

V PEATÜKK

VASTASTIKUSE INDUKTIIVSE SIDESTUSEGA VAHELDUVVOOLUAHELAD

5.1 Põhimõisted ja -seosed

Elektriahelad võivad sisaldada selliseid induktiivselt sidestatud mähispooli, mille magnetvood ahelduvad vastastikku üksteisega. Kui tavalises induktiivpoolis indutseeritakse omainduktsiooni emj $e_L = -di/dt$, siis vastastikku induktiivselt sidestatud poolide korral lisandub vastastikuse induktiivsuse mõjul emj e_M . Seda mõju kirjeldab vastastikuse induktiivsuse väärtus M_{12} .

Kui on kaks lähestikku asuvat induktiivpooli ja esimeses neist on vool i_1 , mis tekitab magnetvoo, siis selle esimese pooliga ahelduv magnetvoog (aheldusvoo Ψ_{L1}) määrab ära esimese pooli oma-induktiivsuse L_1 :

$$L_1 = \frac{\Psi_{L1}}{i_1}.$$

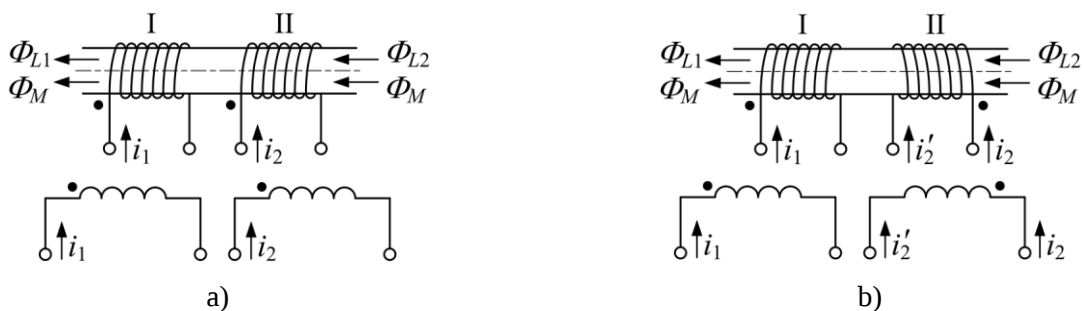
Kui osa esimeses poolis voolava voolu i_1 poolt tekitatud magnetvoost aheldub ka teise mähis-pooliga, moodustades esimese ja teise pooli vastastikuse aheldusvoo Ψ_{M2} , siis iseloomustab seda sidestust vastastikuse induktiivsuse väärtus:

$$M_{21} = \frac{\Psi_{M2}}{i_1}.$$

Kui olukord on vastupidine samade poolide korral, s.o $i_1' = 0$ ja $i_2' = i_1$ (nagu varem oli i_1), siis tekitab teise pooli vool eelmisega sama suure aheldusvoo esimese pooliga, s.o $\Psi_{M1} = \Psi_{M2}$ ja kuna $i_2' = i_1$, siis ka $M_{21} = M_{12} = M$. See on nii lineaarsete elementide ja keskkonnaomaduste korral ($\mu = \text{const}$).

Kui koostada võrrandeid selliste elektriahelate kohta, mis sisaldavad vastastikuse induktiivsusega elemente, tuleb õigesti määratleda vastastikuse induktiivsuse poolt tekitatavate pingelangude (või emj) märgid valitud kontuuri suuna suhtes. Õige otsuse märkide suhtes saab teha siis, kui on teada mähistraadi mähkimise suund. See määrab ära, kas sellistes sidestatud poolides on omainduktsiooni ja vastastikuse induktsiooni magnetvood samas suunas või erinevates suundades.

Võtame kasutusele samanimeliste klemmide mõiste. Olgu meil kaks mähispooli ning sisenev neisse kummassegi vastavalt arvutuslikult positiivsed voolud i_1 ja i_2 (joonis 5.1). Loeme need voolud sisenevaks samanimelistesse klemmidesse, kui kummaski poolis tekkiv omainduktsiooni magnetvoog Φ_L ja vastastikuse induktsiooni magnetvoog Φ_M on vastavalt ühes suunas orienteeritud, s.o suunalt kokkulangevad. See oli päriühendus. Vastuühenduse korral sisenevad voolud erinevatesse klemmidesse ja tekkivad magnetvood on erinevate suundadega. Samanimelisi klemme (tinglikult algusklemme) tähistame poolidel tavaliselt märgiga •. Siin on teine mähis esimese mähise suhtes mähitud kas pärisuunas või vastupidi. Sellele vastavalt on mähiste samanimelised klemmid kas mõlemad ühel pool otstes või erinevates otstes.

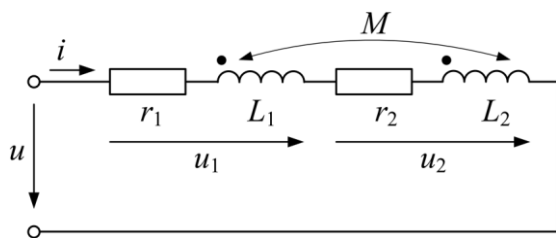


Joonis 5.1. Kahe induktiivpooli samanimelised klemmid ja vooludest i_1 ja i_2 põhjustatud vastavad magnetvood 1. ja 2. induktiivpooli sees.

