



# Kahetasemeline minimeerimine ja mitmetasemeline realisatsioon

abc	xy
000	-0
001	11
010	00
011	00
100	10
101	11
110	11
111	0-

mintermid

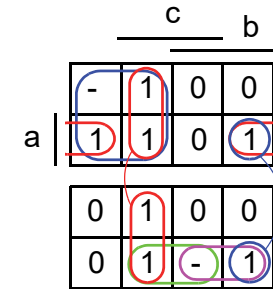
gr.	abc	e
0	000	10
1	001	10
	001	01
	100	10
2	101	10
	101	01
	110	10
	110	01
3	111	01

1. etapp

gr.	abc	e
0	00-	10*
	-00	10*
1	001	11*
	-01	10*
	-01	01*
	10-	10*
	1-0	10 <b>A</b>
2	101	11*
	110	11 <b>B</b>
	1-1	01 <b>C</b>
	11-	01 <b>D</b>

2. etapp

gr.	abc	e
0	-0-	10 <b>E</b>
1	-01	11 <b>F</b>



lihtimplikantide tabel

abc e	A	B	C	D	E	F
<del>001 10</del>					+	+
* 001 01						*
100 10	+				+	
<del>101 10</del>					+	+
<del>101 01</del>				+		+
110 10	+	+				
110 01			+	+		

abc e	A	B	C	D	E
100 10	+				+
110 10	+	+			
110 01		+		+	

3 varianti

- 1: F, A, B
- 2: F, A, D
- 3: F, B, E



# Kahetasemeline minimeerimine ja mitmetasemeline realisatsioon

3 varianti

1: F, A, B

2: F, A, D

3: F, B, E

Lisaks

üksikult

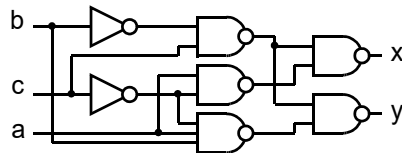
minimeeritud

4: A, E, D, F

$bi=b'$ ;  $ci=c'$ ;  $t1=bi \cdot c$ ;

$t2=a \cdot ci$ ;  $t3=a \cdot b \cdot ci$ ;

$x=t1+t2$ ;  $y=t1+t3$ ;



abc	xy
-01	11
1-0	10
110	<u>01</u>

	c	b	
-	1	0	0
a	1	1	0
	0	1	0
	0	1	-

NOT - 2  
2-NAND - 4  
3-NAND - 1  
26 transistori  
[13 literaali]

abc	xy
-01	11
1-0	10
11-	01

	c	b	
-	1	0	0
a	1	1	0
	0	1	0
	0	1	-

NOT - 2  
2-NAND - 5  
3-NAND - 0  
24 transistori  
[12 literaali]

abc	xy
-01	<u>01</u>
110	11
-0-	10

	c	b	
-	1	0	0
a	1	1	0
	0	1	0
	0	1	-

NOT - 2  
2-NAND - 3  
3-NAND - 1  
22 transistori  
[11 literaali]

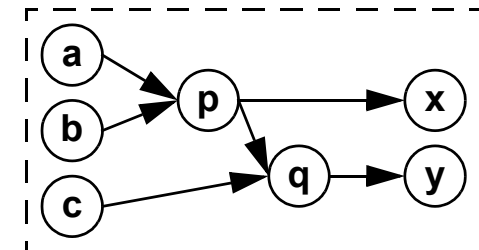
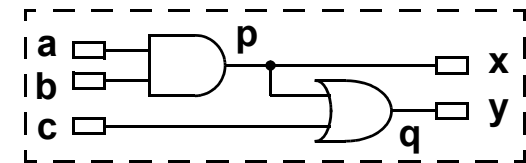
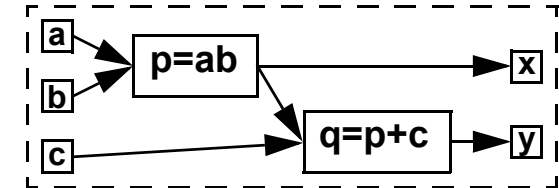
abc	xy
1-0	10
-0-	10
11-	01
-01	<u>01</u>

	c	b	
-	1	0	0
a	1	1	0
	0	1	0
	0	1	-

NOT - 2  
2-NAND - 5  
3-NAND - 0  
24 transistori  
[12 literaali]

# Mitmetasemeline loogikafunktsioonide minimeerimine

- Loogikaelementide teegid – loogikalülid / makrod
- Esitusviis – loogikavõrkgraaf (logic network)
  - omavahel ühendatud loogikafunktsioonid
- Seotud võrkgraaf (bound/mapped network)
  - omavahel ühendatud loogikalülid (struktuurne mudel)
- Pindala (võimsustarbe) ennustuse minimeerimine
  - arvestada tuleb viite piiranguid
- Suurima viite minimeerimine
  - arvestada tuleb pindala (võimsustarbe) piiranguid
- Testitavuse parendamine / võimsustarbe vähendamine
- Ennustus (estimation)
  - literaalide arv, loogikalülide mudelid, olulised signaaliteed, ...
- Mitmetasemeline minimeerimine on *raske* !
- Heuristilised optimeerimis-strateegiad
  - samm-sammuline parendamine – teisendused (transformations) võrkgraafil
  - erinevad meetodid – teisenduste variandid & teisenduste rakendamise järjekorrad



# Näitevõrkgraaf

$$p = ce + de$$

$$q = a + b$$

$$r = p + a'$$

$$s = r + b'$$

$$t = ac + ad + bc + bd + e$$

$$u = q'c + qc' + qc$$

$$v = a'd + bd + c'd + ae'$$

$$w = v$$

$$x = s$$

$$y = t$$

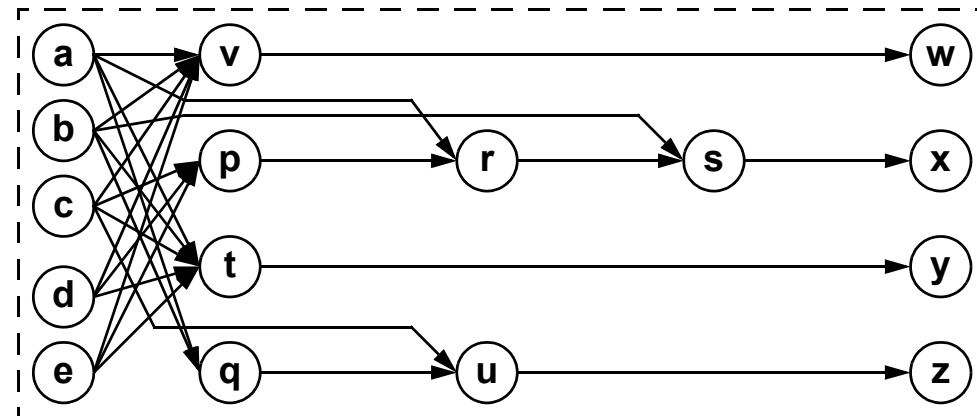
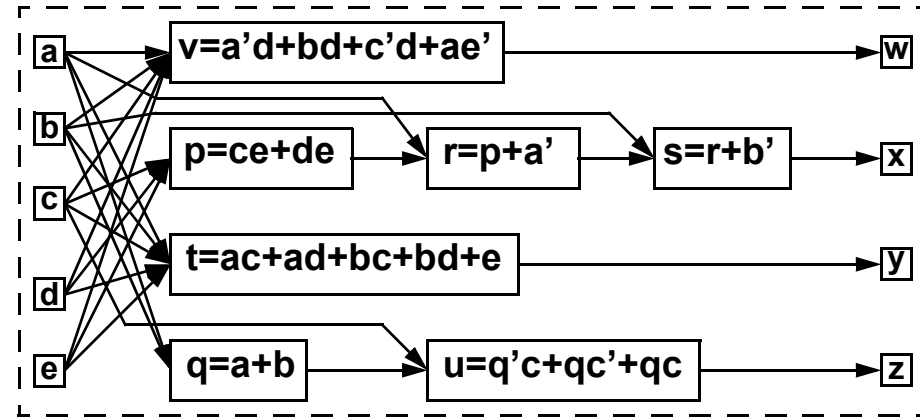
$$z = u$$

