiooniseadus**.

2. Elektrialhela mistahes mahtuvuslikus harus ei saa mahtuvuse pinge (ja laeng) muutuda hüppeliselt, st pinge kondensaatoril enne ja pärast kommutatsiooni peab olema võrdne

$$u_{C(0-)} = u_{C(0+)} \quad (2)$$



See on **II kommutatsiooniseadus**.

Ahelas võib esineda R , L või C -elemente. Nendel kõigil võib hetkel $t = 0 -$ vaadelda nii pinget kui ka voolu; neid voolusid ja pingeid nimetatakse **algtingimusteks**

$$(i_{L(0-)}; u_{L(0-)}; i_{C(0-)}; u_{C(0-)}; i_{R(0-)}; u_{R(0-)}).$$

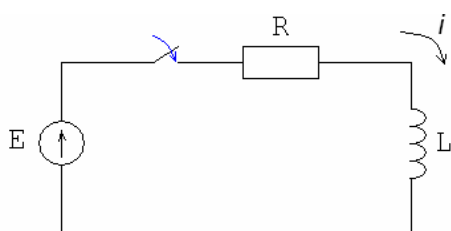
Kuna $i_{L(0-)}$ ja $u_{C(0-)}$ ei muuda oma väärtusi kommutatsiooniprotsessis hüppeliselt ja hetkel $t=0+$ on nende väärtused endised

$$\begin{cases} i_{L(0-)} = i_{L(0+)}; \\ u_{C(0-)} = u_{C(0+)} \end{cases}$$

Selle tõttu nimetame $i_{L(0-)}$ ja $u_{C(0-)}$ **sõltumatuteks algtingimusteks** (võib tähistada lihtsalt $i_{L(0)}$ ja $u_{C(0)}$). Need suurused on määratud vaid kommutatsioonile eelneva režiimi tingimustega, ei sõltu kommutatsiooni hetke $t = 0 -$ või $t = 0 +$ väärtusest, ka mitte kommutatsioonijärgsest skeemist.

Kõiki **teisi suursi** ($i_{C(0)}$; $i_{R(0)}$; $u_{L(0)}$; $u_{R(0)}$) nimetatakse **sõltuvateks algtingimusteks**, kuna nende väärtused on sõltuvad kommutatsioonijärgsest skeemist ja võivad muutuda hüppeliselt oma väärtuste poolest.

Näide



Algtingimuste määramine

Sõltumatu algtingimus : $i_{L(0-)} = 0 = i_{L(0+)};$

ülejäänud algtingimused:

$$t = 0-; \quad i_{R(0-)} = 0; \quad u_{R(0-)} = 0; \quad u_{L(0-)} = 0;$$

$$t = 0+; \quad i_{R(0+)} = 0 \quad (\text{sest jadamisi on } i_{L(0+)} = 0).$$

Ülejäänud tuleb leida Kirchhoffi seaduste abil:

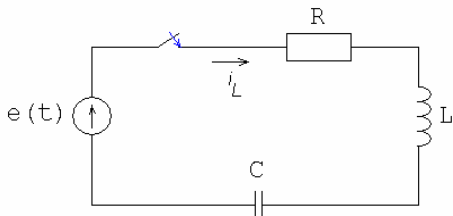
$$Ri + L \frac{di}{dt} = E \quad \text{ehk} \quad u_R + u_L = E.$$

$$t = 0+ \quad Ri_{R(0+)} + u_{L(0+)} = E, \text{ so } u_{R(0+)} = 0 \quad \text{ja} \quad u_{L(0+)} = E.$$

4. Siirdeprotsessi püsi- ja vabarežiimid

Siirdeprotsessi arvutamine seisneb üldjuhul mittehomogeensete lineaarsete diferentsiaalvõrrandite lahendamises, kusjuures need võrrandid on koostatud Kirchhoffi seaduste põhjal.

Näiteks skeem



Hetkel $t=0$ kommuteeritakse ahel, seal tekib vool i ning skeemi kontuuri kohta saame kirjutada Kirchhoffi II seaduse põhjal:

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = e(t). \quad (3)$$

Et saada puhas diferentsiaalvõrrandit, diferentseerime veel kord

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{de(t)}{dt}. \quad (4)$$

Lahend (siirdevool) koosneb vaadeldava **mittehomogeense** võrrandi **erilahendist** ja vastava **homogeense** võrrandi üldlahendist.

$$i(t) = i_s(t) + i_v(t)$$

Erilahendit $i_s(t)$ nimetame **sundvooluks** ja selle all mõistame voolu, mis esineb kommutatsioonijärgses ahelas **ainult** tingituna **energiaallikate** (emj-allikate) mõjust. Selle sundvoolu väärtusele **ei mõju** siirdeprotsessi algtingimused, so energiavarud mahtuvustel ja induktiivsustel.

Sundvool on püsivool, mille muutumise perioodilisus on samasugune kui toiteallikal $e(t)$ ja mis avaldub

$$i_s(t) = \frac{e(t)}{z(t)}. \quad (5)$$

Siinuselise emj korral, kui $e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$, avaldub sundvool $i_s = I_{mS} \sin(\omega t + \psi_i)$, kusjuures

$$\dot{I}_{mS} = I_{mS} \angle \psi_{iS} = \frac{E_m \angle \psi_e}{\underline{z}} = \frac{E_m \angle \psi_e}{z \angle \psi_z}. \quad \angle \psi_z = \varphi$$

Vabavool on lähevõrrandile vastava homogeense võrrandi (so parem pool =0) üldlahend. Muudame oma mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi homogeenseks:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (6)$$

Selle võrrandi lahendiks ongi **vabavool** $i_v(t)$, mis tekib ahelas **ilma välise energiaallika** mõjuta (parem pool =0 võrrandis). Vabavoolu tekkimine toimub ahela reaktiivelementide energia muutumise arvel.

Diferentsiaalvõrrandi (6) üldlahendit otsime kujul

$$i_v(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (7)$$

Selles üldavaldises on suurused A_1 ja A_2 – integreerimiskonstandid, mis määratakse **algtingimuste** järgi.

Suurused p_1 ja p_2 iseloomustavad siirdeprotsessi kulgemise ja vabavoolu muutumise kiirust. Need määratakse **karakteristliku võrrandi lahenditena**; karakteristlik võrrand saadakse homogeenest diferentsiaalvõrrandist (6), asendades $\frac{d}{dt} \rightarrow p$ ja võttes $i_v(t)$ sulgude ette.

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0. \quad (8)$$

Selle karakteristliku võrrandi lahendid ongi p_1 ja p_2 .

Üldlahend $i_v(t) \rightarrow 0$, kui $t \rightarrow \infty$ – sumbuvad.

Niisiis on **siirdevool avaldub kui summa sund- ja vabavoolust** (samamoodi on lugu ka pingetega):

$$i(t) = i_s(t) + i_v(t) \quad (9)$$

i_s – sundvool; i_v – vabakomponent ehk mööduvkomponent.

$$u(t) = u_s(t) + u_v(t) \quad (10)$$

Ajahetkel $t=0$ avaldub induktiivvool

$$\begin{cases} i_{L(0+)} = i_{LS(0+)} + i_{Lv(0+)}; \\ u_{C(0+)} = u_{CS(0+)} + u_{Cv(0+)}; \end{cases} \quad (11)$$

Vabakomponentide algväärtusi hetkel $t=0$ saab avaldada

$$\begin{cases} i_{Lv(0+)} = i_{L(0+)} - i_{LS(0+)}; \\ u_{Cv(0+)} = u_{C(0+)} - u_{CS(0+)}. \end{cases} \quad (12)$$

Kommutatsiooniseaduste kohaselt (I ja II):

Induktsioonvool: $i_{L(0-)} = i_{L(0+)}; \rightarrow i_{Lv(0+)} = i_{L(0-)} - i_{LS(0+)}$

Mahtuvuspinge: $u_{C(0-)} = u_{C(0+)}; \rightarrow u_{Cv(0+)} = u_{C(0-)} - u_{CS(0+)}$

Nullalgingimused esinevad sellisel juhul, kui kommutatsioonihetkel on

$$i_{L(0-)} = 0 \quad \text{ja} \quad u_{C(0-)} = 0.$$

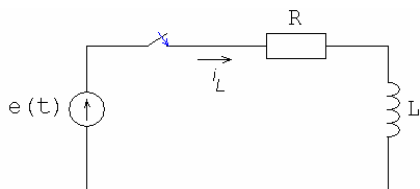
Sellisel juhul

$$\begin{cases} i_{Lv(0+)} = -i_{LS(0+)}; \\ u_{Cv(0+)} = -u_{CS(0+)}. \end{cases} \quad (13)$$

5. Siirdeprotsess RL -ahelas

Vaatleme siirdeprotsesside kulgemist sellises ahelas, mis sisaldab jadaühenduses R ja L -elemente.