Kui voolud mõlemas mähispoolis sisenevad ühenimelisest klemmist, siis elektrialhela kohta koostatavas võrrandis või võrrandisüsteemis on see pingelang positiivne – päriühendus. Kui aga voolud i_1 ja i_2' poolides sisenevad erinimelistest klemmidest (vastuühendus!), siis võrrandites on vastastikuse induktiivsuse mõju arvestavad pingelangud negatiivsed, s.o omainduktiivpingelanguga vastasmärgilised.

5.2 Vastastikuse induktiivse sidestusega kahe induktiivpooli jadaühendus

Vaatleme alguses kahe vastastikuse induktiivsuse kaudu sidestatud induktiivpooli pärijadaühendust (joonis 5.2). Sealjuures olgu ahelas aktiivtakistused r_1 ja r_2 (näiteks reaalseste induktiivpoolide mähisetraadi aktiivtakistused), induktiivsused L_1 ja L_2 ning vastastikune induktiivsus M . Pärijadaühenduse korral on igal ajahetkel induktiivpoolide ühenimeliste klemmide suhtes voolud ühtmoodi suunatud. Seetõttu magnetvood Φ_L ja Φ_M on kummaski mähises suunalt kokkulangevad ja liituvad. Seega liituvad ka omainduktsiooni ja vastastikuse induktsiooni elektromotoorjõud mähispoolidel, samuti liituvad oma- ja vastastikuse induktiivsuse pingelangud poolidel.



Joonis 5.2. Kahe induktiivpooli pärijadaühenduse skeem.

Seega avaldub toitepinge kui summa kõigist pingelangudest:

$$u = \left(r_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \right) + \left(r_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \right).$$

Sama avaldis sümbolimeetodil kompleksarvulisel kujul:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= (r_1 + j\omega L_1 + j\omega M) \underline{I} + (r_2 + j\omega L_2 + j\omega M) \underline{I} = \\ &= [r_1 + j\omega(L_1 + M)] \underline{I} + [r_2 + j\omega(L_2 + M)] \underline{I} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 \end{aligned}$$

või teisiti

$$\underline{U} = [(r_1 + r_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)] \underline{I} = \underline{Z}_{pj} \underline{I},$$

kus $\underline{Z}_{pj}$ on pärijadaühenduses ahela sisendtakistus:

$$\underline{Z}_{pj} = (r_1 + r_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) \quad (5.1)$$

või teisiti

$$\underline{Z}_{pj} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M = (r_1 + j\omega L_1) + (r_2 + j\omega L_2) + 2j\omega M.$$

Avaldisest (5.1) nähtub, et vastastikuse induktiivsuse olemasolu pärijadaühenduses induktiivpoolide korral suurendab selle elektrialhela induktiivsust.

Kahe vastastikuse induktiivsusega sidestatud induktiivpooli vastujadaühenduse korral nende e_L ja e_M on vastasmärgilised, sest Φ_L ja Φ_M on erinevates suundades. Selle tõttu ka pingelangude avaldises on vastastikuse induktiivsuse pingelang omainduktiivpingelangule vastasmärgiline (–):

$$u = \left(r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \right) + \left(r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \right)$$

ja vastavalt sümbolimeetodil komplekskujul:

$$\underline{U} = [(r_1 + r_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)] \underline{I} = \underline{Z}_{vj} \underline{I},$$

kus vastujadaühenduse sisendtakistus kahe pooli korral on:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{vj} &= (r_1 + r_2) + j\omega(L_1 + L_2 - 2M) = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M \\ &= (r_1 + j\omega L_1) + (r_2 + j\omega L_2) - 2j\omega M.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Seega vastujadaühenduses induktiivpoolide korral ahela sisendinduktiivtakistus väheneb vastastikuse induktiivsuse tõttu.

Eespool toodud päri- ja vastujadaühenduste sisendtakistuste avaldistest on näha, et need erinevad teineteisest suuruse $4\underline{Z}_M$ võrra. Siit võimalus katseliselt määrata vastastikuse induktiivsuse M määramiseks: olgu x_{pj} pärijadaühenduse induktiivtakistus