$$w = a'd + bd + c'd + ae'$$

$$f: x = a' + b' + ce + de$$

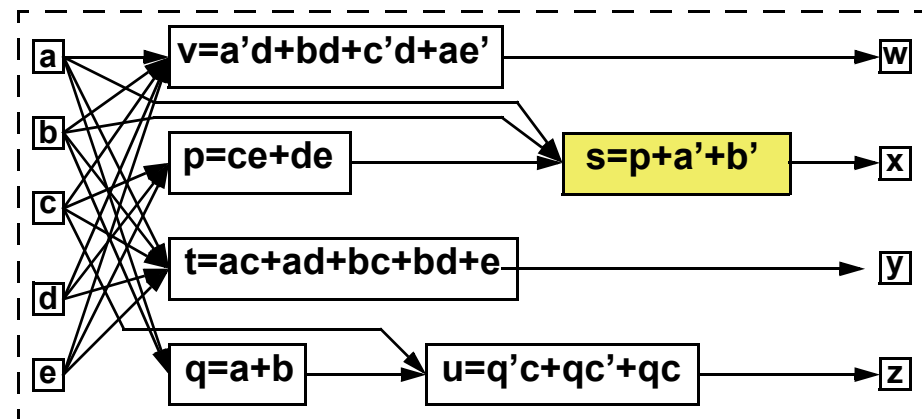
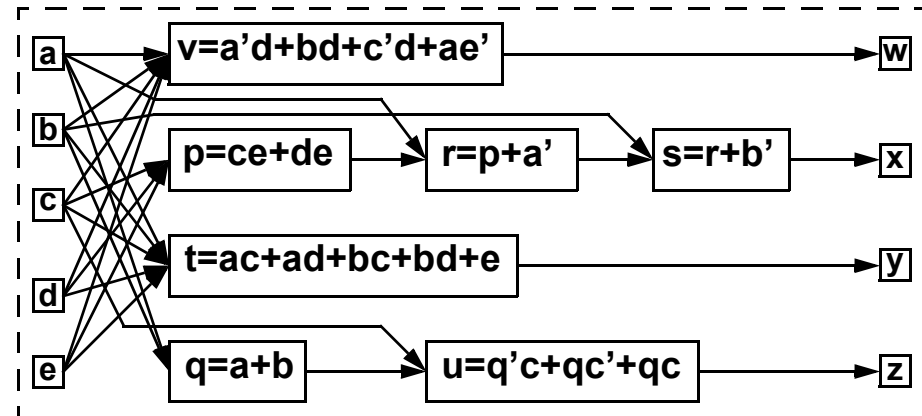
$$y = ac + ad + bc + bd + e$$

$$z = a + b + c$$



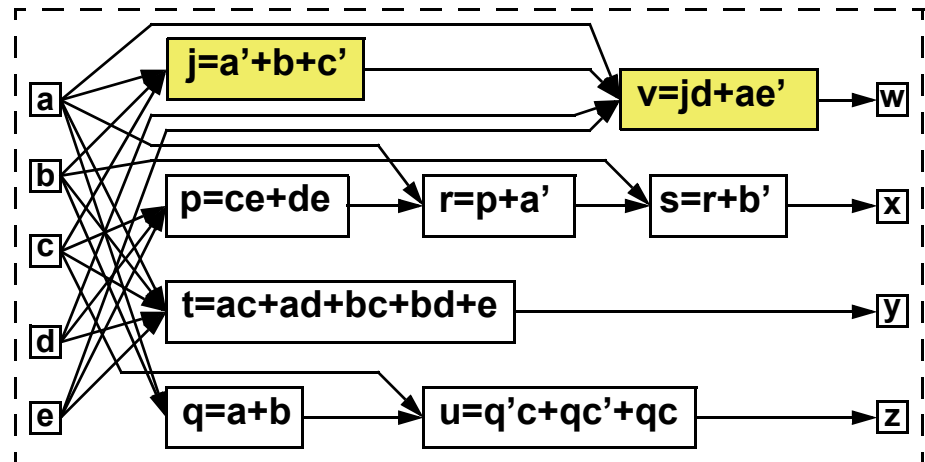
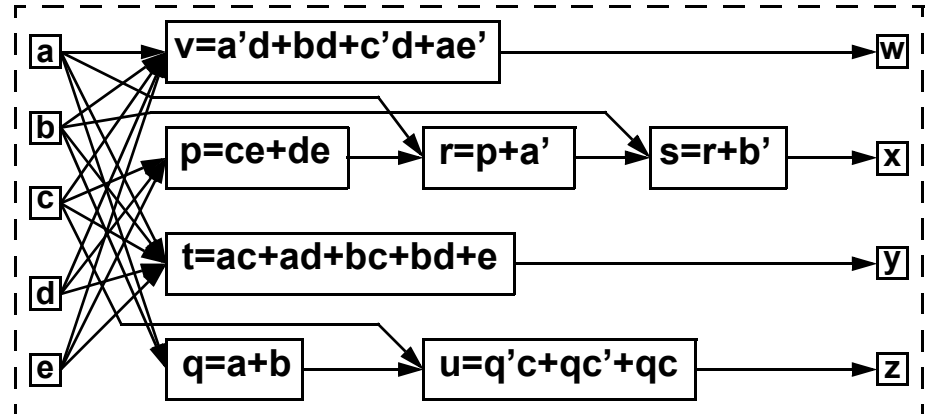
## Eemaldamine – Elimination

- **Eemaldakse üks funktsioon**
- **Asendatakse vastavad muutujad**
- **Näide**
  - eemaldatakse  $r$   
 $s=r+b'$  ;  $r=p+a'$  ;
  - asendus  $s$ -s  
 $s=p+a'+b'$  ;



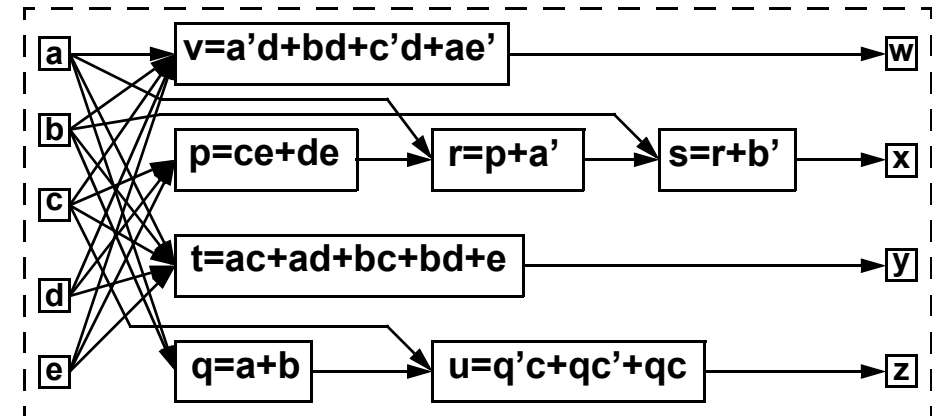
## Dekompositsioon – Decomposition

- Üks funktsioon jagatakse väiksemateks funktsioonideks
- Luuakse uus sõlm (uued sõlmed)
- Näide
  - $v$  jagatakse kaheks  $v = a' d + b d + c' d + a e'$  ;
  - luuakse  $j$   $j = a' + b + c'$  ;  $v = j d + a e'$  ;



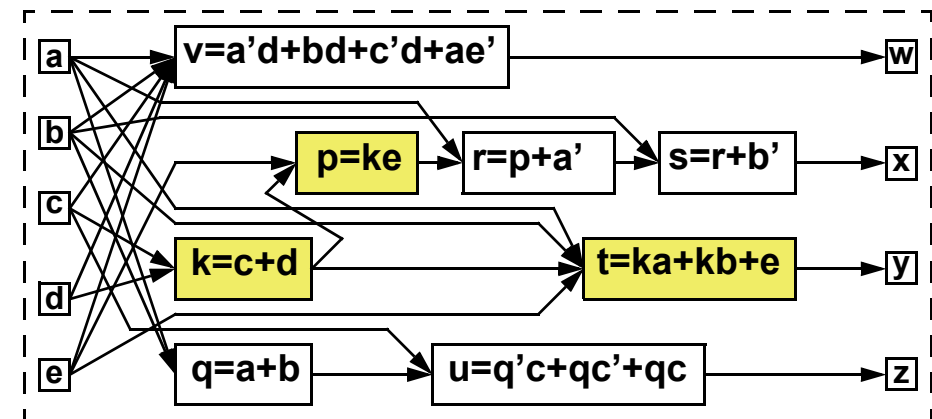
## Eraldamine – Extraction

- Leitakse *ühine alam-avaldis* (common sub-expression) kahele (või enamale) funktsioonile
- Alam-avaldis eraldatakse kui uus funktsioon
- Luuakse uus sõlm



- Näide

- $p$  ja  $t$  jagavad alam-avaldist  
 $p = ce + de$ ;  $t = ac + ad + bc + bd + e$ ;  
 $p = (c + d)e$ ;  $t = (c + d)(a + b) + e$ ;
- luuakse  $k$   
 $k = c + d$ ;  $p = ke$ ;  $t = ka + kb + e$ ;