Siirdeprotsesside analüüsimisel vaatleme järgmisi erijuhtumeid:



1. Lülitamine elektromotoorjõu toitele

$$e(t)=E=\text{const.}$$

2. RL -ahela lühistamine ehk lülitamine emj-le

$$e(t)=0, \text{ kusjuures } i_{(0-)} \neq 0;$$

3. RL -ahela lülitamine siinuspingele

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e).$$

5.1 RL -ahela lülitamine alalispingele $e(t)=E$.

Sõltumatu algtingimus $i_{(0-)} = 0$.

Kuna see on ühtlasi ka vool induktiivsusel, siis I kommutatsiooniseaduse põhjal

$$i_{(0-)} = i_{(0+)} = 0.$$

Siirderežiimis tekkiva voolu mõjul tekkivad pingelangud on kirjeldatavad Kirchhoffi II seaduse põhjal võrrandiga

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i = E. \quad (14)$$

Siirdevool ahelas avaldub summana sund- ja vabavoolust:

$$i(t) = i_s(t) + i_v(t). \quad (15)$$

Siin voolu sundkomponent $i_s(t)$ kujutab endast võrrandi (14) erilahendit, mis jääb kehtima siis, kui voolu vabakomponent on piisavalt pika aja vältel nulliks muutunud. Ahela tootmisel alalis-emj. E poolt peab ka püsivool olema **alalisvool**, mis avaldub

$$i_s(t) = i_s = I = \frac{E}{R}. \quad (16)$$

Vabavoolu kirjeldab võrrandi (14) põhjal saadud homogeenne võrrand

$$L \frac{di_v}{dt} + R \cdot i_v = 0, \quad (17)$$

mille **üldlahend** avaldub kujul

$$i_v(t) = A \cdot e^{pt}. \quad (18)$$

Homogeense võrrandi alusel saame **karakteristliku võrrandi**, asendades $\frac{d}{dt} \rightarrow p$ ja avaldades vabavoolu i_v kordaja ning võrrutades selle 0-ga:

$$Lp + R = 0. \quad (19)$$

See on 1. järgu võrrand, millel on vaid 1 juur (lahend)

$$p_1 = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}. \quad (20)$$

Samast avaldub ahela **ajakonstant**

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (21)$$

Seega üldvool avaldub kujul

$$i(t) = \frac{E}{R} + A \cdot e^{-pt}, \quad (22)$$

kus

$$p = -\frac{R}{L}.$$

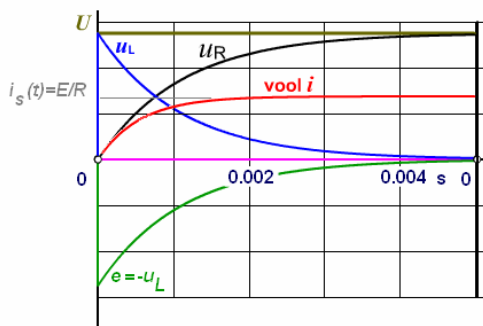
Määrame integreerimiskonstandi A , asendades (22)-s $t=0$:

$$i_{(0+)} = \frac{E}{R} + A \cdot 1 = i_{(0-)} = 0.$$

Seega

$$A = -\frac{E}{R}.$$

Niisiis üldlahend on:



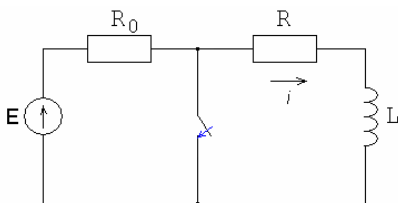
$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \frac{di}{dt} = L \frac{E}{R} \left(0 + \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \\ &= L \frac{E}{R} (0 - p_1 e^{p_1 t}) = L \frac{E}{R} \cdot \frac{R}{L} e^{p_1 t} = E e^{p_1 t} \end{aligned} \quad (24)$$

$$e_L = -u_L.$$

5.2 RL-ahela lühistamine

Seda võime näiteks kirjeldada skeemiga



Sõltumatu algtingimus:

$$i_{(0-)} = i_{(0+)} = I_0 = \frac{E}{R_0 + R}. \quad (25)$$

Otsime siirdevoolu kujul

$$i(t) = i_s(t) + i_v(t),$$

kus **sundvool** on

$$i_s(t) = 0,$$

vabavool aga avaldub homogeenest võrrandist lõppskeemi jaoks

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0,$$

sealt

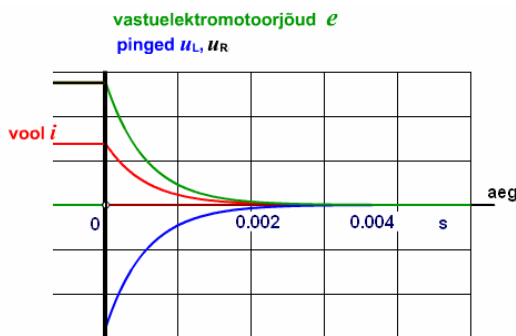
$$i_v(t) = A \cdot e^{pt} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

$$\tau = \frac{L}{R} \text{ (nagu eelmiselgi juhul).}$$

$$A = i_v|_{t=0} = I_0 = \frac{E}{R_0 + R}.$$

Seega siirdevool on:

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R_0 + R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad (26)$$



$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \cdot I_0 \left(-\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = -RI_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (27)$$

Ajakonstant τ – see on ajavahemik, mille vältel eksponentsiaalne suurus muutub e korda.

nt. $R=1 \Omega, L=1 \text{ H} \rightarrow \tau=1 \text{ s}; \quad R=1 \text{ k}\Omega, L=1 \text{ H} \rightarrow \tau=1 \text{ ms}$

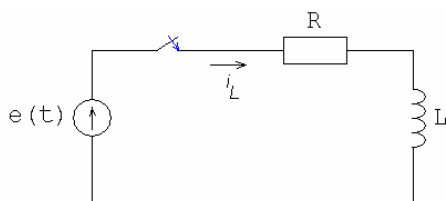
t/τ	0	1	2	3	4	...	∞
i/I_0	1	0,368	0,135	0,05	0,018		0

Graafiliselt saab τ määrata kas **puutuja abil** või väärtuse muutumise järgi e korda $\frac{A_1}{A_2} = e$.