$$x_{pj} = \omega(L_1 + L_2 + 2M)$$

ja x_{vj} vastavalt vastujadaühenduse ekvivalentne induktiivtakistus

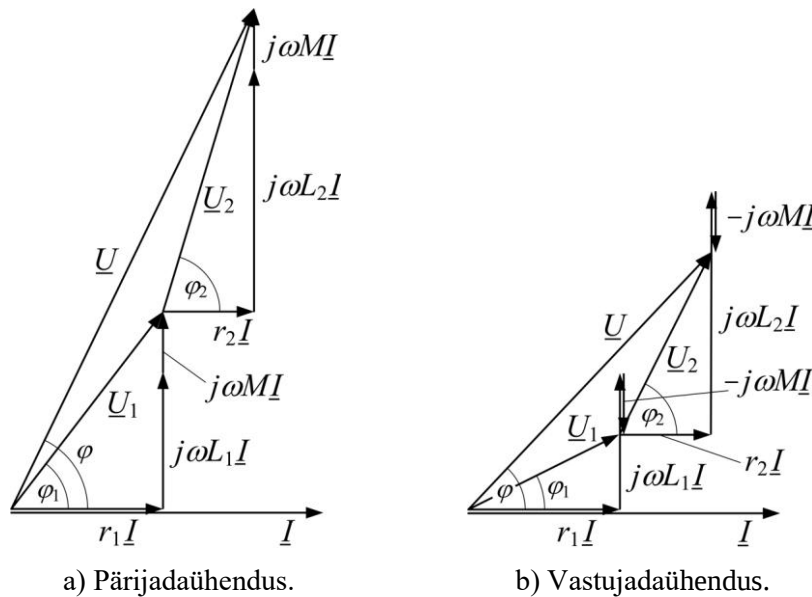
$$x_{vj} = \omega(L_1 + L_2 - 2M),$$

nende vahe kaudu saame

$$M = \frac{x_{pj} - x_{vj}}{4\omega}.\quad (5.3)$$

Konstrueerime järgnevalt nii päri- kui ka vastujadaühenduse korral vektordiagrammi kompleksitasandil (joonis 5.3). Siin lõikude pingelangud avalduvad:

$$\left. \begin{aligned}\underline{U}_1 &= r_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} \pm j\omega M \underline{I}; \\ \underline{U}_2 &= r_2 \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} \pm j\omega M \underline{I}.\end{aligned} \right\}\quad (5.4)$$



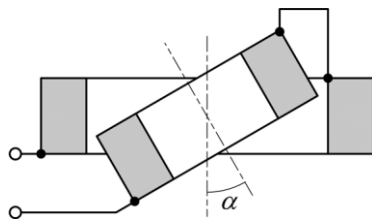
Joonis 5.3. Induktiivpoolide jadaühenduse skeemi vektordiagrammid.

Kui siinjuures ühe pooli induktiivsus (näiteks L_2) on väiksem kui vastastikune induktiivsus M ($L_2 < M$), siis tekib "mahtuvuslik" efekt vastujadaühenduse korral, kusjuures pinge $\underline{U}_2$ on faasis taga voolust $\underline{I}$ ("võltsmahtuvus"). Kuid kogu jadaahela induktiivsus on suurem kui null, s.o

$$L' = L_1 + L_2 - 2M > 0,$$

seega ahel jääb induktiivse iseloomuga.

Variomeeter. Mõõte- ja raadiotehnikas vajatakse sageli sujuvalt muudetavat induktiivsust. Selleks sobib variomeeter. See seade koosneb kahest mähispoolist, mis on kinnitatud ühisele teljele, üks poolidest paikneb teise sees ja võib pöörduda teise suhtes ühise telje ümber (joonis 5.4).



Joonis 5.4. Variomeetri põhimõtteline konstruktsioon.

Jadaühenduse korral:

$$L_{\min} = L_1 + L_2 - 2M$$

ja

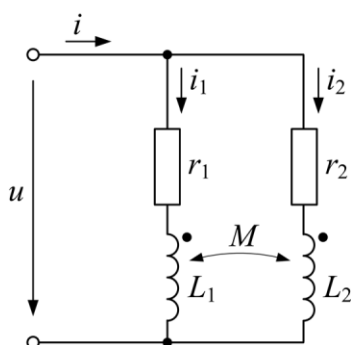
$$L_{\max} = L_1 + L_2 + 2M.$$

Vahepealsete L väärtuste muutus toimub reguleerimisseose järgi:

$$L = L_1 + L_2 + 2M \cos \alpha.$$

5.3 Vastastikuse induktiivse sidestusega kahe induktiivpooli rööpühendus

Vaatleme kahe sellise induktiivpooli rööpühendust, mille parameetriteks on vastavalt r_1 , L_1 , r_2 , L_2 ja vastastikune induktiivsus M (joonis 5.5). Tähistame kummagi pooli voolu vastavalt i_1 ja i_2 , kusjuures mõlema rööpse pooli klemmidel on ühesugune pinge u . Kirchhoffi II seaduse põhjal võime kummagi pooli kohta poolide pärirööpühenduse korral kirjutada võrrandi:



Joonis 5.5. Induktiivpoolide rööpühenduse skeem.

$$\left. \begin{aligned} u &= r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}; \\ u &= r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \right\}$$

Samad võrrandid sümbolimeetodil, millele vastab ka pärirööpühenduse vektordiagramm (joonis 5.6a):

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= r_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_M \underline{I}_2; \\ \underline{U} &= r_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_M \underline{I}_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Siin on takistused $\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1$; $\underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2$ ja $\underline{Z}_M = j\omega M$.