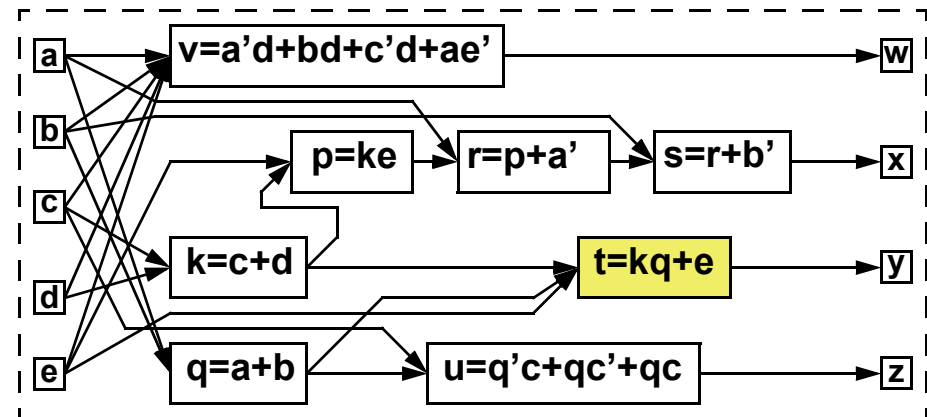
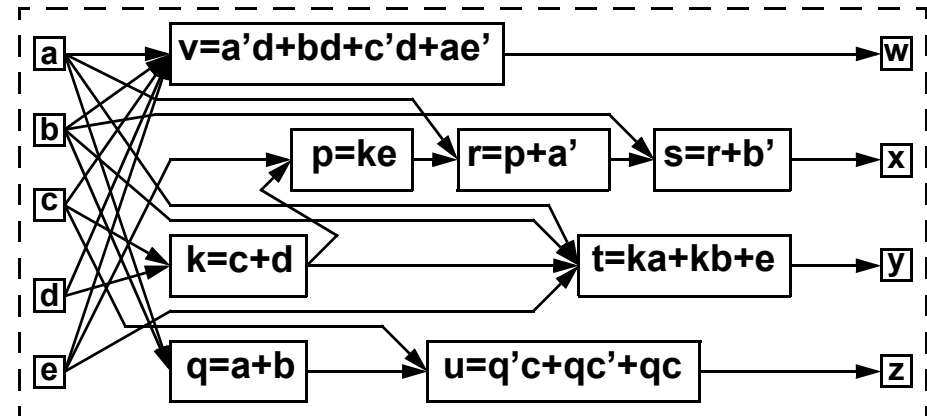


## Asendamine – Substitution

- Lihtsustatakse osa-funktsiooni kasutades *lisa-sisendit*, mida varem selles funktsioonis ei esinenud

- Näide

- $t$  sisaldab  $q$  kui alam-avaldist  
 $t = ka + kb + e$ ;  
 $q = a + b$ ;
- uus  $t$   
 $t = kq + e$ ;

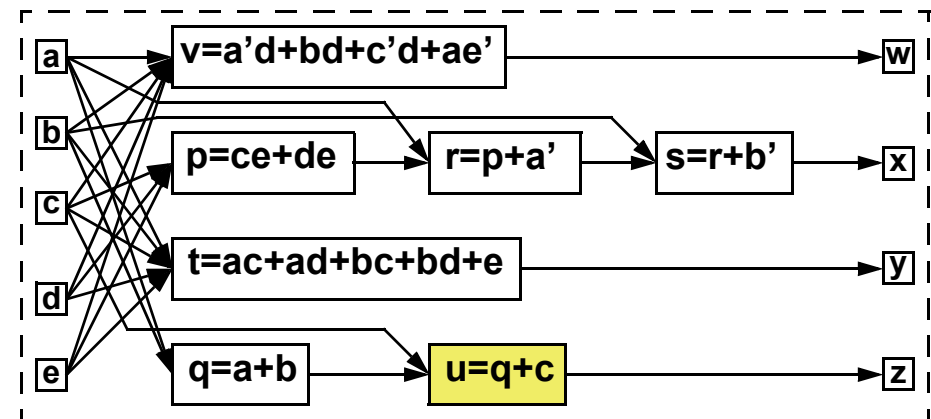
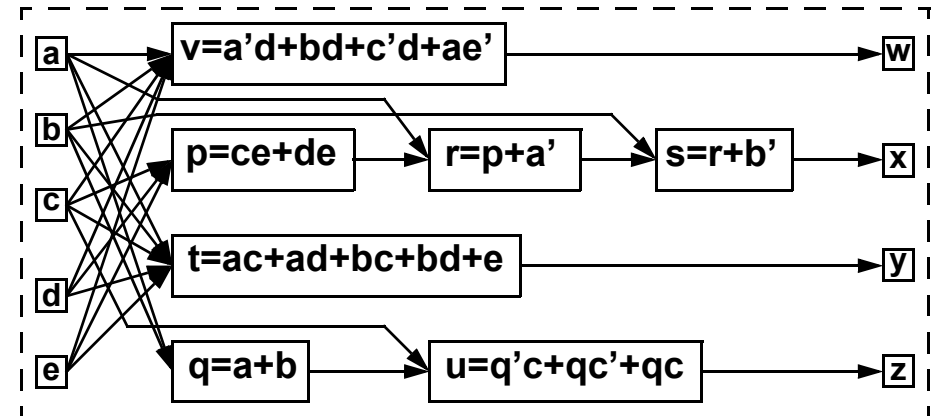


## Lihtsustamine – Simplification

- **Lihtsustatakse** osa-funktsioon

- **Näide**

- lihtsustatakse  $u$   
 $u = q'c + qc' + qc$
- uus  $u$   
 $u = q + c$



## Teisenduste jada – lõplik tulemus

- Lõplik funktsioon**

$$j = a' + b + c'$$

$$k = c + d$$

$$q = a + b$$

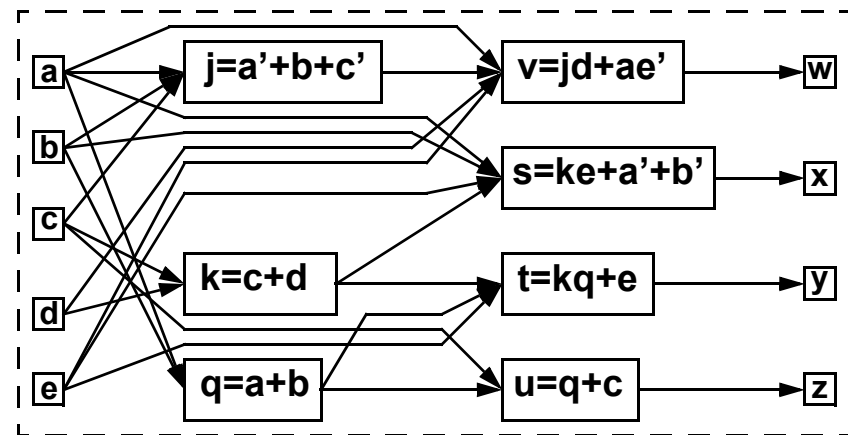
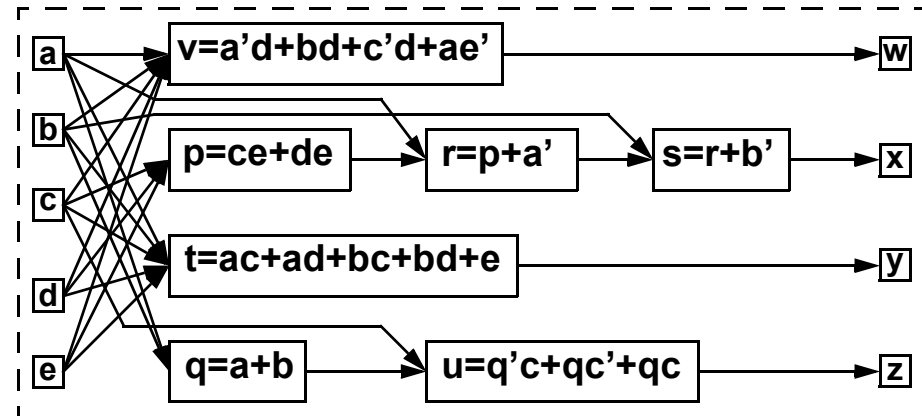
$$s = ke + a' + b'$$

$$t = q + c$$

$$u = q + c$$

$$v = jd + ae'$$

- Funktsioone/loogikalülisid – 7 ja 7
- Literaale – 33 ja 20
- Viide – 3 ja 2 (sõlmi)
- Viide – 9 ja 7 (sõlmi+literaale)





## Teisendused – kõik sammud

- **Lähteülesanne**

$$p=ce+de; \quad q=a+b; \quad r=p+a'; \quad s=r+b'; \quad t=ac+ad+bc+bd+e;$$
$$u=q'c+qc'+qc; \quad v=a'd+bd+c'd+ae'; \quad w=v; \quad x=s; \quad y=t; \quad z=u$$

- **Eemaldamine – s, r → s**

$$p=ce+de; \quad q=a+b; \quad \underline{s=p+a'+b'}; \quad t=ac+ad+bc+bd+e;$$
$$u=q'c+qc'+qc; \quad v=a'd+bd+c'd+ae'; \quad w=v; \quad x=s; \quad y=t; \quad z=u$$

- **Dekompositsioon – v → j, v**

$$p=ce+de; \quad q=a+b; \quad s=p+a'+b'; \quad t=ac+ad+bc+bd+e;$$
$$u=q'c+qc'+qc; \quad \underline{j=a'+b+c'}; \quad \underline{v=jd+ae'}; \quad w=v; \quad x=s; \quad y=t; \quad z=u$$

- **Eraldamine – p, t → k, p, t**

$$j=a'+b+c'; \quad \underline{k=c+d}; \quad \underline{p=ke}; \quad q=a+b; \quad s=p+a'+b'; \quad \underline{t=ka+kb+e};$$
$$u=q'c+qc'+qc; \quad v=jd+ae'; \quad w=v; \quad x=s; \quad y=t; \quad z=u$$

- **Asendamine – q, t → q, t**

$$j=a'+b+c'; \quad k=c+d; \quad p=ke; \quad \underline{q=a+b}; \quad s=p+a'+b'; \quad \underline{t=kq+e};$$
$$u=q'c+qc'+qc; \quad v=jd+ae'; \quad w=v; \quad x=s; \quad y=t; \quad z=u$$