Sellel juhtumil oli skeemis induktiivsusel algenergia $w_{L(0-)} = \frac{LI_0^2}{2}$ ja kogu see **energia** peab siirdeprotsessis muutuma **soojusenergiaks** takistil R :

$$w_R = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{LI_0^2}{2}. \quad (28)$$

5.3 RL-ahel lülitatakse siinuselisele emj-le



$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$$

Määrame algtingimused:

$$i_{(0-)} = 0;$$

$$i_{(0+)} = i_{(0-)} = 0.$$

Ahelat kirjeldav diferentsiaalvõrrand on

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i = e(t)$$

ja selle võrrandi lahendit otsime kujul

$$i(t) = i_s(t) + i_v(t) = i_s(t) + A e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Sundvoolu leiame, kui lahendame skeemi püsirežiimi kommutatsioonijärgses režiimis:

$$i_s(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi), \quad (29)$$

kusjuures
$$I_m = \frac{E_m}{z} = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}; \quad \varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right).$$

Lähtudes sundvoolu üldavaldisest peaks siirdevoolu üldkuju olema

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (30)$$

Vaatleme seda vooluavaldist hetkel $t=0$, kus $i_{(0+)} = 0$:

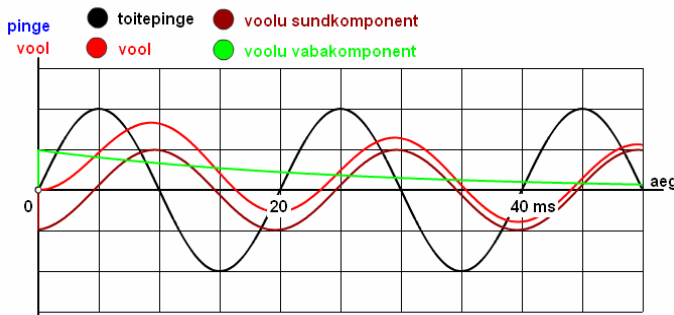
$$0 = I_m \sin(\psi_e - \varphi) + A \cdot 1;$$

sealt integreerimiskonstant avaldub

$$A = -I_m \sin(\psi_e - \varphi).$$

Kuna $\tau = \frac{L}{R}$, siis vool avaldub

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) - I_m \sin(\psi_e - \varphi) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (31)$$



Voolu muutumise kõver on selline.

Nagu näha, on $|i_{\max}| > I_m$.

Erijuhtumid algfaasi poolest:

a) kui $\psi_e - \varphi = \begin{cases} 0 \\ \pm \pi \end{cases}$, siis $\sin(\psi - \varphi) = 0$ ja seega $i_{S(0+)} = 0$ ja $i_{v(0+)} = 0$ ning siirdeprotsessi ei teki, so tekib vaid siinuse-line sundvool

b) kui $\psi_e - \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$, siis $\sin(\psi - \varphi) = 1$ ja $i_{v(0+)} = i_{S(0+)} = \pm I_m$ ning siirdeprotsess väljendub kõige tugevamini.

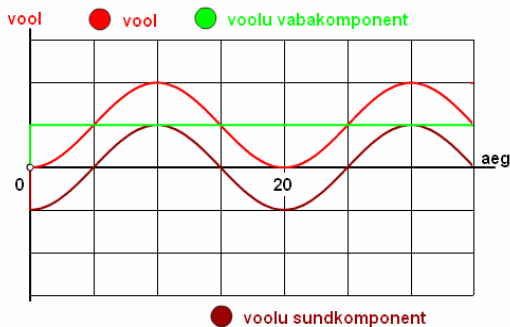
Siis
$$|i_{\max}| = \left| I_m e^{-\frac{t_1}{\tau}} \right| \text{ ja } t_1 = \frac{T}{2}.$$

Mida suurem on τ väärtus, seda aeglasemalt sumbub siirdevoolu vabakomponent, kuid alati on

$$|i_{\max}| \leq 2 \cdot I_m.$$

$$\tau = \frac{L}{R}, \text{ so } R \rightarrow \infty.$$

Juhul kui $\tau \rightarrow \infty$, siis siirdeprotsess ei sumbugi.



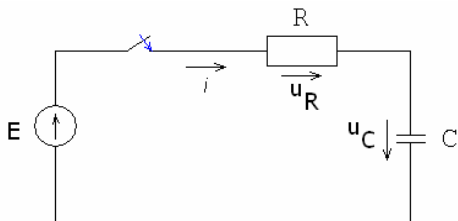
See on siiski vaid teoreetiline võimalus.

6. Siirdeprotsess RC-ahelas

Ka RC-ahela korral vaatleme siirdeprotsesse kolme erijuhtumi korral:

- RC-ahela lülitamine alalispingele;
- RC-ahela lühistamine;
- RC-ahela lülitamine siinuspingele.

6.1 RC-ahela lülitamine alalispingele



Eeldame, et algselt on kondensaator laadimata, so $u_{C(0-)} = 0$ (null-algtingimused). Pärast lülitamist saame Kirchhoffi II seaduse põhjal kontuuri kohta kirjutada

$$R \cdot i + u_C = E,$$

kusjuures vool kondensaatoril avaldub pinge kaudu:

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Seega Kirchhoffi II seaduse uus avaldis

$$R \cdot C \frac{du_C}{dt} + u_C = E. \quad (32)$$

Selle võrrandi (mittehomogeenne) lahendit otsime summa kujul sund- ja vabapingest

$$u_C(t) = u_{CS}(t) + u_{CV}(t), \quad (33)$$

kus sundkomponent pingest on $u_{CS}(t) = u_{CS} = E$.

Pinge vabakomponendi määrame homogeensest võrrandist

$$R \cdot C \frac{du_{CV}}{dt} + u_{CV} = 0, \quad (34)$$

mille lahend on kujul

$$u_{Cv}(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Karakteristlik võrrand on

$$R \cdot C \cdot p + 1 = 0, \quad (35)$$

$$p = -\frac{1}{RC}, \quad \tau = R \cdot C - \text{ajakonstant.}$$

Hetkel $t = 0+$ avaldub kondensaatori pinge:

$$u_{(0-)} = u_{C(0+)} = u_{CS(0+)} + u_{Cv(0+)}$$

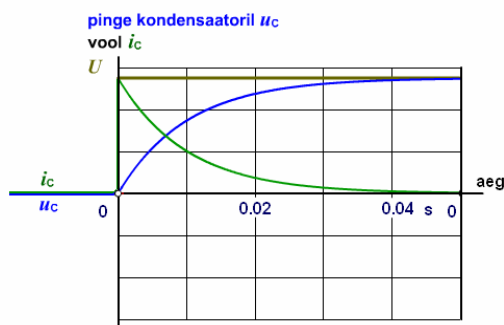
$$0 = E + A.$$

Siit integreerimiskonstant A avaldub

$$A = -E.$$

Seega kondensaatori pinge üldavaldis on

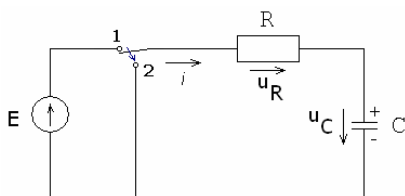
$$u_C(t) = E(1 - e^{pt}) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \quad (36)$$



Vool kondensaatoril (ja ka aktiivtakistil) avaldub

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = CE \left(0 + \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = CE \cdot \frac{1}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (37)$$

6.2 RC-ahela lühistamine



Kommutatsioonieelne pinge kondensaatoril

$$u_{c(0-)} = u_0 = E.$$

II kommutatsiooniseaduse põhjal

$$u_{C(0-)} = E = u_{C(0+)} = u_{CS(0+)} + u_{Cv(0+)} \quad (38)$$

Siin pinge sundkomponent on null $u_{CS(0+)} = 0$.

Kommutatsioonijärgset skeemi kirjeldab Kirchhoffi II seaduse põhjal kontuuri kohta võrrand

$$R \cdot i + u_C = 0 \quad \text{ehk} \quad R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0, \quad (39)$$

mille lahendit otsime kujul

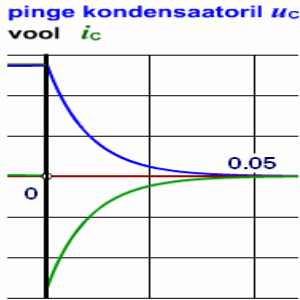
$$u_C(t) = u_{Cv}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = Ae^{pt}.$$

Hetkel $t = 0+$

$$u_{C(0+)} = u_{C(0-)} = u_0 = E; \quad u_0 = A \cdot 1.$$

Seega kondensaatori pingest siirderežiimis avaldub

$$u_C(t) = u_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (40)$$

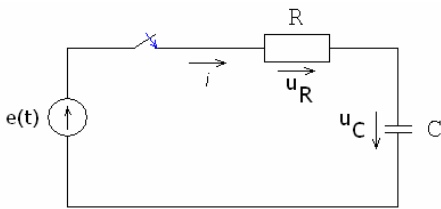


Siinjuures kondensaatorit läbiv vool avaldub

$$i = C \frac{du_C}{dt} = CU_0 \left(-\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ asendades siin } \tau = RC, \text{ saame}$$

$$i(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (41)$$

6.3 RC-ahela lülitamine siinuspingele



Toiteallikas on siinuseline emj $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$.