Lahendades selle võrrandisüsteemi, saame pärirööpühenduse korral voolud:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \frac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \underline{U}; \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \underline{U}; \\ \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \underline{U}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Siit saame pärirööpühenduses ahela sisendtakistuse avaldise:

$$\underline{Z}_{pr} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M}. \quad (5.7)$$

Kui vaadelda samu induktiivpoolde vasturööpühenduses, saame neist kummagi kohta võrrandi (5.8) ja vastava vektordiagrammi (joonis 5.6b):

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= r_1 \underline{I}_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_M \underline{I}_2; \\ \underline{U} &= r_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_M \underline{I}_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

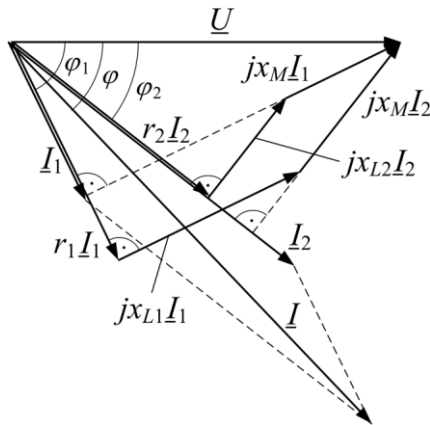
Siit saame vasturööpühenduse korral kogu elektriavala sisendtakistusele avaldise:

$$\underline{Z}_{vr} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M}. \quad (5.9)$$

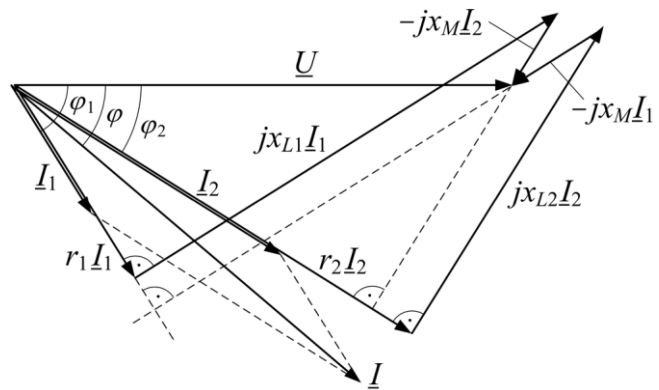
Seega üldistatud juhtumil vastastikuse induktiivsusega sidestatud poolide rööpühenduse korral avaldub ahela sisendtakistus

$$\underline{Z}_r = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M}, \quad (5.10)$$

kus märk "-" vastab päirööpühendusele ja märk "+" vasturööpühendusele.



a) Päirööpühendus.



b) Vasturööpühendus.

Joonis 5.6. Induktiivpoolide rööpühenduse skeemi vektordiagrammid.

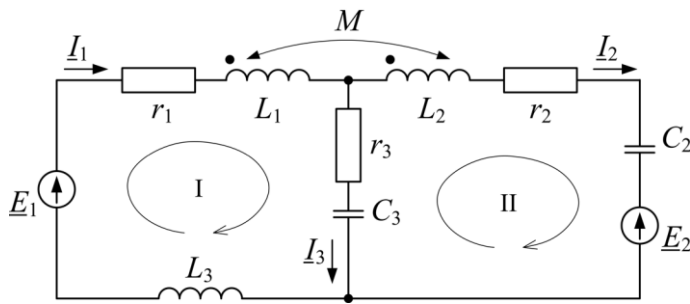
Kui rööpühenduse sisendtakistuse avaldises jätta arvestamata aktiivtakistuste r_1 ja r_2 mõju (st $r_1 = r_2 \approx 0$), siis saame puhtinduktiivse sisendtakistuse, kust ekvivalentne sisendinduktiivsus avaldub

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 \mp 2M}. \quad (5.11)$$

Ka variomeetris kasutame poolide jadaühenduse kõrval poolide rööpühendamist, nii saadav L_{ekvr} on väiksem kui vastujadaühenduse L_{ekvj} .

5.4 Induktiivse sidestusega keerukate elektriavala analüüsi meetodid

Vaatleme vahelduvvooluahelat, mille struktuuri kuuluvad vastastikku induktiivselt sidestatud elemendid (joonis 5.7). Olgu teada kõik ahelaelementide parameetrid r_i , L_i , C_i ja M_{ik} ning $\underline{E}_i$. Määrata tuleks voolud $\underline{I}_i$. Kasutame mitmeid arvutusmeetodeid.



Joonis 5.7. Vastastikuse induktiivse sidestusega elemente sisaldava hargneva elektriavala skeem.

Kirchhoffi seaduste meetod

Valime vabalt voolude suunad ja kontuuride ringkäigusuunad. Algul koostame võrrandid u ja i hetkväärtuste kaudu:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3 ; \\ e_1 &= r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_3 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + r_3 i_3 + \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3 dt ; \\ -e_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + r_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2 dt - \frac{1}{C_3} \int_0^t i_3 dt - r_3 i_3 . \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Siin on poolides voolud ja ka pingelangud samasuunalised, s.o. •-klemmist lõpuklemmi suunas. Selle tõttu on ka pingelangud $L \frac{di}{dt}$ ja $M \frac{di}{dt}$ ühesuguse märgiga.