- **Lihtsustamine – u → u**

$$j=a'+b+c'; \quad k=c+d; \quad p=ke; \quad q=a+b; \quad s=p+a'+b'; \quad t=kq+e;$$
$$\underline{u=q+c}; \quad v=jd+ae'; \quad w=v; \quad x=s; \quad y=t; \quad z=u$$

- **Eemaldamine – s, p → s**

$$j=a'+b+c'; \quad k=c+d; \quad q=a+b; \quad \underline{s=ke+a'+b'}; \quad t=kq+e;$$
$$u=q+c; \quad v=jd+ae'; \quad w=v; \quad x=s; \quad y=t; \quad z=u$$

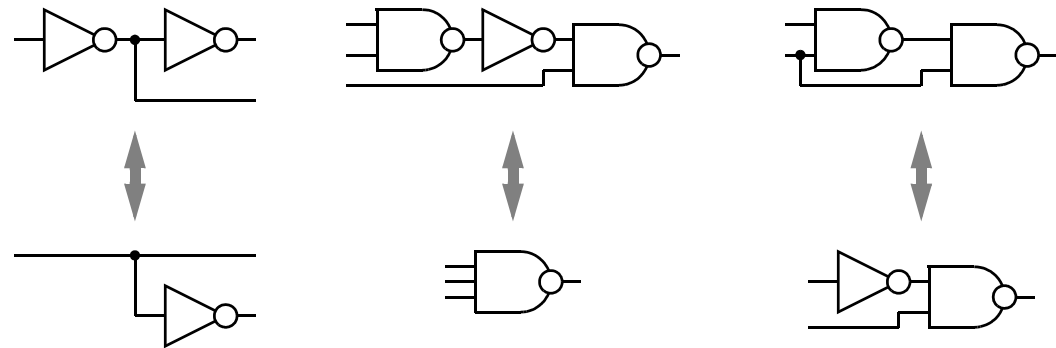
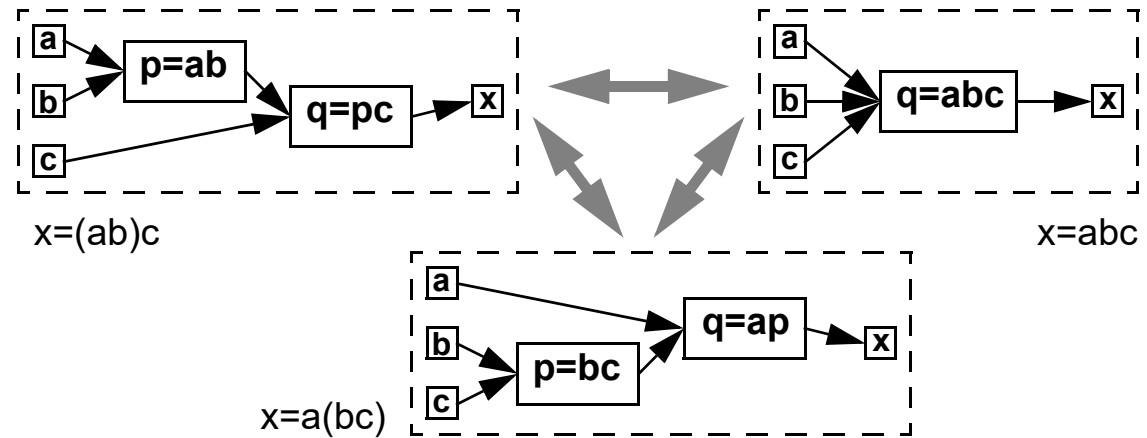


## Optimeerimisviisid

- **Algoritmiline**
  - iga teisenduse tüübi jaoks tuleb määrata algoritm (*operaator*)
    - heuristilised meetodid, nõrk lokaalne optimeerimine
    - ajutine (pinna/viite) ennustuse halvenemine võimalik
  - operaatorite järjekord – skriptipõhine / puhtkogemuslik
  - teisendused – algebralised ja kahendmeetodid
- **Reeglitel põhinev**
  - andmebaas – mustripaaride hulk
  - mustrite asendused defineeritud reeglite hulgaga
- **Tehnoloogiast sõltuv optimeerimine (technology mapping)**
  - elementide teegid – elemente realiseerib lihtsamat mõne sisendiga funktsiooni
  - programmeeritav loogika – mõne sisendiga suvalised funktsioonid (CLB)

## Reeglitel põhinev optimeerimine

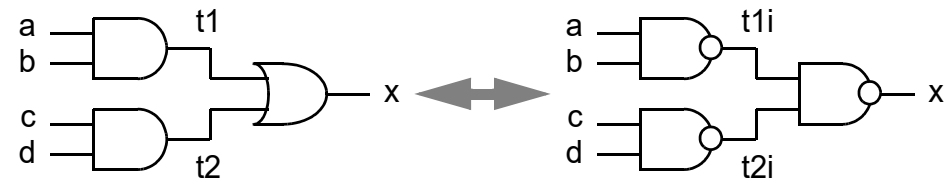
- Mustri (pattern) otsimine ja asendamine teisega
- vajadus kanoonilise esitusviisi järele
- Primitiivsete operatsioonide võrkgraaf
  - mustrite keerukus pole piiratud
- Seotus kasutatava tehnoloogiaga
  - abstrakne tehnoloogia



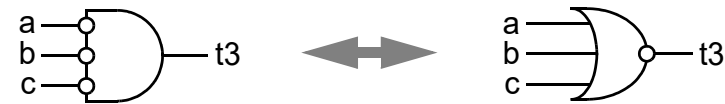
## Reeglitel põhinevad teisendused

### • De Morgani seadus

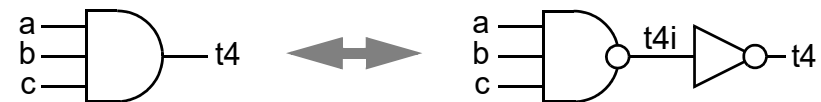
- $t1 = a b$  ;  $t2 = c d$  ;  $x = t1 + t2$  ;
- $t1' = (a b)'$  ;  $t2' = (c d)'$  ;  $x = (t1' t2')'$  ;
- $t1i = (a b)'$  ;  $t2i = (c d)'$  ;  $x = (t1i t2i)'$  ;



- $t3 = a' b' c'$  ;
- $t3 = (a + b + c)'$  ;



- $t4 = a b c$  ;
- $t4i = (a b c)'$  ;  $t4 = t4i'$  ;



### • Topelteiluse seadus

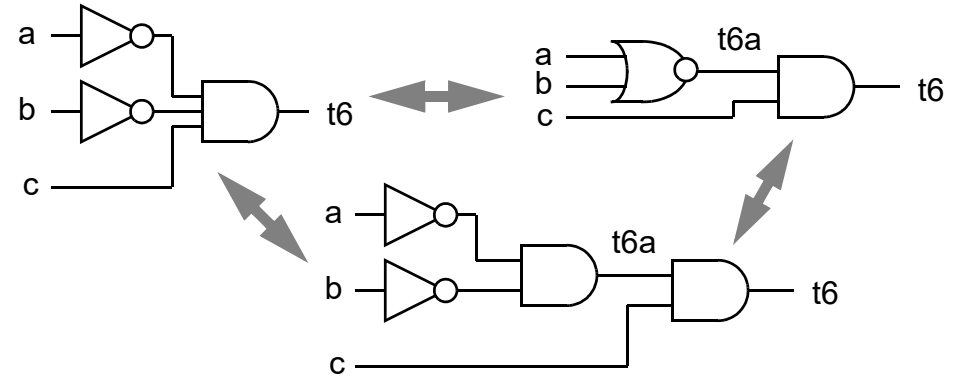
- $t5i = (a b)'$  ;  $t5 = t5'$  ;
- $t5 = a b$  ;



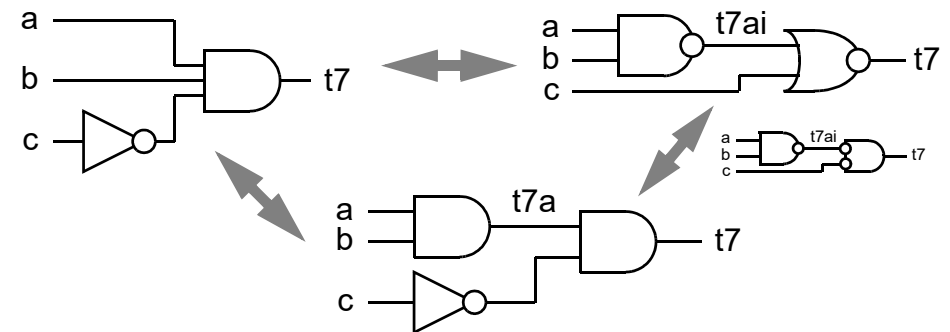
# Reeglitel põhinevad teisendused

## De Morgani & topelteiluse seadused

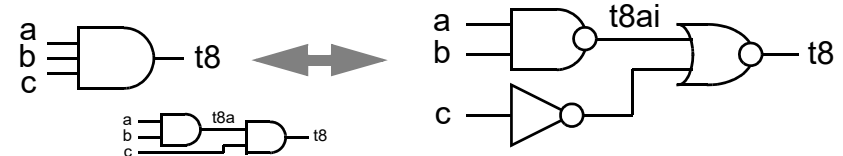
- $t6 = a' b' c$  ;
- $t6a = a' b'$  ;  $t6 = t6a c$  ;
- $t6a = (a + b)'$  ;  $t6 = t6a c$  ;