Kommutatsioonieelne pinge kondensaatoril on 0.

Algtingimused:

$$u_{C(0-)} = 0 = u_{C(0+)} \text{ (vastavalt kommutatsiooni II seadusele).}$$

Siirderežiimis on $u_C(t)$ esitatav järgmisel kujul

$$u_C(t) = u_{Cs}(t) + u_{Cv}(t) = u_{Cs}(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Siinjuures vool ahelas avaldub

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = i_s(t) + i_v(t) = i_s(t) + C \cdot A \left(\frac{-1}{\tau} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Sundkomponent voolus on määratav kui tavaline siinuseline vahelduvvool kujul

$$i_s(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_e - \varphi). \quad (42)$$

Selle siinusvoolu amplituud ja täiendav faasinihkenurk, so nurk voolu ja emj vahel avalduvad:

$$I_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}}; \quad \varphi = \arctg \left(-\frac{1}{\omega CR} \right) \quad (43)$$

Kondensaatori pingest püsirežiimis, so pingest sundkomponent:

$$u_{CS}(t) = U_{CSm} \left(\sin \omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2} \right), \quad (44)$$

(kondensaatori pingel on voolust 90° taga)

kusjuures
$$U_{CSm} = x_C I_m = \frac{1}{\omega C} \cdot I_m.$$

Kuna ülesandes on 0-algtingimused ($t = 0$, $u_{C(0+)} = 0$), siis saame kondensaatori pingel üldavaldisest hetkel $t = 0$

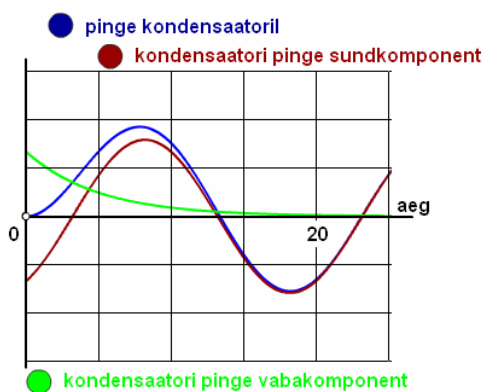
$$0 = U_{CSm} \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) + A \cdot 1 = 0,$$

kust integreerimiskonstant A avaldub:

$$A = -U_{CSm} \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}).$$

Seega kondensaatori pingel lõppavaldise saame

$$u_C(t) = U_{CSm} \sin(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) - U_{CSm} \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (45)$$



Vaatleme sellise pingel muutumise graafikut.

Kondensaatori pingemaksimum $U_{Cmax} > U_{CSm}$ ja tema väärtus on $|U_{Cmax}| \leq 2U_{CSm}$ hetkel, kui pingel sundkomponent läbib 0-punkti, siis $t = 0$, $u_{CS(0+)} = 0$, seega ka $u_{Cv(0+)} = 0$, so faasinihkenurk on $\psi - \varphi - \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$ ning selli sel juhtumil **siirdeprotsessi ei teki**.

Kui aga kondensaatori **sundpingekõver** läbib kommutatsiooni hetkel maksimumi, so amplituudväärtust $U_{CS(0+)} = U_{CSm}$, siis on kondensaatori vabapingel algväärtus hetkel $t = 0$ $u_{Cv(0+)} = -U_{CSm}$ ja siirdeprotsessis on vabakomponendi mõju kõige tugevam.

Siirdeprotsessi sumbumise kiirust väljendab ajakonstant $\tau = RC$; τ – iseloomustab aega, mille vältel vabakomponent muutub e korda oma väärtuse poolest.

Kui $C = 30 \mu F$ ja $R = 10 M\Omega$, siis $\tau = 300 s = 5 \text{ min}$;

kui $C = 0,01 \mu F$ ja $R = 1 \Omega$, siis $\tau = 0,01 \mu s$.

Seega, mida suurem on C või R väärtus, seda suurem on ahela ajakonstant, seda aeglasemalt sumbub siirdeprotsess.

RC -ahela vabavoolu avaldis on

$$i_{Cv}(t) = C \cdot A \left(-\frac{1}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{A}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (46)$$

$$(i_{Cv} = C \frac{du_{Cv}}{dt}, \quad A = C \frac{du_{Cv}}{dt}; \quad \tau = RC)$$

Kuna ahelas kondensaatori pinge sundkomponendi amplituudväärtus on

$$U_{CSm} = I_m \cdot \frac{1}{\omega C}$$

ja kondensaatori vabapinge on

$$u_{Cv}(t) = -U_{CSm} \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

siis saame avaldada kondensaatori vabavoolu

$$i_{Cv} = C \frac{du_{Cv}}{dt} = I_m \cdot \frac{1}{\omega CR} \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Ahela koguvool avaldub siis:

$$i_c(t) = I_m \left[\sin(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{1}{\omega CR} \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) e^{-\frac{t}{\tau}} \right]. \quad (47)$$

Huvi pakub veel vabavoolu algväärtus

$$i_{Cv(0+)} = I_m \frac{1}{\omega CR} \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) = I_m \left(\frac{X_C}{R} \right) \sin(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}).$$

Seega vabavoolu algväärtus sõltub hüvetegurist:

$$i_{Cv(0+)} = f\left(\frac{X_C}{R}\right).$$

Ühtlasi saab teha järelduse, et mida väiksem on ajakonstant $\tau = RC$, seda suurem on voolu algtõuge.

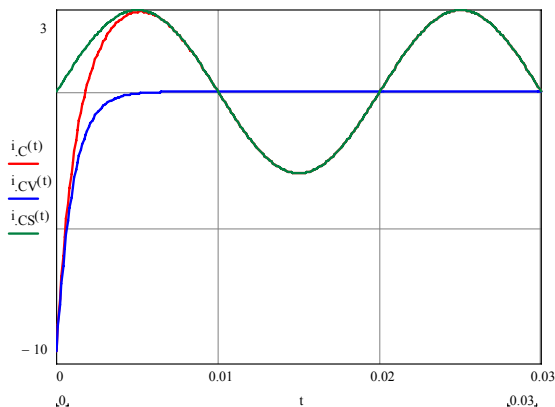
Lülitustingimused – parim ja halvim.

Kui lülitamine toimub hetkel, kui ahela **püsivool** peaks olema maksimaalne, st **püsipinge** plaatidel on võrdne **nulliga**, st $\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$, siis on **vabavoolu** ja **–pinge** algväärtused võrdsed nulliga $i_{CSv(0+)} = 0$ ja $u_{Cv(0+)} = 0$ ning **püsivool kujuneb kohe välja** ilma siirdprotsessita.

Kui lülitamine toimub hetkel, kui ahela **püsivool** peaks olema 0 ja **püsipinge** on absoluutväärtuselt maksimaalne, st $\psi = \varphi$ või $\psi = \varphi + \pi$ korral, siis **vabapinge** $u_{Cv(0+)}$ ja **vabavoolu** $i_{Cv(0+)}$ algväärtused saavutavad absoluutväärtuselt suurima võimaliku väärtuse

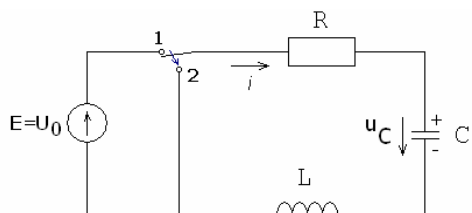
$$u_{Cv(0+)} = (-)U_{CSm} = (-)\frac{I_m}{\omega C} \quad \text{ja} \quad i_{Cv(0+)} = (-)\frac{I_m}{\omega CR} = (-)\frac{U_{CSm}}{R}.$$

Siit nähtub, et ahela **vabavoolu algväärtus** võib püsivoolu amplituudi ületada $\frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega CR} = Q$ korda, kus Q on hüvetegur.