Sümbolimeetodil samad võrrandid avalduvad:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 + \underline{I}_3 ; \\ \underline{E}_1 &= (r_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 + \left(r_3 - j \frac{1}{\omega C_3} \right) \underline{I}_3 ; \\ -\underline{E}_2 &= j\omega M \underline{I}_1 + \left(r_2 + j\omega L_2 - j \frac{1}{\omega C_2} \right) \underline{I}_2 - \left(r_3 - j \frac{1}{\omega C_3} \right) \underline{I}_3 . \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Toome sisse harude omataktused ja vastastikused takistused:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= r_1 + j\omega L_1 ; \\ \underline{Z}_2 &= r_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) ; \\ \underline{Z}_3 &= r_3 - j \frac{1}{\omega C_3} ; \\ \underline{Z}_M &= j\omega M . \end{aligned}$$

Nende takistuste kaudu avalduvad eespool toodud võrrandid:

$$\left. \begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 + \underline{I}_3 ; \\ \underline{E}_1 &= \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_M \underline{I}_2 + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 ; \\ -\underline{E}_2 &= \underline{Z}_M \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_3 \underline{I}_3 . \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Lahendades toodud võrrandsüsteemi, saamegi otsitavad voolud $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ ja $\underline{I}_3$.

Kontuurvoolude meetodil saab samuti vastastikuse induktiivse sidestusega elemente sisaldavaid elektriavala analüüsida (põhineb ju kontuurvoolumeetod Kirchhoffi II seadusel, see aga võimal-

dab võtta arvesse ka vastastikuse induktiivsuse pingelangud). Eespool toodud skeemile vastavalt saame kontuurvoolumeetodil võrrandsüsteemi:

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_1 &= \underline{Z}_{11} \underline{I}_{11} + \underline{Z}_M \underline{I}_{22} - \underline{Z}_{12} \underline{I}_{22} ; \\ -\underline{E}_2 &= -\underline{Z}_{21} \underline{I}_{11} + \underline{Z}_M \underline{I}_{11} + \underline{Z}_{22} \underline{I}_{22} , \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

kus kontuuride vastastikune (ühis-)takistus

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = r_3 - j \frac{1}{\omega C_3} .$$

Kui lülitada vastastikuse induktiivsuse takistus kontuuride ühistakistuse koosseisu:

$$\underline{Z}_{12}' = \underline{Z}_{21}' = r_3 - j \frac{1}{\omega C_3} - j\omega M ,$$

saame

$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_1 &= \underline{Z}_{11} \underline{I}_{11} - (\underline{Z}_{12} - \underline{Z}_M) \underline{I}_{22} ; \\ -\underline{E}_2 &= -(\underline{Z}_{21} - \underline{Z}_M) \underline{I}_{11} + \underline{Z}_{22} \underline{I}_{22} . \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Kõiki takistusi asemele pannes saame avaldise

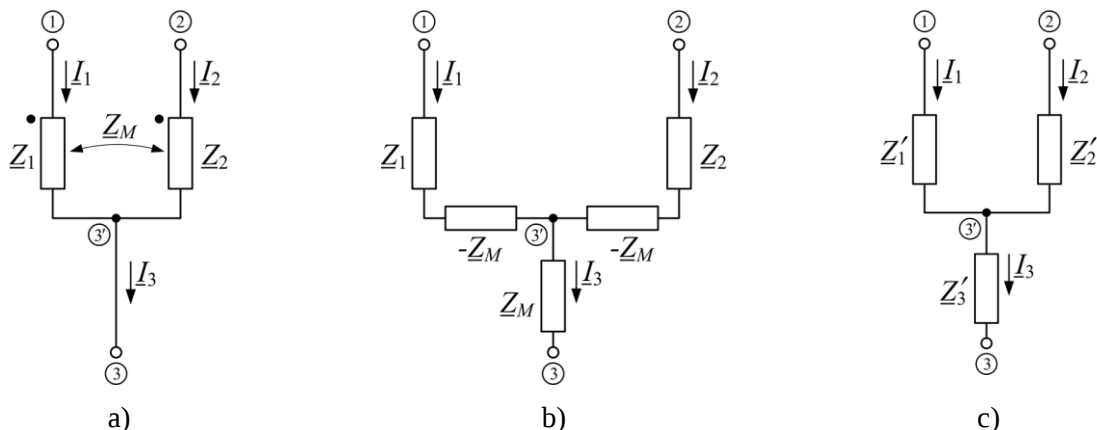
$$\left. \begin{aligned} \underline{E}_1 &= \left[(r_1 + r_3) + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_3} \right) \right] \underline{I}_{11} - \left[r_3 - j \left(\frac{1}{\omega C_3} + \omega M \right) \right] \underline{I}_{22} ; \\ -\underline{E}_2 &= - \left[r_3 - j \left(\frac{1}{\omega C_3} - \omega M \right) \right] \underline{I}_{11} + \left[(r_2 + r_3) + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} - \frac{1}{\omega C_3} \right) \right] \underline{I}_{22} . \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Ka superpositsiooni meetod ja ekvivalentse generaatori meetod on rakendatavad voolu leidmiseks sellises harus, mis ei sisalda M -elemente. Sõlmepotentsiaalide meetodit ei saa kaasutada, kuna see meetod põhineb Kirchhoffi I seadusele – see ei võimalda arvestada e_M suurst. Ka ekvivalentse takistuse meetodit ei saa kasutada, välja arvatud jadaühenduse korral.

5.5 Vastastikuse induktiivsuse seoste ekvivalentne asendamine ahelas

Selliste elektrialhela analüüsi ja arvutamist, mis sisaldavad vastastikuse induktiivsusega sidestatud induktiivelemente, saab mõnikord lihtsustada, kui M -sidemetega skeemiosa asendada ekvivalentse skeemiosaga ilma otseste M -sidemeteta (skeemi lahtisidestamine – joonis 5.8).