- $t7 = a b c'$  ;
- $t7a = a b$  ;  $t7 = t7a c'$  ;
- $[t7ai = (a b)'$  ;  $t7 = t7ai' c'$  ;]
- $t7ai = (a b)'$  ;  $t7 = (t7ai + c)'$  ;



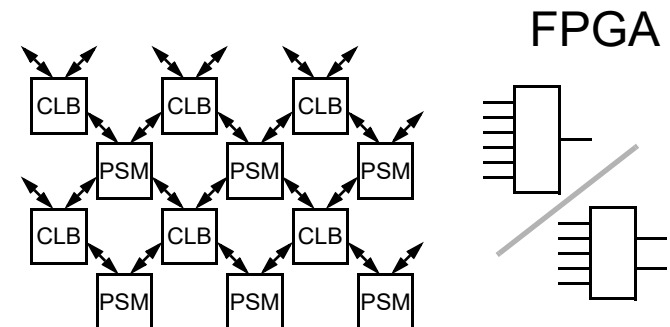
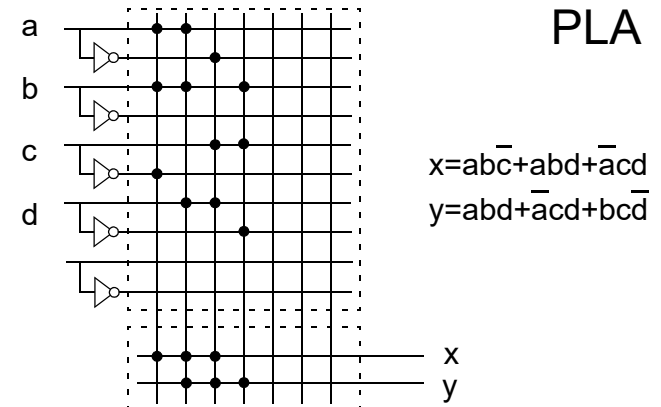
- $t8 = a b c$  ;
- $[t8a = a b$  ;  $t8 = t8a c$  ;]
- $t8ai = (a b)'$  ;  $t8 = (t8ai + c)'$  ;



# Erijuhud – programmeeritav loogika

## PLD – Programmable Logic Device

- **PLA – Programmable Logic Array**
  - Programmeeritavad loogikamaatriksid (ja ühendused)
  - Loogikamaatriks
    - mitme sisendiga ja mitme väljundiga loogika-funktsioonide süsteem, implikantide arv piiratud
  - Tükeldamine vastava suurusega funktsioonideks
- **FPGA – Field Programmable Gate Array**
  - väliprogrammeeritav loogika (ka korduvprogr. loogika)
  - Programmeeritavad loogikaplokid (CLB)
  - ... ja programmeeritavad ühendused (PSM)
  - Xilinx – Spartan, Artix, Kintex & Virtex seeriad
  - CLB – neli 6->1 / 5->2 funktsiooni
  - Tükeldamine 5- või 6-sisendiga funktsioonideks





## Funktsioonide teisendused – kahendmeetodid

- Loogikafunktsioonide omaduste kasutamine
- Võimalik kasutada osaliselt määratust (don't-care)
- Aegajalt (liigagi) keeruline
- Kahendasendus (boolean substitution)
  - lähtefunktsioonid  
 $h = a + bcd + e; \quad q = a + cd$
  - tulemus  
 $h = a + bq + e$
  - sest  
 $a + bq + e = a + b(a + cd) + e = a + bcd + e$        $[a + b(a + cd) + e = \underline{a + ab} + bcd + e = a + bcd + e]$
  - või hoopis?!  
 $h = a + bcd + e; \quad q = cd + e \quad \rightarrow \quad h = a + bq + e$   
 $a + bq + e = a + b(cd + e) + e = a + bcd + e$        $[a + b(cd + e) + e = a + bcd + \underline{be} + e = a + bcd + e]$



## Funktsioonide teisendused – algebralise meetodid

- Funktsioone vaadeldakse kui *polünoome*
- Kasutatakse polünoomide algebra omadusi
- Lihtsam, kiirem, kui nõrgem optimeerimisvõime
- **Algebraalne asendus (algebraic substitution)**
  - lähtefunktsioon  
 $t=ka+kb+e$
  - tulemus  
 $t=kq+e$
  - sest  
 $q=a+b$



## Algebralised meetodid

- ***Polünoom*** (polynomial) – korrutiste summa
- ***Monoom*** (monomial), üksliige – üksik korrutis e. kuup (e. implikant)
- **Ainult distributiivsuse seadus kasutusel**
  - $a(b+c)=ab+ac$ , kuid  $a+bc \neq (a+b)(a+c)$
- **Täiendid pole defineeritud**
  - muutuja täiendit vaadeldakse kui lisa muutujat
- **Määramatused pole defineeritud**
- **Operatsioonid ainult avaldistega, mille muutujate hulgad ei kattu**
- **Liiaste kuupide eemaldamine pole võimalik**
  - $(a+b)$  ja  $(c+d) \rightarrow (a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$  OK!
  - $(a+b)$  ja  $(a+c) \rightarrow (a+b)(a+c)=aa+ac+ba+bc \neq a+bc$  ei
  - $(a+b)$  ja  $(\bar{a}+c) \rightarrow (a+b)(\bar{a}+c)=a\bar{a}+ac+b\bar{a}+bc \neq ac+b\bar{a}$  ei



## Algebraalne jagatis

- Kaks algebraalist avaldist
- *jagatav* (dividend), *jagaja* (divisor), *jagatis* (quotient), *jääk* (remainder)
- $f_{\text{jagatis}} = f_{\text{jagatav}} / f_{\text{jagaja}}$ , kui
- $f_{\text{jagatav}} = f_{\text{jagaja}} \cdot f_{\text{jagatis}} + f_{\text{jääk}}$
- $f_{\text{jagaja}} \cdot f_{\text{jagatis}} \neq \emptyset$
- ning  $f_{\text{jagaja}}$  ja  $f_{\text{jagatis}}$  muutujate hulgad ei kattu ( $\text{sup}(f_{\text{jagaja}}) \cap \text{sup}(f_{\text{jagatis}}) = \emptyset$ )
- $f_{\text{jagatav}} = ac + ad + bc + bd + e$  &  $f_{\text{jagaja}} = a + b$
- $f_{\text{jagatis}} = c + d$  &  $f_{\text{jääk}} = e$
- $(a+b)(c+d)+e=f_{\text{jagatav}}$  &  $\{a,b\} \cap \{c,d\} = \emptyset$
- Mitte-algebraalne jagatis –  $f_i = a + bc$  &  $f_j = a + b$ 
  - $(a+b)(a+c)=f_i$  kuid  $\{a,b\} \cap \{a,c\} \neq \emptyset$



## Jagamisalgoritm

- $A = \{ C_j^A, j=1,2,\dots,l \}$  – jagatava kuupide hulk
- $B = \{ C_i^B, i=1,2,\dots,n \}$  – jagaja kuupide hulk
- Jagatis Q ja jääk R on kuupide summad

```
ALGEBRAIC_DIVISION (A,B) {
  for (i=1 to n) {
    D={CjA such that CjA ⊇ CiB};
    if (D==∅) return (∅,A);
    Di=D with var. in sup(CiB) dropped;
    if (i==1) Q=Di; else Q=Q∩Di;
  }
  R=A-Q×B;
  return (Q,R);
}
```



## Jagamine – näide #1

- $f_{\text{jagatav}} = ac + ad + bc + bd + e$  &  $f_{\text{jagaja}} = a + b$
- $A = \{ac, ad, bc, bd, e\}$  &  $B = \{a, b\}$
- $i = 1$ 
  - $C_1^B = a$ ,  $D = \{ac, ad\}$  &  $D_1 = \{c, d\}$
  - $Q = \{c, d\}$
- $i = 2$ 
  - $C_2^B = b$ ,  $D = \{bc, bd\}$  &  $D_2 = \{c, d\}$
  - $Q = \{c, d\} \cap \{c, d\} = \{c, d\}$  -- *kuup vastab elemendile!*
- **Tulemus**
  - $Q = \{c, d\}$  &  $R = \{e\}$
  - $f_{\text{jagatis}} = c + d$  &  $f_{\text{jääk}} = e$



## Jagamine – näide #2

- $f_{\text{jagatav}} = axc + axd + bc + bxd + e$  &  $f_{\text{jagaja}} = ax + b$
- $A = \{axc, axd, bc, bxd, e\}$  &  $B = \{ax, b\}$
- $i = 1$ 
  - $C_1^B = ax$ ,  $D = \{axc, axd\}$  &  $D_1 = \{c, d\}$
  - $Q = \{c, d\}$
- $i = 2$ 
  - $C_2^B = b$ ,  $D = \{bc, bxd\}$  &  $D_2 = \{c, xd\}$
  - $Q = \{c, d\} \cap \{c, xd\} = \{c\}$  -- *kuup vastab elemendile!*
- **Tulemus**
  - $Q = \{c\}$  &  $R = \{axd, bxd, e\}$
  - $f_{\text{jagatis}} = c$  &  $f_{\text{jääk}} = axd + bxd + e$