Selline RC -ahela lülitamine siinuspingele esineb reaalset **kaabelliinide** sisselülitamisel siinuspingele või ka alalispingel. Sellega võivad kaasneda küllaltki suured voolutõuked, mille **algväärtust saab määrata** kaabli soone ja kesta vahel oleva **püsipinge amplituudi** jagamisega kaabli **aktiivtakistusega**. Liiga suurte voolutõugete vältimiseks kasutatakse mõnikord lülitamist läbi lisatakisti, mis hiljem lühistatakse.

7. RLC -jadaahela lühistamine



RLC -jadaahel töötab väljakujunenud režiimis **alalis-emj** toitel. Seega sõltumatud algtingimused

$$\begin{cases} u_{C(0-)} = U_0 = u_{C(0+)} & \text{kondensaatori pinge} \\ i_{(0-)} = i_{(0+)} = 0 & \text{induktiivsuse vool} \end{cases}$$

Lüliti kommuteerimisel lühistame RLC -ahela ja algab kondensaatori tühjenemine (laengu liikumine, so vool), mida kirjeldame Kirchhoffi II seaduse järgi võrrandiga

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = 0. \quad (48)$$

Võtame sellest pingete tasakaaluvõrrandist tuletise:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0. \quad (49)$$

Sellele homogeensele diferentsiaalvõrrandile vastab karakteristlik võrrand

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0$$

ehk teisiti

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0. \quad (50)$$

Leitud teist järku karakteristlikul võrrandil on üldjuhul 2 juurt (lahendit), mis avalduvad:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{1}{LC}\right)} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (51)$$

Siin ω_0 – resonantsnurksagedus antud kontuurile.

Siirdeprotsessi kulgemise iseloomu saab iseloomustada suhte $\frac{\alpha}{\omega_0}$ kaudu:

$$\frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{\frac{R}{2L}}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2\rho} = \frac{1}{2Q_0},$$

kusjuures Q_0 – resonantskontuuri hüvetegur; $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$
 ρ – resonantskontuuri lainetakistus.

Siinjuures saab karakteristikliku võrrandi lahendite seisukohalt vaadelda järgmisi **erijuhtumeid**:

1) $Q_0 < \frac{1}{2}$ ja $R > 2\rho$;, siis vastavalt $\alpha > \omega_0$ ja karakteristikliku võrrandi lahendid $p_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ on erinevad negatiivsed reaalarvud $p_1 \neq p_2$. Siirdeprotsess kulgeb aperioodiliselt	2) $Q_0 = \frac{1}{2}$ ja $R = 2\rho$, seega siis vastavalt $\alpha = \omega_0$ ja karakteristikliku võrrandi lahendid on võrdsed $p_1 = p_2 = -\alpha$, seega 2 võrdset negatiivset reaalarvulist lahendit. Siirdeprotsess kulgeb aperioodiliselt
3) $Q_0 > \frac{1}{2}$ ja $R < 2\rho$, siis $\alpha < \omega_0$ ja karakteristiklikul võrrandil on kaaskomplekssed lahendid $p_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_v$. Siirdeprotsess kulgeb sumbuvate võnkumistena.	4) Teoreetiline juhtum, kui $Q_0 \rightarrow \infty$ ja $R \rightarrow 0$, siis $\alpha = 0$ ja $p_{1,2} = \pm j\omega_0$. Sellises kontuuris tekivad siirdeprotsessis mittesumbuvad võnkumised.

Üldjuhul avaldub ka RLC -ahelas siirdeprotsessis vool kui summa sund- ja vabakomponendist:

$$i(t) = i_s(t) + i_v(t).$$

Kuna kommutatsioonijärgses skeemis puudub energiaallikas, siis on ka sundvool $i_s(t) = 0$ ja koguvool võrdub vabavooluga:

$$i(t) = i_v(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \quad (52)$$

See on diferentsiaalvõrrandi (49) üldlahend, millele tuleb määrata integreerimiskonstandid A_1 ja A_2 . Selleks on vaja 2 algingimust. Need on

$$i_{(0-)} = i_{(0+)} = 0$$

$$u_{C(0-)} = u_{C(0+)} = U_0.$$

Lisaks **voolu avaldisele** leiame veel **voolu tuletise** avaldise

$$i = i_{v/i_s=0} \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{di_v}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}. \quad (53)$$

Nüüd vaatleme nii voolu avaldist kui ka voolu tuletise avaldist $t = 0$.

$$\left. \begin{aligned} i_{v(0+)} &= A_1 + A_2; \\ \frac{di_v}{dt} \Big|_{t=0} &= A_1 p_1 + A_2 p_2. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Kuna

$$i_{(0-)} = i_{(0+)} = 0 = i_{s(0+)} + i_{v(0+)} ,$$

siis

$$i_{v(0+)} = 0.$$

Voolu tuletise nullajahetkel väärtuse määramiseks vaatleme kontuuri pingete tasakaaluvõrrandit hetkel $t = 0$.

$$L \frac{di}{dt} \Big|_{t=0} + R \cdot i_{(0+)} + u_{C(0-)} = 0 ,$$

siit avaldame

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{U_0}{L}. \quad (54a)$$

Seega võrrandsüsteem integreerimiskonstantide A_1 ja A_2 määramiseks on

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0; \\ A_1 p_1 + A_2 p_2 &= -\frac{U_0}{L} \end{aligned} \right\}. \quad (55)$$

Selle süsteemi lahendamise tulemusena määrame need integreerimiskonstandid

$$A_1 = -A_2 = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)}.$$

Seega diferentsiaalvõrrandi lahend, so **siirdevool avaldub üldkujul**

$$i(t) = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}). \quad (56)$$

$$p_1 - p_2 = 2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Seda siirdevoolu üldavaldist tuleb täpsustada vastavalt konkreetsetele karakteristliku võrrandi lahenditele:

(a) Aperioidiline siirdeprotsess

$$Q_0 = \frac{1}{2} \text{ ja } \alpha > \omega_0;$$

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < 0$$

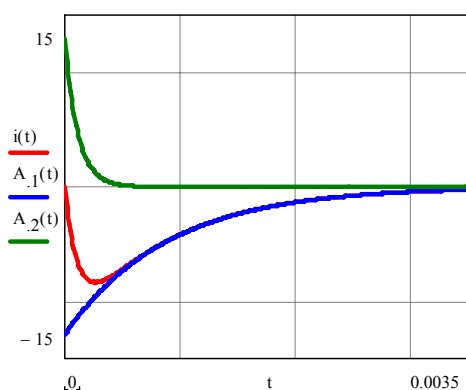
$$p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < 0$$

Siin

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Sellisel juhul on siirdevoolu muutumine **aperioidiline**

$$i(t) = \frac{U_0}{L \cdot 2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}(e^{p_2 t} - e^{p_1 t}). \quad (57)$$



Seega vabavool koosneb kahest komponendist, millest $A_2 e^{p_2 t}$ sumbub kiiremini, kuna p_2 absoluutväärtus on suurem kui p_1 -l, seega $e^{p_2 t}$ väheneb ajas kiiremini kui $e^{p_1 t}$. Ajahetkel $t = t_1$ saavutab vabavool maksimaalse väärtuse, seega seal on voolukõvera maksimumpunkt ja seal tuletis on 0, seega

$$p_1 e^{p_1 t_1} - p_2 e^{p_2 t_1} = 0 = \frac{di}{dt}.$$

Sellel momendil peab ka **pinge poolil olema 0**.

$$U_{Lv} = L \frac{di_v}{dt} = 0, \text{ seega läbib 0-punkti.}$$

$$u_{Cv} = \frac{1}{C} \int_0^t i_v dt = \frac{1}{C} \left[\frac{A_1}{p_1} e^{p_1 t} + \frac{A_2}{p_2} e^{p_2 t} \right].$$