Lähtume skeemiosast, kus on olemas vastastikuse induktiivse sidestusega elemendid, mis on ühissõlmega ühendatud. Olgu tegemist päriühendusega. Kirjutame avaldised sõlmedevahelistele pingelangudele $\underline{U}_{13}$ ja $\underline{U}_{23}$.



Joonis 5.8. Elektrialhela harudevahelise vastastikuse induktiivse mõju lahtisidestamine.

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{13} &= \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_M \underline{I}_2 ; \\ \underline{U}_{23} &= \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_M \underline{I}_1 . \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Tuues sisse lisaseose vooludele $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0$, kõrvaldame esimesest võrrandist voolu $\underline{I}_2$ (asendame $\underline{I}_2 = \underline{I}_3 - \underline{I}_1$) ja teisest võrrandist voolu $\underline{I}_1$. Siis saame:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{13} &= \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_M (\underline{I}_3 - \underline{I}_1) = (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M) \underline{I}_1 + \underline{Z}_M \underline{I}_3 ; \\ \underline{U}_{23} &= \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_M (\underline{I}_3 - \underline{I}_2) = (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) \underline{I}_2 + \underline{Z}_M \underline{I}_3 . \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Peale selle on võimalik avaldada:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_M \underline{I}_2 - (\underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_M \underline{I}_1) = \\ &= \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_M (\underline{I}_3 - \underline{I}_1) - [\underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{Z}_M (\underline{I}_3 - \underline{I}_2)] \\ &= (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M) \underline{I}_1 - (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) \underline{I}_2 . \end{aligned} \quad (5.20)$$

Need kolm võrrandit kirjeldavad 3-harulist tähekujulist ühendust, milles puudub otsene vastastikune induktiivne sidestus harude vahel.

Vastuühenduse puhul:

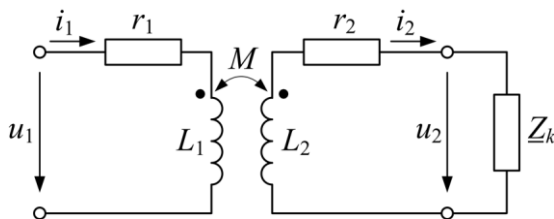
$$\underline{Z}'_1 = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_M ; \quad \underline{Z}'_2 = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_M ; \quad \underline{Z}'_3 = -\underline{Z}_M .$$

5.6 Õhksüdamikuga trafo (transformaator)

Transformaator on selline elektriaparaat või elektriseade, mis kannab energiat üle ühest elektri-ahelast teise ahelasse elektromagnetilise induksiooni vahendusel. Trafot kasutatakse põhiliselt vahelduvvoolu või -pinge muundamiseks (pinget või voolu tõstavad/madalavad trafod). Mõnikord kasutame trafot toite- ja tarbijaahela elektriliseks eraldamiseks – eraldustrafo.

Trafo koosneb kahest või mitmest induktiivselt omavahel sidestatud mähisest, mis on tavaliselt paigutatud ühisele südamikule (ferromagnetiline või mitteferromagnetiline). Siin vaatleme 2-mähiselist trafot ilma ferromagnetilise südamikuta (joonis 5.9). Selliseid trafosid kasutatakse mõõtetehnikas, raadiotehnikas, automaatikas jm.

Kui me ei arvesta keerdudevahelisi mahtuvusi, siis võime sellist trafot kirjeldada aseskeemiga, milles on eraldi välja toodud aktiivtakistused r_1 ja r_2 , induktiivtakistused L_1 ja L_2 ning M . Toidetav mähis on primaarmähis, sekundaarmähise klemmidele ühendame koormuse $\underline{Z}_k$. Sellele vastavalt avalduvad ka primaar- ja sekundaarpinged ja -voolud.



Joonis 5.9. Õhksüdamikuga trafo aseskeem.

Trafo tööpõhimõte. Primaarpinge u_1 tekitab primaarmähises voolu i_1 , see omakorda tekitab induktiivpooli magnetvoo, millest osa (või kõik) aheldub sekundaarmähise keerdudega ja indutseerib seal vastastikuse induktiivsuse elektromotoorjõu $e_{2M} = -M di_1/dt$, primaarmähises aga omainduktsiooni elektromotoorjõu $e_{1L} = -L_1 di_1/dt$. Kui sekundaarmähise klemmidele on ühendatud koormustakistus $\underline{Z}_k$, tekib e_{2M} tõttu sekundaarvool i_2 , mis omakorda indutseerib omainduktsiooni emf sekundaarmähises e_{2L} ja vastastikuse induktiivsuse emf e_{1M} primaarmähises.