## Jagamine – mis siis ikkagi toimub?

- $A = ac + ad + bc + bd + e$  &  $B = a + b$ 
  - (1)  $a(c+d) + bc + bd + e$
  - (2)  $a(c+d) + b(c+d) + e \rightarrow (c+d) \text{ “}\cap\text{” } (c+d) \text{ “}=\text{” } (c+d)$
  - (R)  $[ac+ad+bc+bd+e] \text{ “-” } [(a+b)(c+d)] \text{ “}=\text{”}$   
 $\text{“}=\text{” } [ac+ad+bc+bd+e] \text{ “-” } [ac+ad+bc+bd] \text{ “}=\text{” } [e]$
  - $ac+ad+bc+bd+e = a(c+d)+b(c+d)+e = (c+d)(a+b)+e$
  
- $A = axc + axd + bc + bxd + e$  &  $B = ax + b$ 
  - (1)  $ax(c+d) + bc + bxd + e$
  - (2)  $ax(c+d) + b(c+xd) + e \rightarrow (c+d) \text{ “}\cap\text{” } (c+xd) \text{ “}=\text{” } (c)$
  - (R)  $[axc+axd+bc+bxd+e] \text{ “-” } [(ax+b)(c)] \text{ “}=\text{”}$   
 $\text{“}=\text{” } [axc+axd+bc+bxd+e] \text{ “-” } [axc+bc] \text{ “}=\text{” } [axd+bxd+e]$
  - $axc+axd+bc+bxd+e = ax(c+d)+b(c+xd)+e = ax(c)+b(c)+axd+bxd+e = c(ax+b)+axd+bxd+e$



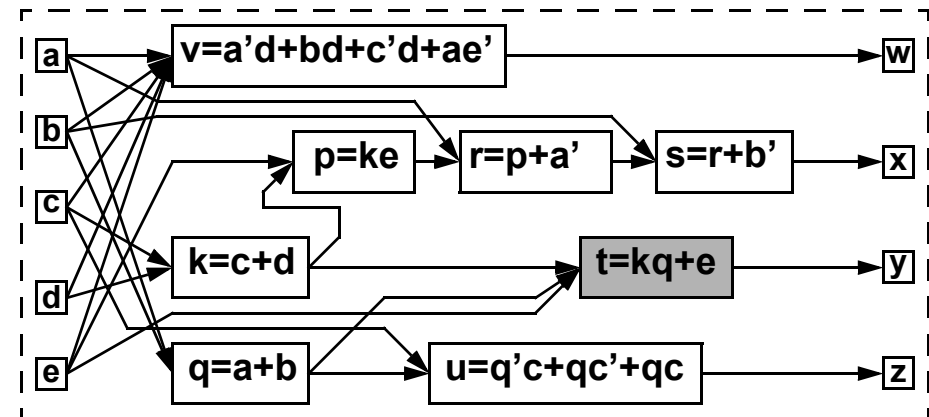
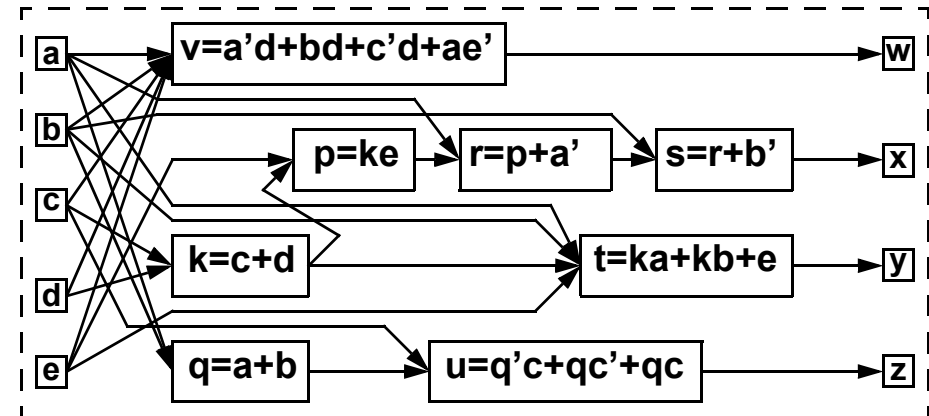
## Jagatise eksisteerimine?

- Teoreem
- Antud kaks algebraalset avaldist  $f_i$  ja  $f_j$
- $f_i / f_j$  on tühi, kui üks järgnevaist tingimustest on täidetud:
  - $f_j$  sisaldab muutujat, mida pole  $f_i$ -s;
  - $f_j$  sisaldab kuubi, mille tugimuutujad ei sisaldu üheski  $f_i$  kuubi tugimuutujate hulgas ( $\exists \text{sup}(C^j) \not\subseteq \text{sup}(C^i), \forall C^i \in f_i$ );
  - $f_j$  sisaldab rohkem liikemid kui  $f_i$ ;
  - suvalist muutujat on  $f_j$ -s rohkem kui  $f_i$ -s.
- Kasutusel kiireks kontrolliks
  - jagatist ei pruugi ikkagi eksisteerida –  $ac + be / a + b$



# Asendamine

- Vaadeldakse avaldiste paare
- Jagamine suvalises järjekorras
- Kui jagatis pole tühi, siis:
  - ennustatakse pindala/viite muutust
  - $f_{\text{jagatav}}$  asemele tuleb  $f_{\text{jagaja}} \cdot f_{\text{jagatis}} + f_{\text{jääk}}$
  - $f_t = ka + kb + e$  ( $f_{\text{jagatav}}$ )
  - $f_q = a + b$  ( $f_{\text{jagaja}}$ )
  - $f_{\text{jagatis}} = k$  &  $f_{\text{jääk}} = e$
  - $f_t = kq + e$





## Eraldamine

- Ühiste alam-avaldiste otsimine
  - üksik kuup (monoom) / mitmik-kuup (*tuum* e. kernel)
- Sobivate jagajate leidmine
- **Kuubivaba (cube-free) avaldis**
  - pole võimalik faktoriseerida kuupi kasutades
    - ehk siis, mitte ühtegi muutujat ei saa sulgude ette tuua
- **Avaldise tuum**
  - avaldise kuubivaba jagatis, kui jagaja on kuup (*kaas-tuum* e. co-kernel))
- **Avaldise tuumade hulk  $K(f)$** 
  - kahe (või enama) avaldise ühine mitmik-kuup jagaja – tuumade hulkade ühisosa
- **Tuumade leidmine**
  - naiivne – üritatakse leida jagatised muutujate kombinatsioonidele
  - rekursioon – tuumade tuumad on samuti tuumad



## Tuumad – näide

- $f_x = ace + bce + de + g$ 
  - $f_x / a \rightarrow ce \rightarrow$  ei ole kuubivaba
  - $f_x / b \rightarrow ce \rightarrow$  ei ole kuubivaba
  - $f_x / c \rightarrow ae + be \rightarrow$  ei ole kuubivaba
  - $f_x / ce \rightarrow a + b \rightarrow$  kuubivaba  $\rightarrow$  *tuum*
  - $f_x / d \rightarrow e \rightarrow$  ei ole kuubivaba
  - $f_x / e \rightarrow ac+bc+d \rightarrow$  kuubivaba  $\rightarrow$  *tuum*
  - $f_x / g \rightarrow 1 \rightarrow$  ei ole kuubivaba
  - $f_x / 1 \rightarrow ace+bce+de+g \rightarrow$  kuubivaba  $\rightarrow$  *tuum*
- $K(fx) = \{ (a+b), (ac+bc+d), (ace+bce+de+g) \}$



## Eraldamine – näide

- $f_x = ace + bce + de + g$
- $f_y = ad + bd + cde + ge$
- $f_z = abc$
  
- $K(f_x) = \{ (a+b), (ac+bc+d), (ace+bce+de+g) \}$
- $K(f_y) = \{ (a+b+ce), (cd+g), (ad+bd+cde+ge) \}$
- $K(f_z) = \{ \}$
  
- $f_w = a+b$
- $f_x = wce + de + g$
- $f_y = wd + cde + ge$
- $f_z = abc$



## Dekompositsioon

- $f_x = ace + bce + de + g;$
- $f_t = ac + bc + d; \quad f_x = te + g;$
- $f_s = a + b; \quad f_t = sc + d; \quad f_x = te + g;$
  
- **Tuumadel põhinev dekompositsioon**
  - **avaldist jagatakse rekursiivselt**
  
  - $f_x = ace + bce + de + g$
  - $K(f_x) = \{ (a+b), \underline{(ac+bc+d)}, (ace+bce+de+g) \}$
  - $f_t = ac + bc + d; \quad f_x = te + g;$
  - $K(f_t) = \{ \underline{(a+b)}, (ac+bc+d) \}$
  - $f_s = a + b; \quad f_t = sc + d; \quad f_x = te + g;$