Ajahetkel $t = 0$ on kondensaatori pinge

$$u_{Cv(0+)} = u_{C(0+)} - u_{CS(0+)} = U_0 .$$

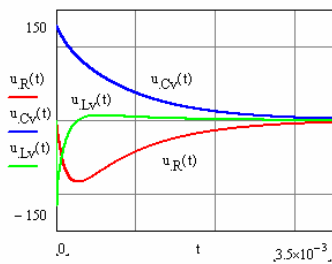
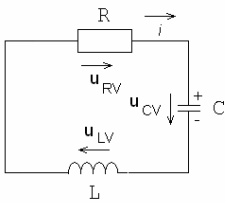
$$u_{CS(0+)} = 0$$

Niisiis on kondensaatori pinge üldavaldis

$$u_{Cv}(t) = \frac{1}{Cp_1p_2} (p_2A_1e^{p_1t} + p_1A_2e^{p_2t}) = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)} \frac{1}{Cp_1p_2} (p_2e^{p_1t} + p_1e^{p_2t}). \quad (58)$$

$u_{Cv}(t)$ avaldises esinev suurus p_1p_2 avaldub

$$p_1p_2 = \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$



$$u_{Lv} + u_R + u_C = 0$$

$$u_{Rv}(t) = i \cdot R$$

Siin toimub siirdeprotsessis kondensaatori elektrivälja energia muundumine pooli magnetvälja energiaks (kuna i_{Lv} kasvab) ja aktiivtakistis eralduvaks soojuseks. Siin kondensaator pidevalt tühjeneb, laeng ja elektrivälja energia aina vähenevad protsess on ühesuunaline. Sellepärast nimetatakse seda kondensaatori **aperioodiliseks tühjenemiseks**. Skemaatiliselt energia muundumine

$$w_C = \frac{Cu_C^2}{2} \begin{cases} \rightarrow w_L = \frac{Li^2}{2} \\ \rightarrow w_R = \int_0^t Ri^2 dt \end{cases}$$

ja siirdeprotsessi vältel ajavahemikul $t = t_1 \dots \infty$ toimub energia liikumine:

$$\left. \begin{array}{l} w_C \rightarrow \\ w_L \rightarrow \end{array} \right\} \int_0^t Ri^2 dt$$

ja kogu energia muutub lõpuks soojuseks.

(b) Aperioidiline piirjuhtum, so kriitiline režiim

See esineb juhtumil, kui $Q_0 = \frac{1}{2}$; $\alpha = \omega_0$, siis karaktervõrrandi lahendid on võrdsed, reaalsed ja negatiivsed

$$p = p_1 = p_2 = -\alpha .$$

Sellises režiimis otsime vabavoolu RLC -ahelas järgmisel üldkujul

$$i_v(t) = A_1e^{pt} + A_2te^{pt} = (A_1 + A_2t)e^{pt}. \quad (58a)$$

Sellel juhtumil **integreerimiskonstantide** määramisel avaldame voolu tuletise

$$\frac{di_v}{dt} = pA_1e^{pt} + A_2e^{pt} + pA_2te^{pt}. \quad (59)$$

Hetkel $t = 0$ on vabavoolu ja voolutuletise avaldised

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 \cdot 0 = i_{v(0+)} = 0 & \rightarrow A_1 = 0 \\ pA_1 + A_2 + pA_2 \cdot 0 = \frac{di_v}{dt}\bigg|_{t=0} = -\frac{U_0}{L} & \rightarrow A_2 = -\frac{U_0}{L} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Seega RLC -ahela lühistamisel siirdevoolu üldavaldis

$$i(t) = -\frac{U_0}{L} \cdot te^{-\alpha t}, \quad (61)$$

kuna $p = -\alpha$.

Vastavalt saame siis pingetele $u_C(t)$ ja $u_L(t)$ avaldised

$$\left. \begin{aligned} u_C(t) &= -L \frac{di}{dt} - Ri = U_0(\alpha t + 1)e^{-\alpha t}; \\ u_L(t) &= L \frac{di}{dt} = U_0(\alpha t - 1)e^{-\alpha t}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Kõverad on analoogsed eelmise juhtumi omadega. Voolu absoluutväärtus kõvera järgi on suurim hetkel, kui $t = t_1 = \frac{1}{\alpha}$; samal hetkel on $u_L = 0$. Pooli pinge u_L omandab maksimaalväärtuse hetkel $t = 2t_1 = \frac{2}{\alpha}$.

Selle režiimi parameetrite vaheline seos:

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Üldiselt aperioidilises režiimis: $R \geq 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$

(c) Võnkerežiim, so siirdeprotsess sumbub võnkumistena

See esineb juhul, kui ahela elementide parameetriliste väärtuste vahel on seos $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$

See on $\alpha < \omega_0$ ja karakteristikul võrrandil on **kaaskomplekssed lahendid**:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\alpha + j\omega_v = -\alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}; \\ p_2 &= -\alpha - j\omega_v = -\alpha - j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

kus $\omega_v = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$

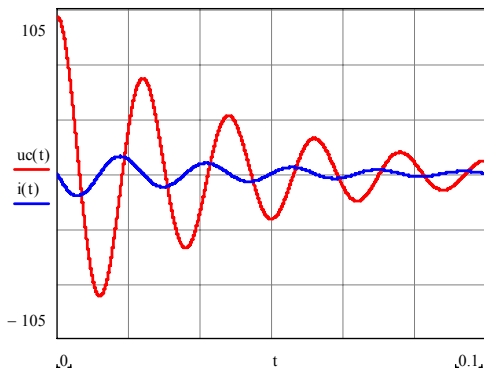
Sel juhul avaldub siirdevool, so vabavool

$$i(t) = -\frac{U_0}{L \cdot 2j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = -\frac{U_0}{L \cdot 2j\omega_v} e^{-\alpha t} (e^{j\omega_v t} - e^{-j\omega_v t}).$$

Selline esitamisvorm aga tähendab **siinusfunktsiooni** esinemist voolu avaldises, saame:

$$i(t) = -\frac{U_0}{L \cdot \omega_v} e^{-\alpha t} \sin(\omega_v t). \quad (64)$$

Seega ahela vool kujutab endast **siinuselist suurust** algfaasinihkega 0° , mis sumbub ajas funktsiooni $e^{-\alpha t}$ kohaselt.



Tekkinud sumbuvaid võnkumisi iseloomustab **võnkumise dekrement**, mis näitab, mitu korda voolu või pinge väärtus väheneb ühe võnkeperioodi jooksul:

$$\Delta = \frac{i(t)}{i(t + T_v)} = \frac{e^{-\alpha t} \cdot \sin \omega_v t}{e^{-\alpha(t + T_v)} \cdot \sin \omega_v(t + T_v)} = e^{\alpha \cdot T_v}. \quad (65)$$

Siin siinusfunktsiooni väärtus on sama ühe perioodi pärast.

Kasutatakse ka **logaritmilise dekrementi** mõistet:

$$\ln \Delta = \alpha \cdot T_v. \quad (66)$$

Siin T_v – sumbuva omavõnkumise periood, mis on määratud sumbuva omavõnkumise nurksagedusega

$$\omega_v = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} < \omega_0.$$

ω_0 – sumbumatu omavõnkumise nurksagedus.

Seega ka

$$T_v = \frac{2\pi}{\omega_v} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} > T_0. \quad (67)$$

T_0 – sumbumatu, so mittesumbuva omavõnkumise periood.