Kui voolude arvutuslike suundade kohaselt on skeemis vastastikuse induktiivse sidestusega vastuühendus (vt. joonis 5.9), siis saame trafo pingete tasakaaluvõrrandid:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= r_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}; \\ 0 &= r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} + u_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

või sümbolimeetodil komplekskujul võrrandid:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= (r_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2; \\ 0 &= (r_2 + j\omega L_2) \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 + \underline{U}_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

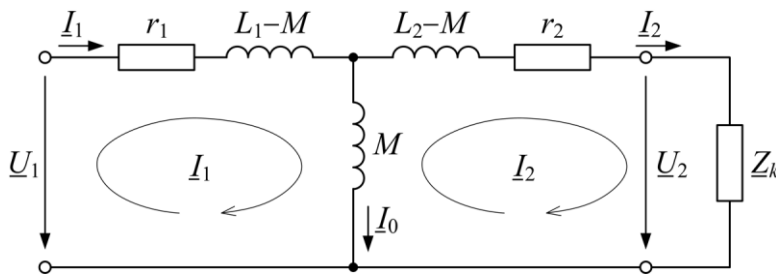
kus sekundaarklemmipinge on

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \underline{Z}_k = \underline{I}_2 (r_k + jx_k).$$

Kasutades vastastikku induktiivselt sidestatud ahelaosade teisendamist, kirjutame võrrandid (5.22) $(+j\omega M - j\omega M)\underline{I}_1$ abil teisiti:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= [r_1 + j\omega(L_1 - M) + j\omega M] \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2; \\ 0 &= [r_2 + j\omega(L_2 - M) + j\omega M] \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 + \underline{Z}_k \underline{I}_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

See kujutab kontuurvõrrandite süsteemi, millele vastav elektriskeem on joonisel 5.10. Siis elektri-ahela kontuuride ühisharu vool (magneetimisvool) on $I_0 = I_1 - I_2$. See ongi ferromagnetilise südami-kuta trafo aseskeem. Siin on vastastikuse induktiivsuse (mittekontaktne) seos asendatud vahetu elektriliselt primaar- ja sekundaarahelaga ühendatud sideharu seosega.



Joonis 5.10. Ferromagnetilise südamikuta trafo aseskeem.

Kahe vastastikku induktiivselt sidestatud mähispooli sidestatust iseloomustab sidestustegur K , mis näitab suhet poolide vastastikuse induktiivsuse magnetvoo Φ_M ja poolide kogumagnetvoo Φ vahel:

$$K = \sqrt{\frac{\Phi_{M1}}{\Phi_1} \cdot \frac{\Phi_{M2}}{\Phi_2}}.$$

Kuna magnetvood avalduvad induktiivsuste L_1 , L_2 ja M , voolude i_1 ja i_2 ning keerdude arvude w_1 ja w_2 kaudu, st $\Phi_{M1} = Mi_1/w_2$, $\Phi_{L1} = L_1 i_1/w_1$, $\Phi_{L2} = L_2 i_2/w_2$ ja $\Phi_{M2} = Mi_2/w_1$, siis

$$K = \sqrt{\frac{Mi_1 w_1}{w_2 L_1 i_1} \cdot \frac{Mi_2 w_2}{w_1 L_2 i_2}}$$

ehk lõplikult

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (5.24)$$

Kuna $\Phi_{M1}/\Phi_1 < 1$ ja $\Phi_{M2}/\Phi_2 < 1$, siis on alati $K < 1$.

Õhksüdamikuga trafode korral võrdsete primaar- ja sekundaarmähiste induktiivsuste korral $L_1 = L_2$

ja kuna $K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} < 1$, siis $L_1 - M > 0$ ja $L_2 - M > 0$.

Kui $L_1 \neq L_2$, võib juhtuda, et üks vahedest (kas $L_1 - M$ või $L_2 - M$) võib olla väiksem kui null. Näiteks kui $w_1 \gg w_2$, siis $L_1 > M$ ja $L_2 < M$. Seega askeemi sekundaarharu on näivald mahtuvusliku iseloomuga.

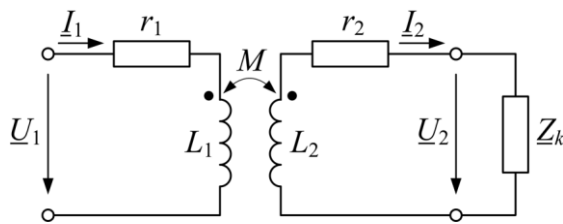
Kui $L_1 = L_2$ ($w_1 = w_2$) siis omavad suurused $L_1 - M$ ja $L_2 - M$ reaalsed mõtet, neid nimetatakse puiste-induktiivsusteks L_{1s} ja L_{2s} .

5.7 Trafo sisendtakistus

Trafo sisendtakistuse iseloomustamiseks lähtume trafo askeemist (joonis 5.11) ja vastavatest võrranditest kujul:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_M \underline{I}_2; \\ 0 &= \underline{Z}_2 \underline{I}_2 - \underline{Z}_M \underline{I}_1 + \underline{U}_2, \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

kus $\underline{Z}_1 = r_1 + j\omega L_1$; $\underline{Z}_2 = r_2 + j\omega L_2$; $\underline{Z}_M = j\omega M$ ja $\underline{I}_2 \underline{Z}_k = \underline{U}_2 = \underline{I}_2 (r_k - jx_k)$.



Joonis 5.11. Trafo askeem.