## Viite mudel & viite minimeerimine

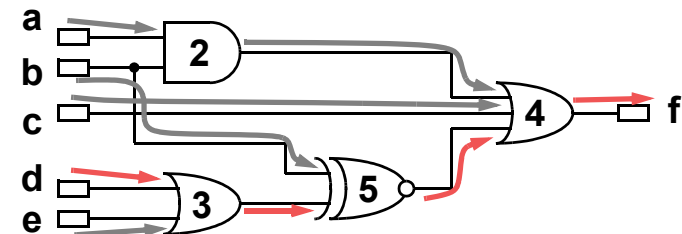
- **Sünteesi tulemuse kontroll**
  - viide on nõutavast väiksem ja sisend/väljund signaalide ajastus on korrektne
- **Viite mudel**
  - sõltub loogikalülide (alamavaldiste) viite mudelitest
  - topoloogilised mudelid (funktsionaalsuse arvestamisega või ilma)
- **Minimeerimine**
  - vähima pindala puhul peab viide jääma etteantud piiridesse
  - viite minimeerimisel peab pindala jääma etteantud piiridesse
  - teisendused elementidel, mis asuvad kriitilisel teel (kriitilistel teedel)
  - pea-aegu kriitilised teed – teed, mille viide on lähedane kriitilisega
- **Topoloogiline kriitiline tee (topological critical path)**
  - tee maksimaalse viitega / tee minimaalse sobivusega
  - väär kriitiline tee – signaali muutus ei levi mööda vastavat teed

## Viite arvutamine

- **Loogikaelemendi (alamavaldisse) viite mudel**
  - virtuaalsed loogikalülid – loogika-avaldised
  - lihtsaim mudel – ühikviide sõlme kohta
  - täpsustatud mudelid – sõltuvad koormatusest (fanout) ja/või avaldisse keerukusest
- **Andmete valmisoleku-ajad (data-ready time) -  $t_i$** 
  - sisenditest väljundite suunas arvutamine
    - millal andmed/signaalid kohale jõuavad, nt. hilistumine eelnevates moodulites
  - $t_i = d_i + \max_{j|(j,i) \in E} t_j$
- **Nõutud andmete valmisoleku-ajad (required data-ready time) -  $\bar{t}_i$** 
  - väljunditest sisendite suunas arvutamine
    - millal andmed/signaalid peavad valmis olema, nt. taktiperioodi piirang
  - $\bar{t}_i = \min_{j|(i,j) \in E} (\bar{t}_j - d_j)$
- **Sobivus (lõtvus, slack) –  $s_i = \bar{t}_i - t_i$** 
  - erinevus nõutud ja tegelike andmete valmisoleku-aegade vahel

## Viite arvutamine – andmete valmisoleku-ajad

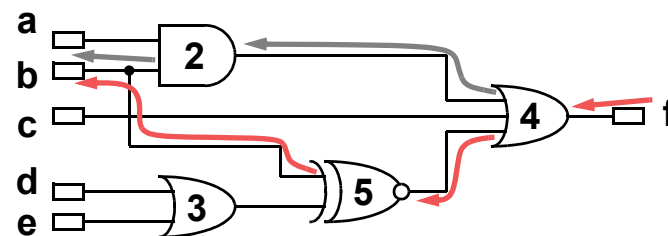
- $t_i = d_i + \max_{j|(j,i) \in E} t_j$
- sisendid  $\rightarrow$  väljundid
  - $t_a = t_b = t_e = 0; t_c = 5; t_d = 1;$
  - $t_2 = \max(t_a, t_b) + d_2 = \max(0, 0) + 2 = 2$
  - $t_3 = \max(t_d, t_e) + d_3 = \max(1, 0) + 3 = 4$
  - $t_5 = \max(t_b, t_3) + d_5 = \max(0, 4) + 5 = 9$
  - $t_4 = \max(t_2, t_c, t_5) + d_4 = \max(2, 5, 9) + 4 = 13$
  - $t_f = \max(t_4) + d_f = \max(13) + 0 = 13$
- Suurim viide – 13





## Viite arvutamine – andmete nõutavad valmisoleku-ajad

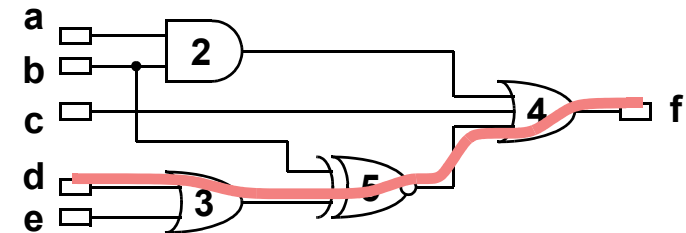
- $\bar{t}_i = \min_{j|(i,j) \in E} (\bar{t}_j - d_j)$
- väljundid  $\rightarrow$  sisendid
  - $t_a = t_b = t_e = 0; t_c = 5; t_d = 1; \bar{t}_f = 15;$
  - $\bar{t}_4 = \min(\bar{t}_f - d_f) = \min(15 - 0) = 15$
  - $\bar{t}_5, \bar{t}_2 = \min(\bar{t}_4 - d_4) = \min(15 - 4) = 11$
  - $\bar{t}_3 = \min(\bar{t}_5 - d_5) = \min(11 - 5) = 6$
  - $\bar{t}_a = \min(\bar{t}_2 - d_2) = \min(11 - 2) = 9$
  - $\bar{t}_b = \min(\bar{t}_2 - d_2, \bar{t}_5 - d_5) = \min(11 - 2, 11 - 5) = 6$
  - $\bar{t}_c = \min(\bar{t}_4 - d_4) = \min(15 - 4) = 11$
  - $\bar{t}_d, \bar{t}_e = \min(\bar{t}_3 - d_3) = \min(6 - 3) = 3$



## Viite arvutamine – sobivus ja kriitiline tee

- Sobivus (slack) –  $s_i = \bar{t}_i - t_i$

- $s_a = \bar{t}_a - t_a = 9 - 0 = 9$
- $s_b = \bar{t}_b - t_b = 6 - 0 = 6$
- $s_c = \bar{t}_c - t_c = 11 - 5 = 6$
- $s_d = \bar{t}_d - t_d = 3 - 1 = 2$
- $s_e = \bar{t}_e - t_e = 3 - 0 = 3$



sõlm	a	b	c	d	e	2	3	5	4	f
$t_x$	0	0	5	1	0	2	4	9	13	13
$\bar{t}_x$	9	6	11	3	3	11	6	11	15	15
$s_x$	9	6	6	2	3	7	2	2	2	2

- Kriitiline tee – tee väikseima sobivusega

## Viite arvutamine & kodutöö #2

- Ainult andmete valmisolekuajad
  - Sisendite valmisolekuajad on 0, puuduvad nõutud valmisolekuajad väljunditel

$$x_{1i} = x_1' \quad [1.5/1.5] \quad 1.5$$

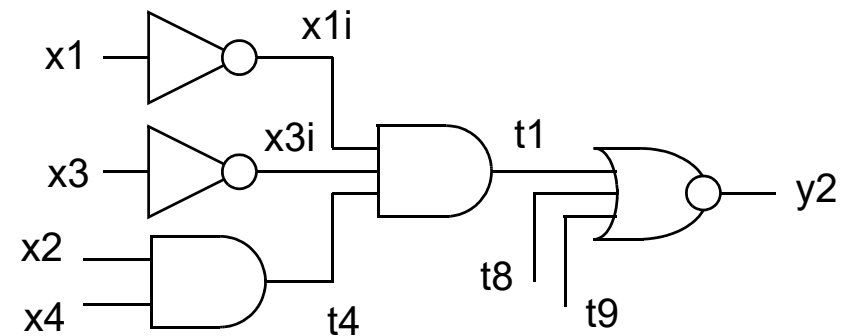
$$x_{3i} = x_3' \quad [1.5/1.5] \quad 1.5$$

$$t_1 = t_4 \ \& \ x_{1i} \ \& \ x_{3i} \quad [2.5/2.5] \quad 4.5$$

$$t_4 = x_2 \ \& \ x_4 \quad [2.0/2.0] \quad 2.0$$

$$y_2 = (t_1 + t_8 + t_9)' \quad [2.0/2.0] \quad 6.5$$

- $t_{x1} = t_{x2} = t_{x3} = t_{x4} = 0$
- $t_{x1i} = \max(t_{x1}) + d_{\text{inv}} = 0 + 1,5 = 1,5$
- $t_{x3i} = \max(t_{x3}) + d_{\text{inv}} = 0 + 1,5 = 1,5$
- $t_{t4} = \max(t_{x2}, t_{x4}) + d_{2\text{and}} = \max(0; 0) + 2,0 = 2,0$
- $t_{t1} = \max(t_{x1i}, t_{x3i}, t_{t4}) + d_{3\text{and}} = \max(1,5; 1,5; 2,0) + 2,5 = 4,5$
- $t_{y2} = \max(t_{t1}, t_{t8}, t_{t9}) + d_{3\text{nor}} = \max(4,5; 4,0; 2,0) + 2,0 = 6,5$