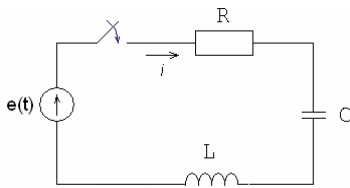
(d) Sumbumatu võnkumine esineb siis, kui

$$\omega_v = \omega_0, \text{ so } R = 0 \text{ ja } \alpha = 0,$$

sest ahelas puuduvad aktiivvool, energia ei saa kontuurist soojusena eralduda, vaid võngub L ja C vahel. Siis ahela vool avaldub

$$\left. \begin{aligned} i(t) &= -\frac{U_0}{\omega_0 \cdot L} \sin \omega_0 t; \quad (\omega_0 = \omega_v) \\ \text{kondensaatori pinge vastavalt} \\ u_C(t) &= U_0 \cos(\omega_0 t). \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

8. RLC-jadaahela lülitamine alalis- ja siinuspingele



Null-algtingimused:

$$\left. \begin{aligned} i_{(0-)} &= i_{(0+)} = 0; \\ u_{C(0-)} &= u_{C(0+)} = 0. \end{aligned} \right\}$$

8.1 RLC-ahela lülitamine alalispingele

$$e(t) = U_0 = \text{const.}$$

Pärast kommutatsiooni püsirežiimis on ahelas vool $i_S(t) = 0$, sest kondensaatorit ei saa läbida alalisvool. Püsirežiimis on ahela mahtuvusel pinge võrdne emj väärtusega

$$u_{CS}(t) = e(t) = U_0.$$

Seega ahela koguvool võrdub vabavooluga

$$i(t) = i_v(t)$$

ja kondensaatoril on pinge

$$u_C(t) = U_0 + u_{Cv}(t).$$

Ahelat iseloomustab 2. järku karakteristik võrrand, seega avaldub vabavool

$$\left\{ \begin{aligned} i_v(t) &= A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \\ \frac{di_v}{dt} &= p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}. \end{aligned} \right. \quad (69)$$

Algtingimustest

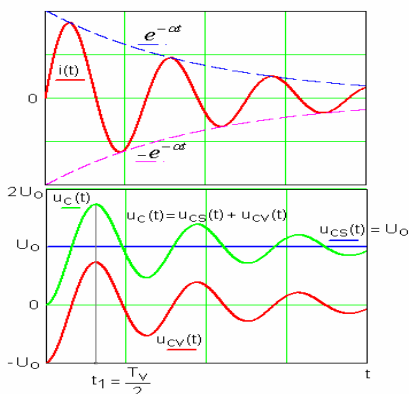
$$i_{v(0+)} = i_{(0-)} - i_{S(0+)} = 0;$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = U_0.$$

Kui $t = 0$, siis

$$L \frac{di}{dt} \Big|_{t=0+} + Ri_{(0+)} + u_{C(0+)} = U_0. \quad (70)$$

Kuna $i_{(0+)} = 0$ ja $u_{C(0+)} = 0$, siis järelikult $\frac{di}{dt} \Big|_{t=0+} = \frac{U_0}{L}.$



Seega algtingimused siin on sarnased eelmise juhtumiga (RLC -ahela lühistamine), $\frac{di}{dt}|_{t=0}$ on ainult **vastasmärgiline**. Seega

voolu avaldise saame kujul, mis RLC -ahela lühistamisega võrreldes on selle juhtumi **peegelpilt** abtsisstelje suhtes.

Vaatleme siin vaid võnkelist siirdeprotsessi.

$$t_1 = \frac{T_V}{2} \quad U_{C\max} \leq 2U_0$$

8.2 RLC -ahela lülitamine siinuspingele

Olgu

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e).$$

Algtingimused on endised

$$\left. \begin{aligned} i_{(0-)} = i_{(0+)} = 0; \\ u_{C(0-)} = u_{C(0+)} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Ahelas tekkinud püsivool (sundvool) avaldub

$$i_s(t) = I_{sm} \sin(\omega t + \psi_e - \varphi), \quad (71)$$

kusjuures

$$I_{sm} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad \varphi = \arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right). \quad (72)$$

Ahelas tekkinud koguvool avaldub

$$i(t) = i_s(t) + i_v(t) = I_{sm} \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) + (A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}). \quad (73)$$

Siinjuures vabavoolu algväärtus määratakse

$$i_{v(0+)} = i_{(0-)} - i_{s(0+)}$$

$$i_{(0-)} = 0;$$

$i_{s(0+)}$ – see suurus on määratud lülituse hetkega, so nurgaga ψ_e ja nihkenurgaga φ .

Ka siin võivad karakteristikliku võrrandi lahendid olla vaadeldud kombinatsioonidena.

- $p_1 \neq p_2$ – reaalsed **negatiivsed erinevad juured**, so aperioidiline režiim,
- $p_1 = p_2 = p$ – reaalsed **negatiivsed võrdsed juured**, so kriitiline (aperioidiline piir-) režiim,
- $p_1^* = p_2^*$ ehk $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_v$ – **kaaskomplekssed juured**, võnkerežiim.

Praktikas võib kõige sagedamini kohata võnkerežiimi,

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_v, \text{ so } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Sel juhul avaldub vabavool

$$i_v(t) = I_{vm} e^{-\alpha t} \sin(\omega_v t + \vartheta).$$

Seega ahela **koguvool** on summa kahest siinuselisest voolust nurksagedusega ω ja ω_v , kusjuures siinuseline vabavool sumbub eksponentsiaalfunktsiooni $e^{-\alpha t}$ kohaselt.

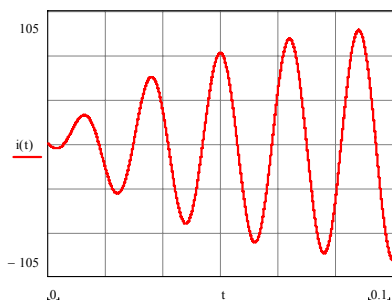
Praktikas tekitavad huvitavaid efekte juhtumid, kus:

- a) $\omega \approx \omega_v$ – tekib sumbuva tuiklemine voolu- või pingekõveras;
- b) $\omega = \omega_v$ – see on nn **isokronismi juhtum**.

Siis koguvool avaldub

$$\left. \begin{aligned} i &= I_{sm}(1 - e^{-\alpha t}) \sin(\omega t + \psi_e - \varphi) \quad \text{ja} \\ u_C &= -\frac{I_{sm}}{\omega C}(1 - e^{-\alpha t}) \sin\left(\omega t + \psi_e - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \right\}. \quad (74)$$

Näeme, et $i(t)$ ja $u_C(t)$ kujutavad endast siinuselisi võnkumisi, mille nurksagedus on $\omega = \omega_v \approx \omega_0$ (ω_0 – kontuuri omavõnkesagedus) ja mille amplituudid järkjärgult kasvades lähenevad asümptootiliselt püsirežiimi väärtustele.



Kuna aga $\omega \approx \omega_0$, oleme lähedal **resonantsolukorrale** ahelas, kus ahela **vool** ja **kondensaatori** ning **pooli pinged** võivad saavutada väga suuri väärtusi (hüveteguri kaudu $U_C = Q_0 \cdot U$ jne).

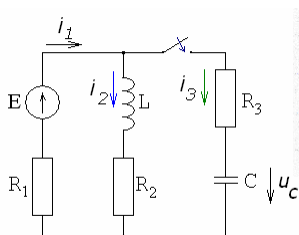
9. Siirdeprotsessi arvutuskäik klassikalisel meetodil

Siirdeprotsessi kirjeldab lineaarsete mittehomogeensete diferentsiaalvõrrandite süsteem, mis on koostatud Kirchhoffi I ja II seaduse põhjal. Lähtutakse **voolude ja pingete hetkväärtustest**.

Saadav vool või pinge koosneb **sund-** ja **vabasuurusest**

$$\begin{aligned} i(t) &= i_s(t) + i_v(t); \\ u(t) &= u_s(t) + u_v(t), \end{aligned} \quad (75)$$

kus **sundkomponent** on võrrandsüsteemi erilahendiks, **vabakomponent** on vastava **homogeense** võrrandsüsteemi üldlahendiks.



Vaatleme näiteks sellist skeemi:

Näiteks: olgu $E=150 \text{ V}$

$R_1=10 \text{ } \Omega$; $R_2=2 \text{ } \Omega$; $R_3=0$, $L=0,1 \text{ H}$; $C=2000 \text{ } \mu\text{F}$.