See süsteem teisiti on:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \underline{Z}_M \underline{I}_2 &= \underline{U}_1; \\ -\underline{Z}_M \underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_k) \underline{I}_2 &= 0. \end{aligned} \right\}.$$

Teisest võrrandist avaldame voolu

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_M}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_k} \underline{I}_1.$$

Asendades voolu $\underline{I}_2$ esimesse võrrandisse, saame:

$$\underline{Z}_1 \underline{I}_1 - \frac{\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_k} \underline{I}_1 = \underline{U}_1,$$

kust avaldub primaarahela suhtes ekvivalentne sisendtakistus

$$\underline{Z}_s = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_k} = \underline{Z}_1 + \underline{\Delta Z}, \quad (5.26)$$

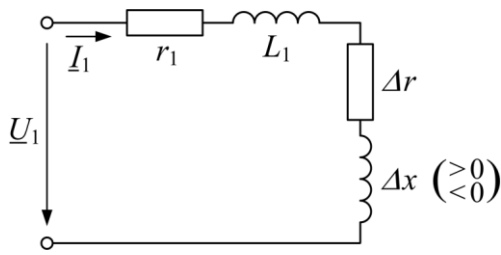
kus $\underline{\Delta Z}$ kujutab endast ekvivalentse takistusaskeemi sisetoodavat sekundaarahela mõju kajastavat komplekstakistust:

$$\underline{\Delta Z} = -\frac{\underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_k} = \frac{\omega^2 M^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_k} = \Delta r + j\Delta x. \quad (5.27)$$

Selle sisseviidava komplekstakistuse aktiiv- ja reaktiivtakistus avalduvad vastavalt:

$$\Delta r = \frac{\omega^2 M^2}{(r_2 + r_k)^2 + (x_2 + x_k)^2} \cdot (r_2 + r_k) \quad (> 0); \quad (5.28)$$

$$\Delta x = -\frac{\omega^2 M^2}{(r_2 + r_k)^2 + (x_2 + x_k)^2} \cdot (x_2 + x_k) \quad \begin{pmatrix} > 0 \\ < 0 \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$



Joonis 5.12. Sekundaarahela mõju arvestav askeem.

Sekundaarahela mõju arvestav ekvivalentne askeem on esitatud joonisel 5.12. Seega ekvivalentse ahela kogu sisendtakistus avaldub

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_1 + \Delta \underline{Z} = (r_1 + \Delta r) + j(x_1 + \Delta x),$$

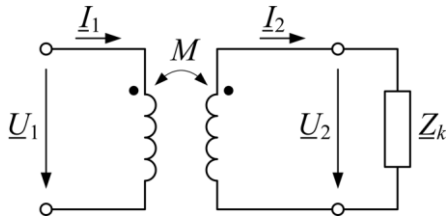
Δr kajastab võimsust, mida antakse primaarahelast üle sekundaarahelasse: $P_2 = I_1^2 \Delta r$.

5.8 Ideaalne trafo

Ideaalne trafo (joonis 5.13) kujutab endast sellist elektri ahela elementi, mida iseloomustavad järgmised omadused: igasugustel tingimustel on primaar- ja sekundaarpingete komplekside või sekundaar- ja primaarvoolude komplekside suhe konstantne ja võrdub $\underline{n}$:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \underline{n} = n \angle \nu. \quad (5.30)$$

Siin $\underline{n}$ on ideaalse trafo ülekandetegur.



Joonis 5.13. Ideaalse trafo askeem.

Olgu ideaalse trafo sekundaarklemmidele ühendatud koormustakistus $\underline{Z}_k = r_k + jx_k$. Siis ideaalse trafo sisendtakistus avaldub:

$$\underline{Z}_{1s} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{n \underline{U}_2}{\frac{\underline{I}_2}{n}} = n^2 \underline{Z}_k. \quad (5.31)$$

Seega on sisendtakistus n^2 korda suurem koormustakistusest. Analoogselt, kui primaarmähise külge ühendada koormustakistus $\underline{Z}_k$, siis sekundaarklemmidele sisendtakistus on:

$$\underline{Z}_{2s} = \frac{\underline{Z}_k}{n^2}. \quad (5.32)$$

Need suhted iseloomustavad takistuse transformeerumist.

Kui sekundaarahel on tühijooksul (s.o $\underline{Z}_k = \infty$) siis ka $\underline{Z}_{1s} = \infty$. Kui sekundaarahel lühistatud (s.o $\underline{Z}_k = 0$), siis ka $\underline{Z}_{1s} = 0$.

Seos primaar- ja sekundaarvõimsuste vahel:

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = n \underline{U}_2 \frac{\underline{I}_2^*}{n} = \underline{S}_2 e^{j2\nu},$$

kuna

$$\frac{n}{n^*} = \frac{n \angle \nu}{n \angle -\nu} = e^{j2\nu}.$$

Kui ülekandetegur on reaalarv $\underline{n} = n \angle 0^\circ$, siis $\underline{S}_1 = \underline{S}_2$, järelikult $P_1 = P_2$ ja $Q_1 = Q_2$.

Et reaaltrafo muutuks ideaalseks, on vaja:

$$1) \quad r_1 = r_2 = 0;$$

$$2) \quad K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1, 0;$$

$$3) \quad \text{magneetimisahela vool (st tühijooksuvool)} \rightarrow 0, \text{ s.o } e_M \rightarrow 0 \text{ või } w_2 = w_1 n \rightarrow \infty.$$

Praktiliselt on see saavutatav vaid ligikaudselt.