## Viite arvutamine – näited

$a_i = a'$	$t_{a_i} = \max(0)+1.5 = 1.5$
$b_i = b'$	$t_{b_i} = \max(0)+1.5 = 1.5$
$c_i = c'$	$t_{c_i} = \max(0)+1.5 = 1.5$
$d_i = d'$	$t_{d_i} = \max(0)+1.5 = 1.5$
$t_1 = a_i b_i d$	$t_{t_1} = \max(1.5, 1.5, 0)+2.5 = 4.0$
$t_2 = a b c$	$t_{t_2} = \max(0, 0, 0)+2.5 = 2.5$
$t_3 = b_i c_i$	$t_{t_3} = \max(1.5, 1.5)+2.0 = 3.5$
$t_4 = b d$	$t_{t_4} = \max(0, 0)+2.0 = 2.0$
$t_5 = a c_i d$	$t_{t_5} = \max(0, 1.5, 0)+2.5 = 4.0$
$t_6 = b c_i$	$t_{t_6} = \max(0, 1.5)+2.0 = 3.5$
$t_7 = a_i c d_i$	$t_{t_7} = \max(1.5, 0, 1.5)+2.5 = 4.0$
$k_1 = t_1+t_2$	$t_{k_1} = \max(4.0, 2.5)+2.0 = 6.0$
$k = k_1+t_3+t_4$	$t_k = \max(6.0, 3.5, 2.0)+2.5 = 8.5$
$l = k_1+t_5+t_6$	$t_l = \max(6.0, 4.0, 3.5)+2.5 = 8.5$
$m_1 = t_7+t_6$	$t_{m_1} = \max(4.0, 3.5)+2.0 = 6.0$
$m = k_1+m_1$	$t_m = \max(6.0, 6.0)+2.0 = 8.0$
$n_1 = t_5+t_4+t_2$	$t_{n_1} = \max(4.0, 2.0, 2.5)+2.5 = 6.5$
$n = m_1+n_1$	$t_n = \max(6.0, 6.5)+2.0 = 8.5$

4 NOT, 3\*2-AND, 4\*3-AND, 4\*2-OR, 3\*3-OR

literaale: 4+18+17=39

eq.gates: 4\*1.5+3\*2.0+4\*2.5+4\*2.0+3\*2.5=37.5

maks.viide: 8.5, kr.tee nt.  $a-a_i-t_1-k_1-k$  või  $c-c_i-t_5-n_1-n$

$a_i = a'$	$t_{a_i} = \max(0)+1.5 = 1.5$
$b_i = b'$	$t_{b_i} = \max(0)+1.5 = 1.5$
$c_i = c'$	$t_{c_i} = \max(0)+1.5 = 1.5$
$d_i = d'$	$t_{d_i} = \max(0)+1.5 = 1.5$
$t_1 = a+c_i$	$t_{t_1} = \max(0, 1.5)+2.0 = 3.5$
$t_2 = b_i c_i$	$t_{t_2} = \max(1.5, 1.5)+2.0 = 3.5$
$t_3 = b d$	$t_{t_3} = \max(0, 0)+2.0 = 2.0$
$t_4 = a_i b_i d$	$t_{t_4} = \max(1.5, 1.5, 0)+2.5 = 4.0$
$t_5 = a b c$	$t_{t_5} = \max(0, 0, 0)+2.5 = 2.5$
$t_6 = t_1 b$	$t_{t_6} = \max(3.5, 0)+2.0 = 5.5$
$t_7 = a c_i d$	$t_{t_7} = \max(0, 1.5, 0)+2.5 = 4.0$
$t_8 = a_i c d_i$	$t_{t_8} = \max(1.5, 0, 1.5)+2.5 = 4.0$
$k_1 = t_2+t_3$	$t_{k_1} = \max(3.5, 2.0)+2.0 = 5.5$
$k = k_1+t_4+t_5$	$t_k = \max(5.5, 4.0, 2.5)+2.5 = 8.0$
$l = t_6+t_7+t_4$	$t_l = \max(5.5, 4.0, 4.0)+2.5 = 8.0$
$m = t_6+t_8+t_4$	$t_m = \max(5.5, 4.0, 4.0)+2.5 = 8.0$
$n_1 = t_6+t_3$	$t_{n_1} = \max(5.5, 2.0)+2.0 = 7.5$
$n = n_1+t_8+t_7$	$t_n = \max(7.5, 4.0, 4.0)+2.5 = 10.0$

4\*NOT, 3\*2-AND, 4\*3-AND, 3\*2-OR, 4\*3-OR

literaale: 4+18+18=40

eq.gates: 4\*1.5+3\*2.0+4\*2.5+3\*2.0+4\*2.5=38.0

maks.viide: 10.0, kr.tee  $c-c_i-t_1-t_6-n_1-n$



## Viite arvutamine – näited

$$\begin{aligned}
 a_i &= a' & t_{a_i} &= \max(0)+1.5 = 1.5 \\
 b_i &= b' & t_{b_i} &= \max(0)+1.5 = 1.5 \\
 c_i &= c' & t_{c_i} &= \max(0)+1.5 = 1.5 \\
 d_i &= d' & t_{d_i} &= \max(0)+1.5 = 1.5 \\
 t_1 &= b \text{ ci} & t_{t_1} &= \max(0,1.5)+2.0 = 3.5 \\
 t_2 &= a_i \text{ di} & t_{t_2} &= \max(1.5,1.5)+2.0 = 3.5 \\
 t_3 &= a \text{ bi c} & t_{t_3} &= \max(0,1.5,0)+2.5 = 4.0 \\
 t_4 &= b_i \text{ ci di} & t_{t_4} &= \max(1.5,1.5,1.5)+2.5 = 4.0 \\
 t_5 &= a_i \text{ b d} & t_{t_5} &= \max(1.5,0,0)+2.5 = 4.0 \\
 t_6 &= a_i \text{ ci} & t_{t_6} &= \max(1.5,1.5)+2.0 = 3.5 \\
 k_i &= t_1+t_2+t_3 & t_{k_i} &= \max(3.5,3.5,4.0)+2.5 = 6.5 \\
 l_i &= t_2+t_4+t_3 & t_{l_i} &= \max(3.5,4.0,4.0)+2.5 = 6.5 \\
 m_i &= t_5+t_4+t_3 & t_{m_i} &= \max(4.0,4.0,4.0)+2.5 = 6.5 \\
 n_i &= t_6+t_4+t_3 & t_{n_i} &= \max(3.5,4.0,4.0)+2.5 = 6.5 \\
 k &= k_i' & t_k &= \max(6.5)+1.5 = 8.0 \\
 l &= l_i' & t_l &= \max(6.5)+1.5 = 8.0 \\
 m &= m_i' & t_m &= \max(6.5)+1.5 = 8.0 \\
 n &= n_i' & t_n &= \max(6.5)+1.5 = 8.0
 \end{aligned}$$

8 NOT, 3\*2-AND, 3\*3-AND, 4\*3-OR

literaale: 8+15+12=35

eq.gates: 8\*1.5+3\*2.0+3\*2.5+4\*2.5=35.5

maks.viide: 8.0, kr.tee nt. *a-ai-t6-ki-k* või *c-ci-t4-ni-n*

$$\begin{aligned}
 a_i &= a' & t_{a_i} &= \max(0)+1.5 = 1.5 \\
 b_i &= b' & t_{b_i} &= \max(0)+1.5 = 1.5 \\
 c_i &= c' & t_{c_i} &= \max(0)+1.5 = 1.5 \\
 d_i &= d' & t_{d_i} &= \max(0)+1.5 = 1.5 \\
 t_1 &= (b_i+c)' & t_{t_1} &= \max(1.5,0)+1.5 = 3.0 \\
 t_2 &= (a+d)' & t_{t_2} &= \max(0,0)+1.5 = 1.5 \\
 t_3 &= (a_i+b+c_i)' & t_{t_3} &= \max(1.5,0,1.5)+2.0 = 3.5 \\
 t_4 &= (b+c+d)' & t_{t_4} &= \max(0,0,0)+2.0 = 2.0 \\
 t_5 &= (a+b_i+d_i)' & t_{t_5} &= \max(0,1.5,1.5)+2.0 = 3.5 \\
 t_6 &= (a+c)' & t_{t_6} &= \max(0,0)+1.5 = 1.5 \\
 k &= (t_1+t_2+t_3)' & t_k &= \max(3.0,1.5,3.5)+2.0 = 5.5 \\
 l &= (t_2+t_4+t_3)' & t_l &= \max(1.5,2.0,3.5)+2.0 = 5.5 \\
 m &= (t_5+t_4+t_3)' & t_m &= \max(3.5,2.0,3.5)+2.0 = 5.5 \\
 n &= (t_6+t_4+t_3)' & t_n &= \max(1.5,2.0,3.5)+2.0 = 5.5
 \end{aligned}$$

4\*NOT, 3\*2-NOR 7\*3-NOR

literaale: 4+27=31

eq.gates: 4\*1.5+3\*1.5+7\*2.0=24.5

maks.viide: 5.5, kr.tee nt. *a-ai-t3-k* või *d-di-t5-m*

## Kriitiline tee ja mäluelemendid (registrid)

- **Seade- & hoideaegad mäluelemntides (trigerites)**

- seadeaeg – sisendandmed peavad olema stabiilsed mingi aeg enne taktsignaali aktiivset fronti
- hoideaeg – sisendandmed peavad olema stabiilsed mingi aeg pärast taktsignaali aktiivset fronti

- Põhjuseks mäluelementide siseste signaalide erinevad levimisajad

- Tagajärjeks võib olla metastabiilsus – väljund on '0' ja '1' vahel

- seadeaeg – setup time

- hoideaeg – hold time

- **Sobivuse arvutamisel peab arvestama ka mäluelementide ajalisi parameetreid:**

- andmete valmisoleku aeg:  $t_x + d_{ff}$
- nõutav andmete valmisoleku aeg:  $\bar{t}_x - t_{ff,setup}$
- sobivus (slack):  $s_x - d_{ff} - t_{ff,setup}$