Arvutuskäigu etapid on järgmised:

1) Sõltumatute algtingimuste määramine ($t = 0$):

$$(I) \quad i_{L(0-)} = i_{2(0-)} = \frac{E}{R_1 + R_2} = 5 \text{ A} = i_{L(0+)}.$$

$$(II) \quad u_{C(0-)} = 0 = u_{C(0+)}.$$

2) Kommutatsioonijärgse skeemi koguvoolude ja –pingete süsteemi koostamine (mõnel juhul pole vajalik).

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_3 = 0; \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} = E; \\ R_1 i_1 + R_3 i_3 + \frac{1}{C} \int_0^t i_3 dt = E. \end{cases} \quad \text{Võrrandsüsteem (A)} \quad (76)$$

3) Kommutatsioonijärgsete püsivoolude ja –pingete leidmiseks võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} -i_{1S} + i_{2S} + i_{3S} = 0; \\ R_1 i_{1S} + R_2 i_{2S} + L \frac{di_{2S}}{dt} = E; \\ R_1 i_{1S} + R_3 i_{3S} + \frac{1}{C} \int_0^t i_{3S} dt = E. \end{cases} \quad \text{Võrrandsüsteem (B)} \quad (77)$$

Selle süsteemi lahendamine toimub suvalisel meetodil (vahelduvvooluahelas **komplekssuurustega** jne). Siin näiteks

$$i_{1S} = i_{2S} = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = 5 \text{ A}; \quad i_{3S} = 0$$

$$u_{CS} = E_1 - R_1 i_{1S} - R_3 i_{3S} = 100 \text{ V.}$$

4) Vabarežiimi voolude-pingete määramine.

Lahutame võrrandsüsteemist (A) võrrandsüsteemi (B), saame **vabakomponendid**, nende võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} -i_{1v} + i_{2v} + i_{3v} = 0; \\ R_1 i_{1v} + R_2 i_{2v} + L \frac{di_{2v}}{dt} = 0; \\ R_1 i_{1v} + R_3 i_{3v} + \frac{1}{C} \int_0^t i_{3v} dt = 0. \end{cases} \quad \text{Võrrandsüsteem (C)} \quad (78)$$

Selle võrrandsüsteemi alusel saadakse **karakteristlik võrrand**.

Kuna üldjuhul vabavool on $i_v(t) = Ae^{pt}$, siis tema **tuletis** ja **integraal** avalduvad

$$\begin{aligned} \frac{di_v}{dt} &= \frac{d}{dt}(Ae^{pt}) = pAe^{pt} = p \cdot i_v; \\ \int_0^t i_v dt &= \int_0^t Ae^{pt} dt = A \frac{1}{p} e^{pt} = \frac{1}{p} \cdot i_v. \end{aligned}$$

Asendame need avaldised võrrandsüsteemi (78):

$$\begin{cases} -i_{1v} + i_{2v} + i_{3v} = 0; \\ R_1 i_{1v} + (R_2 + Lp) i_{2v} = 0; \\ R_1 i_{1v} + \left(R_3 + \frac{1}{pC}\right) i_{3v} = 0. \end{cases} \quad \text{Võrrandsüsteem (D)} \quad (79)$$

Selle avaldise tulemusena muutus diferentsiaalvõrrandsüsteem (C) **algebraiseks** võrrandsüsteemiks (D).

Kuna võrrandsüsteemi **parem pool on 0**, saavad võrrandsüsteemi lahendid olla erinevad 0-st, kui **süsteemi determinant** on 0. $\Delta(p) = 0$, so

$$\Delta p = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ R_1 & R_2 + Lp & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 + \frac{1}{pC} \end{vmatrix} = 0, \quad (80)$$

seega

$$\begin{aligned} -(R_2 + Lp) \left(R_3 + \frac{1}{pC}\right) - R_1(R_2 + Lp) - R_1 \left(R_3 + \frac{1}{pC}\right) &= 0; \quad | \cdot pC \\ (R_1 + R_3)LCp^2 + [(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1)C + L]p + (R_1 + R_2) &= 0. \end{aligned} \quad (81)$$

See on **II järku võrrand**, selle 2 lahendit (juurt). Üldjuhul on karakteristlik võrrand **n**-järku, see on määratud maksimaalselt lihtsustatud aseskeemi jäänud sõltumatute reaktiivelementide arvuga.

Antud juhtumil **vabavool** või **–pinge** avaldub:

$$\begin{cases} i_v(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \\ u_v(t) = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}. \end{cases} \quad (82)$$

Üldjuhul **siirdevoolu vabakomponent** avaldub:

$$i_v(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}. \quad (83)$$

Integreerimiskonstantide A_k määramiseks vajame **n –võrrandi** süsteemi

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n A_k = i_{v(0+)} = i_{(0+)} - i_{S(0+)}; \\ \sum_{k=1}^n p A_k = \frac{di_v}{dt}|_{t=0+} = \frac{di}{dt}|_{t=0+} - \frac{di_S}{dt}|_{t=0+}; \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n p^{n-1} A_k = \frac{di_v}{dt^{(n-1)}}|_{t=0+} = \frac{di}{dt^{(n-1)}}|_{t=0+} - \frac{di_S}{dt^{(n-1)}}|_{t=0+}. \end{cases} \quad \text{Võrrandsüsteem (E)} \quad (84)$$

5) Sõltuvate algtingimuste määramiseks kasutame võrrandsüsteeme **(A)** ja **(B)**, vaadeldes neid ajahetkel $t = 0$.

Näiteks võrrandsüsteemist **(A)** saame

$$\left. \begin{aligned} -i_{1(0+)} + i_{2(0+)} + i_{3(0+)} &= 0; \\ R_1 i_{1(0+)} + R_2 i_{2(0+)} + L \frac{di_2}{dt}|_{t=0} &= E; \\ R_1 i_{1(0+)} + R_3 i_{3(0+)} + U_{C(0+)} &= E \end{aligned} \right\} \quad (\mathbf{A_0}) \quad (8.84a)$$

Siit teame $U_{C(0+)}$

Lahendamise tulemusena saame leida:

$$i_{1(0+)}; \quad i_{3(0+)}; \quad \frac{di_2}{dt}|_{t=0+}.$$

Võtame võrrandsüsteemist **(A)** tuletise:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{di_1}{dt}|_{t=0} + \frac{di_2}{dt}|_{t=0} + \frac{di_3}{dt}|_{t=0} &= 0; \\ R_1 \frac{di_1}{dt}|_{t=0} + R_2 \frac{di_2}{dt}|_{t=0} + L \frac{d^2 i_2}{dt^2}|_{t=0} &= 0; \\ R_1 \frac{di_1}{dt}|_{t=0} + R_3 \frac{di_3}{dt}|_{t=0} + \frac{1}{C} i_{3(0+)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \mathbf{A'}$$

Siit saab määrata $\frac{di_1}{dt}|_{t=0}$; $\frac{di_3}{dt}|_{t=0}$; $\frac{d^2 i_2}{dt^2}|_{t=0}$.

Nii saab edasi võtta järgmised tuletised ning seega kõik algtingimused.

Järgnevalt saab määrata **vabakomponendid** ja nende **tuletised**, kasutades

$$\sum_{k=1}^n \frac{d^{n-1}A}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0} - \sum \frac{d^{n-1}B}{dt^{n-1}} = \sum \frac{d^{n-1}C}{dt^{n-1}}.$$

Võrrandsüsteemi (C) lahendite abil omakorda saab lahendada võrrandsüsteemi **(E)** ja leida integreerimiskonstandid ning avaldada **siirdesuurused kui lahendid**

$$i(t) = i_s(t) + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots \quad (85)$$

NB! Karakteristliku võrrandi saab koostada ka sisendtakistuse avaldise kaudu.

$$\underline{z}(j\omega) \rightarrow z(p) \rightarrow 0$$